

**NATIONELLT KURSPROV I
MATEMATIK KURS B
VÅREN 2011**

Anvisningar

- Provtid 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. **Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.**
- Hjälpmedel **Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs B”.
Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.
Del II: Miniräknare, även symbolhanterande räknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs B”.
- Provmaterialet Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.
Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.
*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren.
Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
- Provet Provet består av totalt 16 uppgifter. **Del I** består av 7 uppgifter och **Del II** av 9 uppgifter.
Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritat figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.
Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.
Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
- Poäng och betygsgränser Provet ger maximalt 45 poäng.
Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med \boxtimes , vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.
Undre gräns för provbetyget
Godkänt: 13 poäng.
Väl godkänt: 25 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 13 vg-poäng.
Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de \boxtimes -märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Lös ekvationerna

a) $x^2 - 6x - 16 = 0$ (2/0)

b) $x^2 + 4x = 0$ (2/0)

2. En rät linje går genom punkterna (0, 2) och (4, 0)

a) Rita linjen i ett koordinatsystem. (1/0)

b) Ange linjens ekvation. *Endast svar fordras* (1/0)

3. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ (2/0)

4. Vid en skidtävling med 20 deltagare sker starten individuellt. Deltagarna ska ha nummerlappar med nummer 1 till 20, där numret anger startordningen.

Marcus och Erik ska delta i tävlingen och båda vill starta sist, det vill säga båda vill ha nummer 20. Innan start får deltagarna slumpmässigt dra ett kuvert som innehåller en nummerlapp. Marcus får dra ett kuvert först av alla och Erik får dra direkt efter.

Innan de öppnar kuverten så säger Marcus till Erik: ”Det är större chans att nummer 20 finns i mitt kuvert än i ditt eftersom jag fick dra först”.

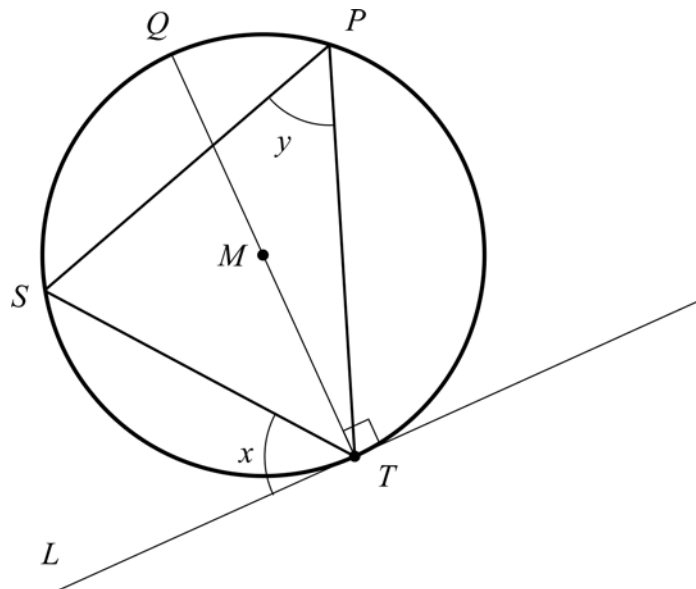
Avgör om Marcus har rätt genom att bestämma sannolikheterna för att Marcus respektive Erik får startnummer 20. (1/1)

5. Förenkla uttrycket $(x - 2)^2 + (3 - x)(x - 4)$ så långt som möjligt. (2/0)

6. Två linjer $y = 2x + 5$ och $y = kx + m$ skär varandra i en enda punkt. Den punkten ligger på y -axeln.

Vilka värden kan riktningskoefficienten k ha? Motivera. (0/1/π)

7. En linje L tangerar en cirkel i punkten T . M är cirkelns medelpunkt. Vinkeln mellan cirkelns diameter QT och linjen L är 90° . En triangel PST ligger i cirkeln med alla hörnen på cirkelns rand. Se figur.



a) Hur stor är vinkeln y då vinkeln x är 56° ? (0/2)

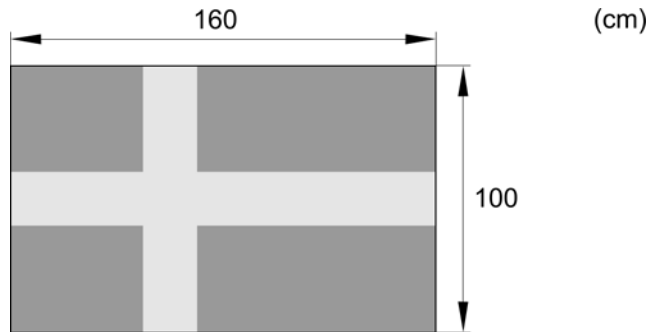
Om punkterna P och S flyttas längs cirkelns rand kommer vinklarna x och y att variera. För vinkeln x gäller $0^\circ < x < 90^\circ$

b) Bestäm sambandet mellan vinklarna x och y . (0/1/π)

Del II

Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

8. En svensk flagga med långsidan 160 cm och kortsidan 100 cm uppfyller gällande flagglag. Anna vill göra en liten bordsflagga med kortsidan 8 cm.



Hur lång ska Anna göra sin flagga för att den ska vara likformig med den stora flaggan?

(2/0)

9. Företaget Rund Plast AB tillverkar bland annat innebandybollar. Varje månad tillverkas 50 000 innebandybollar.

Efter klagomål från kunder beslöt Rund Plast AB:s ledning att göra en kvalitetskontroll. Under en månad kontrollerades kvaliteten på var 200:e innebandyboll som tillverkades. Man hittade 11 bollar som var av dålig kvalitet.

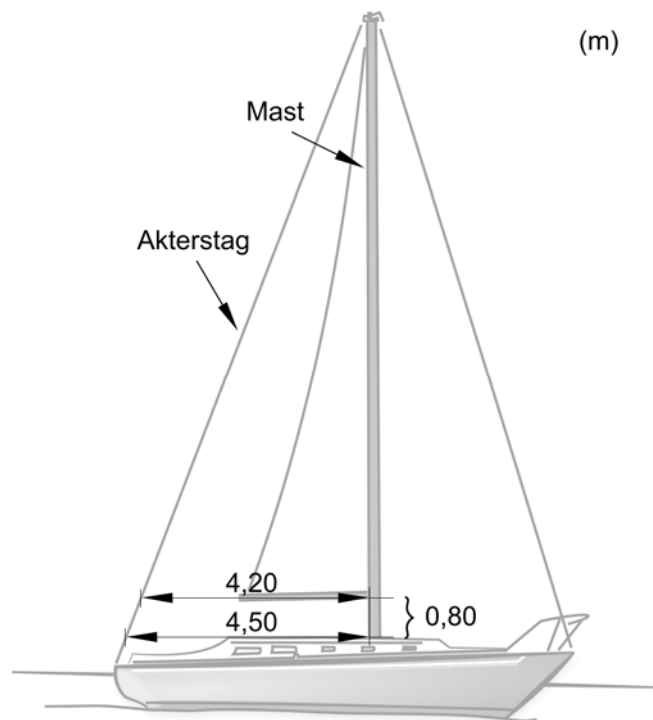
- a) Här ovan beskrivs en stickprovsundersökning. Hur stort var stickprovet? (1/0)
- b) Hur många av de innebandybollar som tillverkades under en månad kan antas ha varit av dålig kvalitet? (2/0)

10. En rät linje har riktningskoefficienten $k = 1,2$ och skär y-axeln i punkten $(0, 3)$

Avgör om punkten $(175, 207)$ ligger på linjen.

(2/0)

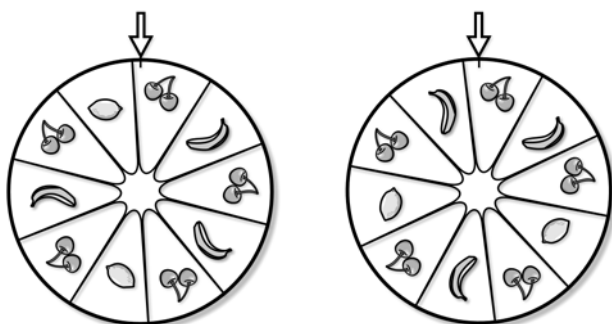
11. Lina och Sara är ute och seglar i en båt som de har lånat. De seglar mot en bro och börjar fundera på om masten är för hög för att båten ska kunna passera under bron. För att kunna bestämma mastens höjd gör de några mätningar.



Lina och Sara mäter avståndet från mastens fot och rakt ut mot akterstaget och finner att det är 4,50 m. Sedan mäter de avståndet från masten till akterstaget 0,80 m högre upp och parallellt med första mätningen. Det avståndet är 4,20 m. Se figur.

Använd de mätningar som Lina och Sara har gjort och bestäm mastens höjd. (2/0)

12. Elin, Petter och Ali är på ett nöjesfält. Där finns ett spel med två likadana snurrande lyckohjul med bilder av bananer, citroner och körsbär. Hjulen snurrar oberoende av varandra. Spelet ger vinst om pilarna på respektive hjul pekar på bilder av samma sorts frukt då hjulen stannar. Se figur.



- a) Elin satsar på att båda hjulen stannar på körsbär. Hur stor är sannolikheten att hon vinner? (0/1)
- b) Samtidigt som Elin satsar på körsbär, satsar Petter på bananer och Ali på citroner. Hur stor är sannolikheten att ingen av de tre vinner? (0/2)

13. Fia springer på ett löpband som kan ställas in på olika hastigheter. På en display kan hon avläsa hur mycket energi hon förbrukar under ett träningspass på löpbandet. Energin anges i enheten kcal.

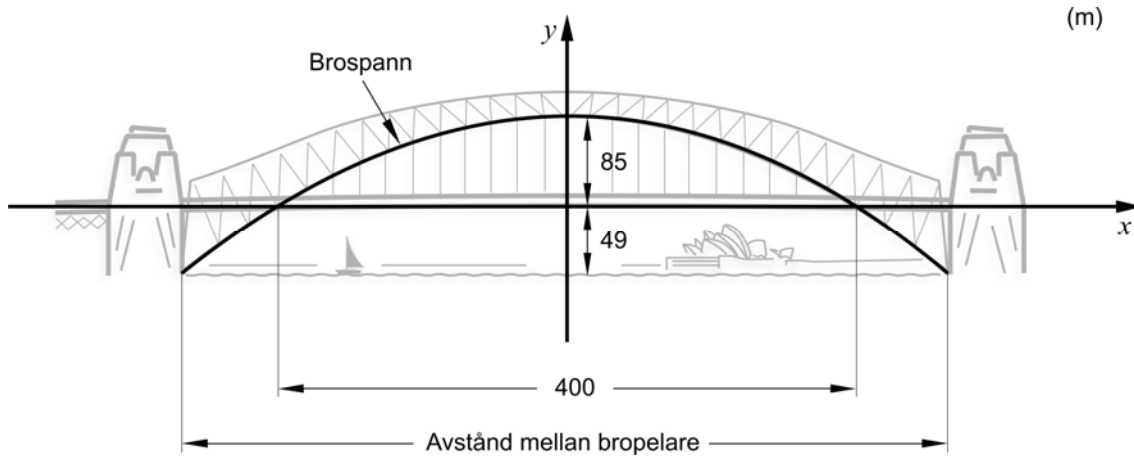


Fia brukar först ställa in löpbandet på hastigheten 8 km/h ("låg" hastighet) för att sedan öka hastigheten till 12 km/h ("hög" hastighet). Tabellen visar exempel på Fias träningspass på löpbandet.

	Tid		Energiförbrukning
	"låg" hastighet	"hög" hastighet	
Träningspass 1	20 min	10 min	300 kcal
Träningspass 2	10 min	15 min	280 kcal

- Hur mycket energi per minut (kcal/min) förbrukar Fia då hon springer med "låg" respektive "hög" hastighet? (0/3)

14. En av sevärdheterna i Sydney är den stora stålbron, Sydney Harbour Bridge. Mellan bropelarna löper ett brospann som har formen av en andragradskurva. Den högsta punkten är belägen 85 meter över vägbanan. Vägbanan ligger i sin tur 49 meter över vattenytan. Brospannet befinner sig ovanför vägbanan längs en 400 meter lång vägsträcka. Se figur.



Ekvationen för andragradskurvan som beskriver brospannet kan skrivas som $y = ax^2 + b$, där a och b är konstanter.

- a) Vilket värde har konstanten b för den andragradskurva som beskriver brospannet? *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Hur långt är avståndet mellan bropelarna? (0/3/π)
15. En sträcka AB är 15 cm lång. Sträckan kan delas i fem delsträckor på olika sätt. Längden av varje delsträcka måste vara större än noll.



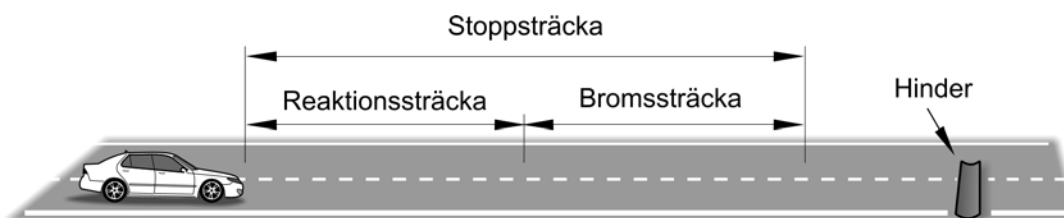
- a) Gör en indelning av sträckan AB så att variationsbredden för delsträckornas längder blir 12,5 cm. (1/1)
- b) Beroende på hur man delar in sträckan AB i fem delsträckor kan variationsbredden variera. Utred vilka värden som är möjliga för variationsbredden när man ändrar på de fem delsträckornas längder. (0/1/π)

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

16. I samband med bilkörning brukar man tala om *stoppsträcka* i situationer då föraren upptäcker ett hinder, bromsar in och stannar.

Stoppsträckan s kan delas in i två delar. Den första delen, *reaktionssträckan*, är den sträcka bilen rör sig från det att föraren ser ett hinder till dess att föraren reagerar och trycker på bromspedalen. Den andra delen, *bromssträcka*, är den sträcka som bilen rör sig från det att föraren börjar bromsa till det att bilen stannar. Se figur.



Stoppsträckan s vid ett visst väglag kan beräknas enligt följande formel:

$$s = \underbrace{0,27v}_{\text{Reaktionssträcka}} + \underbrace{0,005v^2}_{\text{Bromssträcka}}$$

där stoppsträckan s anges i meter och hastigheten v anges i km/h.

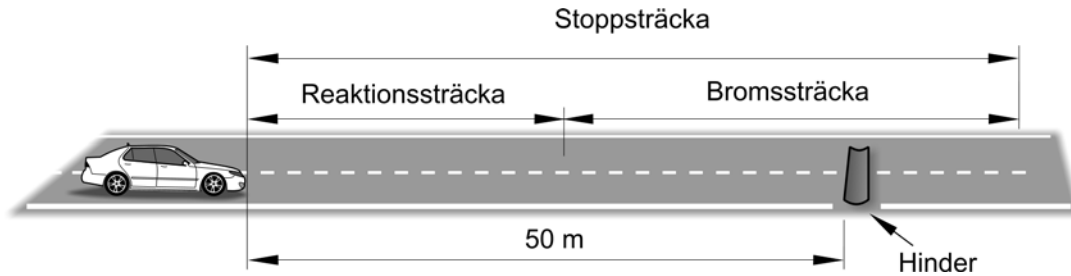
- Beräkna reaktionssträcka, bromssträcka och stoppsträcka för hastigheterna 70 km/h, 90 km/h och 110 km/h. Rita av tabellen och fyll i dina värden.

Hastighet (km/h)	Reaktionssträcka (m)	Bromssträcka (m)	Stoppsträcka (m)
70			
90			
110			

Vid landsvägskörning i mörker lyser halvljusen upp vägen cirka 50 meter framför bilen. Det är vid det avståndet föraren tidigast kan upptäcka ett hinder.

- Undersök för vilka hastigheter det är möjligt att kunna stanna på 50 meter.

Enligt formeln för stoppsträcka $s = 0,27v + 0,005v^2$ hinner föraren inte stanna före ett hinder som upptäcks då avståndet till hindret är 50 meter och föraren kör med hastigheten 110 km/h. Tänk dig att bilen kan passera hindret och att föraren fortsätter att bromsa. Se figur.



- Hur långt efter hindret stannar bilen om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?
- Vilken hastighet har bilen när den är vid hindret om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?

Den hastighet som bilen har vid hindret beror av den ursprungliga hastigheten då föraren upptäcker hindret och avståndet fram till hindret.

Tänk dig nu att bilens ursprungliga hastighet är v km/h då föraren upptäcker ett hinder på 50 meters avstånd och att bilens hastighet vid hindret är u km/h.

- Undersök och beskriv sambandet mellan u och v .

(3/4/π)

Innehåll	Sid nr
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet	4
Kravgränser	5
Allmänna riktlinjer för bedömning	6
Bedömningsanvisningar del I och del II	7
Mål för matematik kurs B – Kursplan 2000	24
Betygskriterier 2000	25
Kopieringsunderlag för aspektbedömning	26
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter	27
Insamling av provresultat för matematik kurs B våren 2011	28

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbyggnad samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 6, 7, 14, 15 och 16. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 4, 6, 7, 15 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 11, 12, 13, 14 och 16.

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 45 poäng, varav 25 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt: 13 poäng.

Väl godkänt: 25 poäng varav minst 6 vg-poäng.

Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 13 vg-poäng.

Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter av de fyra MVG-kvaliteter som är möjliga att visa i detta prov.

De α -märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

MVG-kvalitet	Uppgift				
	6	7b	14b	15b	16
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○		○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	○			○	○
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang		○			○
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk		○			○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)
 - 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
 - 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.
5. Uppgifter av långsvarstyp
 - 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
 - 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
 - 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
 - 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknefel.
6. Aspektbedömning
Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg
 - 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
 - 7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
 - 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
 - 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (☒) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaB vt 2011)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

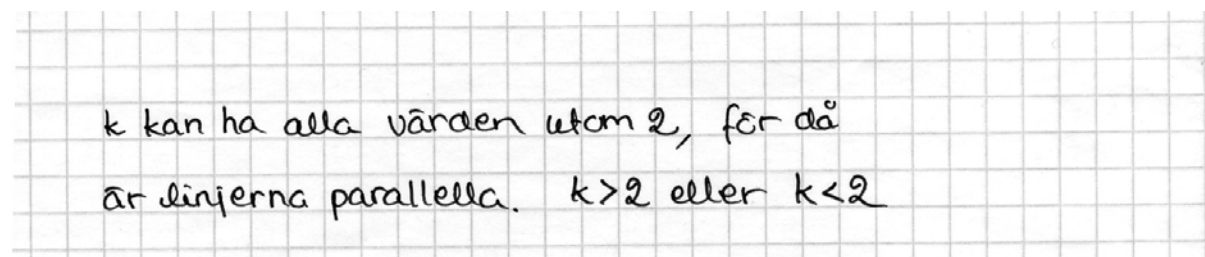
Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		Max 4/0
a)	Godtagbar bestämning av en rot	+1 g
	Godtagbar bestämning av ytterligare en rot ($x_1 = 8$, $x_2 = -2$)	+1 g
b)	Godtagbar bestämning av en rot	+1 g
	Godtagbar bestämning av ytterligare en rot ($x_1 = 0$, $x_2 = -4$)	+1 g
2.		Max 2/0
a)	Godtagbart ritat koordinatsystem med en linje genom punkterna (0, 2) och (4, 0)	+1 g
b)	Korrekt svar ($y = -0,5x + 2$)	+1 g
3.		Max 2/0
	Godtagbar metod	+1 g
	med korrekt svar ($x = 28$, $y = -14$)	+1 g
4.		Max 1/1
	Korrekt angiven sannolikhet för att Marcus får nummer 20, $\frac{1}{20}$	+1 g
	Godtagbar bestämning av sannolikheten för att Erik får nummer 20, $\frac{1}{20}$ med godtagbart svar (”Marcus har fel”)	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
5.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t.ex. utvecklar något av parentesuttrycken korrekt	+1 g
	med korrekt lösning med korrekt svar ($3x - 8$)	+1 g
6.		Max 0/1/2
	Godtagbart svar ("k får inte vara 2")	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att alla värden är möjliga utom 2 samt motivera detta med att linjerna inte får vara identiska (ha alla punkter gemensamma) och därför inte kan ha samma riktningskoefficient.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)



Kommentar: Eleven anger att $k = 2$ medför att linjerna är parallella men säger inte uttryckligen att detta i det här fallet innebär att linjerna är identiska.

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

Elevlösning 2 (1 vg och en MVG-kvalitet)

k kan anta alla värden utom 2 för då blir den lika som den andra funktionen och skär den då inte bara vid *y*-axeln

Kommentar: Eleven anger att $k = 2$ medför att linjernas ekvationer blir lika och att linjerna då är identiska. Elevens lösning visar därmed MVG-kvalitet även om motiveringen är något bristfällig.

7.

Max 0/3/α

- a) Godtagbar ansats, t.ex. inser att vinkeln QST är 90° +1 vg
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y = 56^\circ$) +1 vg
- b) Godtagbar lösning där vissa motiveringar kan saknas eller kan vara bristfälliga ($x = y$) +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa att $x = y$ med hänvisning till relevanta satser.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Obs! Poängsättningen gäller enbart b)-uppgiften.

Elevlösning 1 (1 vg och en MVG-kvalitet)

$$a) \quad V = 90 - 56 = 34^\circ$$

$$\angle M = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ \quad (\text{vinkelsumma})$$

$$2y = M \quad (\text{Randvinkelsatsen})$$

$$2y = 112$$

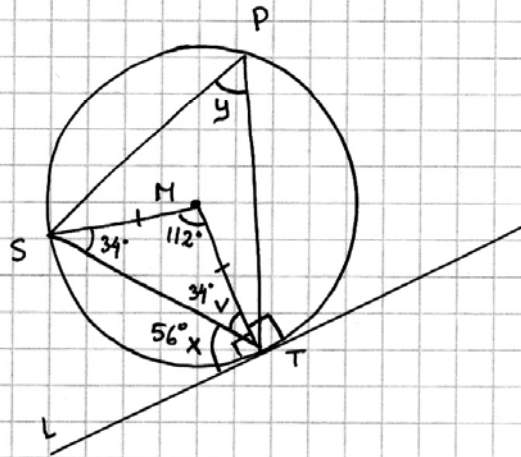
$$y = 56^\circ$$

$$b) \quad y = \frac{180 - 2(90 - x)}{2}$$

$$y = 90 - (90 - x)$$

$$y = 90 - 90 + x$$

$$y = x$$



Kommentar: Eleven hänvisar till relevanta satser i sin lösning. Detta sker delvis redan i a)-uppgiften och blir underförstått även gällande i lösningen till b)-uppgiften. Lösningen visar indirekt genom figuren att triangeln är likbent. Detta räcker för att lösningen ska visa MVG-kvalitet vad gäller bevis och resonemang. Lösningen visar inte MVG-kvalitet gällande redovisning och matematiskt språk då lösningen i b)-uppgiften saknar motiveringar för det inledande sambandet mellan x och y .

Obs! Poängsättningen gäller enbart b)-uppgiften.

Elevlösning 2 (1 vg och två MVG-kvaliteter)

a, Rät vinkel $= 90^\circ$ ger att basvinklarna i den likbenta triangeln SMT är $90^\circ - x^\circ$
 alltså $90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$
 Vinkelsumman i en triangel $= 180^\circ$
 De båda basvinklarna i $\Delta SMT = 34^\circ + 34^\circ = 68^\circ$
 Vilket ger att mittpunktsvinkeln blir
 $180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$
 RVS ger att om Mittpunktsvinkeln är 112°
 är vinkeln $y = \frac{112^\circ}{2} = 56^\circ$

b) Sambandet mellan Δx och Δy
 mittpunktsvinkeln $= \Delta m$

Vi har vinkeln x

basvinklarna blir $90 - x$

mittpunktsvinkeln $180 - 2(90 - x) =$

$$180 - 180 + 2x =$$

$$2x$$

$$\Delta m = 2x$$

RVS ger att:

$$\frac{\Delta m}{2} = y \quad y = \frac{2x}{2} = x; \text{ Svar } x = y$$

Kommentar: Eleven hänvisar till relevanta satser i sin lösning. Detta sker delvis redan i a)-uppgiften och blir underförstått även gällande i lösningen till b)-uppgiften. Sammantaget erhåller lösningen MVG-kvalitet för både bevis och resonemang samt för redovisning och matematiskt språk.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
8.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ett korrekt samband som bygger på likformighet	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (12,8 cm)	+1 g
9.		Max 3/0
a)	Godtagbar lösning med korrekt svar (250 innebandybollar)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t.ex. beräknar andelen bollar av dålig kvalitet	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (2200 bollar)	+1 g
10.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t.ex. tecknar uttrycket $1,2 \cdot 175 + 3$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ("Nej, den ligger inte på linjen.")	+1 g
11.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t.ex. använder topptriangelsatsen korrekt	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (12 m)	+1 g
12.		Max 0/3
a)	Godtagbar lösning med korrekt svar (0,25)	+1 vg
b)	Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer sannolikheten för att Petter vinner respektive att Ali vinner och summerar sannolikheterna för vinst för Elin, Petter och Ali	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,62)	+1 vg
13.		Max 0/3
	Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ett godtagbart ekvationssystem	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (8,5 kcal/min respektive 13 kcal/min)	+1-2 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
--------------	------------------------------	--------------

14.		Max 1/3/α
------------	--	------------------

- | | | |
|----|---|-------|
| a) | Korrekt svar (85) | +1 g |
| b) | Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $0 = a \cdot 200^2 + 85$ | +1 vg |
| | med godtagbar bestämning av konstanten a | +1 vg |
| | med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (500 m - 520 m) | +1 vg |

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda den generella modellen och bestämma avståndet mellan bropelarna korrekt (500 m).
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (3 vg)

Kurvan går igenom punkten $(200, 0)$

$$\Rightarrow 0 = (200)^2 a + 85$$

$$\Leftrightarrow 40000a = -85$$

$$\Leftrightarrow a = -0,002$$

andragradsfunktionen blir $y = -0,002x^2 + 85$

Om höjden mellan bron och vattenytan är 49m

dvs att $y = -49 \Leftrightarrow x = ?$

$$-49 = -0,002x^2 + 85$$

$$0,002x^2 = 134$$

$$x^2 = \frac{134}{0,002} = 67000$$

$$x = 258,844$$

Avståndet mellan bropelarna:

$$(258,844 \cdot 2) \text{ m} = 517,687 \text{ m}$$

Kommentar: I lösningen använder sig eleven av $a = -0,002$ och får därmed ett för långt avstånd mellan bropelarna. Sammantaget ger lösningen 3 vg-poäng.

Elevlösning 2 (3 vg och en MVG-kvalitet)

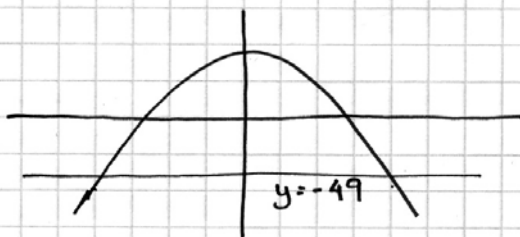
Punkten $(200, 0)$ insättes i

$$y = ax^2 + 85$$

$$0 = a \cdot 200^2 + 85$$

$$a = \frac{-17}{8000}$$

$$y = \frac{-17}{8000} \cdot x^2 + 85$$



Skärningspunkten mellan

$$y = -49 \text{ och } y = \frac{-17}{8000} \cdot x^2 + 85$$

lästes av till $(250, -49)$

Mellan y-axel och bro stolpen

är det alltså 250m och mellan

bro stolparna är det 500m

Kommentar: Eleven bestämmer avståndet mellan bropelarna korrekt och visar därmed den MVG-kvalitet som rör användning av generella metoder/modeller.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
15.		Max 1/2/α
a)	Godtagbar ansats, t.ex. visar förståelse för begreppet variationsbredd med någon korrekt indelning av sträckan (t.ex. 13,0; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5)	+1 g +1 vg
b)	Godtagbar ansats, t.ex. för ett resonemang som mynnar ut i att den ena intervallgränsen bestäms	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera problemet och dra slutsatsen att variationsbredden ligger i intervallet $0 \text{ cm} \leq \text{variationsbredden} < 15 \text{ cm}$.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

16.

Max 3/4/α

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Totalpoäng
	Lägre	—————▶		
<p>Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	<p>Eleven fyller i tabellen i huvudsak korrekt.</p> <p style="text-align: center;">1 g</p>	<p>Eleven fyller i tabellen i huvudsak korrekt och bestämmer hur långt bortom hindret bilen kommer (40 m).</p> <p style="text-align: center;">2 g</p>	<p>Eleven fyller i tabellen i huvudsak korrekt och bestämmer hur långt bortom hindret bilen kommer (40 m) och bestämmer hastigheten när hindret passeras (90 km/h) samt beräknar bilens hastighet efter 50 m vid några olika ursprungshastigheter eller påbörjar att teckna ett generellt samband mellan u och v.</p> <p style="text-align: center;">2 g och 1-2 vg</p>	2/2
<p>Matematisk resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i></p>	<p>Eleven ger någon godtagbar kommentar utifrån tabellen eller från egna beräkningar, t.ex. ”Om man kör 70 hinner man stanna men inte om man kör 90”.</p> <p style="text-align: center;">1 g</p>	<p>Eleven gör någon godtagbar analys av problemet i fjärde punkten t.ex. eleven inser att den del av stoppsträckan som är efter hindret motsvaras av $0,005v^2$, där v är hastigheten bilen har när den passerar hindret.</p> <p style="text-align: center;">1 vg</p>		1/1
<p>Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>			<p>Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt.</p> <p style="text-align: center;">1 vg</p>	0/1
Summa				3/4

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

* hastighet	reaktionssträcka	bromssträcka	stoppsträcka
70	18,9	24,5	43,4
90	24,3	40,5	64,8
110	29,7	60,5	90,2

* Stoppsträcka: 50 m Hastighet ? $s(u) = 50$

$$0,27u + 0,005u^2 = 50$$

$$0,27u + 0,005u^2 - 50 = 0$$

$$\frac{0,005u^2 + 0,27u - 50}{0,005} = 0$$

$$u^2 + 54u - 10000 = 0$$

$$u = -27 \pm \sqrt{729 + 10000}$$

$$u = -27 \pm 103,6$$

$$u_1 = -130,6 \text{ inte troligt}$$

$$u_2 = 76,6$$

Svar Det är inte realistiskt att köra i -131 km/h därför satte jag parentes runt minus-tecknet. Så den högsta hastigheten man bör köra i för att hinna stanna på 50 m är 76 km/h

* Stoppsträcken för 110 km/h: $0,27 \cdot 110 + 0,005 \cdot 110^2 = 90,2 \text{ m}$
Sträcka till hindret 50 m
differens: $90,2 - 50 = 40,2 \text{ m}$

Svar 40,2 m

* Eftersom foraren redan har bromser i när han passerar hindret blir det ju ingen reaktionssträcka

$$\frac{0,005u^2}{0,005} = \frac{40,2}{0,005}$$

$$u^2 = 8040 \quad u = \pm 89,7$$

Svar Han har hastigheten 89,7 km/h

* u = ursprungshastighet
 u = hastighet när bilen når fram

$$u = \sqrt{\frac{(0,27u + 0,005u^2) - 50}{0,005}}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/2	
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		3/4	

Kommentar: Eleven undersöker definitionsmängden genom att bestämma den högsta hastigheten en förare får ha för att hinna stanna. Dessutom finner eleven ett korrekt samband mellan u och v men härledning saknas. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt och elevens redovisning är välstrukturerad och tydlig, även om redovisningen av den sista punkten är obefintlig. Sammantaget bedöms lösningen visa MVG-kvaliteter gällande generella metoder, analys och slutsats samt nätt och jämnt gällande redovisning och matematiskt språk.

Elevlösning 4 (3 g och 4 vg och fyra av MVG-kvaliteterna)

Hast (km/h)	Reak (m)	Broms (m)	Stopp(m)
70	18,9	24,5	43,4
90	24,3	40,5	64,8
110	29,7	60,5	90,2

Kör man 70 km/h hinner man stanna

Kör man 90 km/h eller mer så hinner man inte stanna.

$$s = 0,27u + 0,005u^2$$

$$50 = 0,27u + 0,005u^2$$

$$0,005u^2 + 0,27u - 50 = 0$$

$$u^2 + 54u - 10000 = 0$$

$$u = -27 \pm \sqrt{27^2 + 10000}$$

$$u_1 = 76,5$$

($u_2 = \text{negativ}$)

Ska man hinna stanna innan hindret så ska man nog inte köra fortare än 76 km/h

$$110 \text{ km/h} \quad 90,2 \text{ m}$$

$$90,2 - 50 = 40,2 \text{ m}$$

Föraren kör 40,2 m förbi hindret

$$\text{Bromssträcka} = 0,005u^2$$

$$40,2 = 0,005u^2$$

$$u = \sqrt{\frac{40,2}{0,005}}$$

$$u = 89,7$$

Föraren kör 89,7 km/h förbi hindret

Formel för hastighet innan upptäckt
och hastighet 50m senare.

- $0,27v + 0,005v^2$ står för hur lång sträcka det behövs för att bromsa
- -50 står för de 50m tills man når fram till hindret

$$0,27v + 0,005v^2 - 50$$

- $0,005u^2$ står för den sträcka som är kvar att bromsa efter hindret

$$0,27v + 0,005v^2 - 50 = 0,005u^2$$

$$u = \sqrt{\frac{0,27v + 0,005v^2 - 50}{0,005}}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—————> X	2/2	
Matematiska resonemang	—————> X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	—————> X	0/1	
Summa		3/4	

Kommentar: Eleven undersöker definitionsmängden genom att bestämma den högsta hastigheten en förare får ha för att hinna stanna. Dessutom finner eleven ett korrekt samband mellan u och v samt förklarar och redovisar vad de olika delarna i sambandet står för. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Sammantaget visar elevens lösning de fyra MVG-kvaliteter som är möjliga att visa.

Mål för matematik kurs B

Kursplan 2000

Geometri (G)

G3. kunna förklara, bevisa och vid problemlösning använda några viktiga satser från klassisk geometri,

Statistik (S)

S2. kunna beräkna sannolikheter vid enkla slumpförsök och slumpförsök i flera steg samt kunna uppskatta sannolikheter genom att studera relativa frekvenser,

S3. med omdöme använda olika lägesmått för statistiska material och kunna förklara skillnaden mellan dem samt känna till och tolka några spridningsmått,

S4. kunna planera genomföra och rapportera en statistisk undersökning och i detta sammanhang kunna diskutera olika typer av fel samt värdera resultatet,

Algebra (A)

A3. kunna tolka förenkla och omforma uttryck av andra graden samt lösa andragradsekvationer och tillämpa kunskaperna vid problemlösning,

A4. kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former...

A5. ... lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder,

Funktionslära (F)

F2. kunna förklara vad som kännetecknar en funktion samt kunna ställa upp, tolka och använda några icke-linjära funktioner som modeller för verkliga förlopp och i samband därmed kunna arbeta både med och utan dator och grafritande hjälpmedel,

Övrigt (Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevers namn:	Uppgift (☒-märkt)					Övriga uppgifter
	6	7b	14b	15b	16	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	☒	☒		☒		
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		☒	☒			
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	☒		☒	☒		
Värderar och jämför metoder/modeller	☒	☒	☒	☒	☒	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	☒		☒	☒		

Elevers namn:	Uppgift (☒-märkt)					Övriga uppgifter
	6	7b	14b	15b	16	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	☒	☒		☒		
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		☒	☒			
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	☒		☒	☒		
Värderar och jämför metoder/modeller	☒	☒	☒	☒	☒	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	☒		☒	☒		

Elevers namn:	Uppgift (☒-märkt)					Övriga uppgifter
	6	7b	14b	15b	16	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	☒	☒		☒		
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		☒	☒			
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	☒		☒	☒		
Värderar och jämför metoder/modeller	☒	☒	☒	☒	☒	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	☒		☒	☒		

Insamling av provresultat för matematik kurs B

Vårerminen 2011 deltar alla skolor i resultatinsamlingen genom att skicka in resultat för ett litet urval elever. Denna insamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om vårens prov i slutet av augusti. Rapporten kommer att finnas tillgänglig på <http://www8.umu.se/edmeas/np/index.html>. Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

När du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 2:a, 13:e, 21:a och 27:e i varje månad**. Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 2:a i varje månad**.

1. Gå in på <http://www8.umu.se/edmeas/np/index.html> och klicka på rubriken **Resultatinsamling vt 2011** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **agna4es** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 2:a, 13:e, 21:a och 27:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 2:a i varje månad** till:

<p>Umeå universitet Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap Nationella prov Att. Monika Kriström 901 87 Umeå</p>
--

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av augusti måste vi ha alla resultat **senast 17 juni 2011**.

Förutom ovan nämnda resultatinsamling ska vissa skolor, de som ingår i Skolverkets urval, även lämna **uppgift om endast kurs- och provbetyg för alla elever** för varje undervisningsgrupp. Denna insamling sker via SCB:s hemsida. Separat information och anvisningar rörande denna insamling skickas direkt till de skolor som ingår i urvalet.

