Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av december 2012.

NATIONELLT KURSPROV I
MATEMATIK KURS C
HÖSTEN 2002

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 15 uppgifter. **Del I** består av 6 uppgifter och **Del II** av 9 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 44 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 13 poäng. Väl godkänd: 26 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänd: Kraven för Väl godkänd ska vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser ¤-uppgifterna.

Namn: _____ Skola: _____

Komvux/gymnasieprogram: _____

Del I

Denna del består av 6 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm $f'(x)$ då

a) $f(x) = 3x^3 + 4x$ *Endast svar fordras* (1/0)

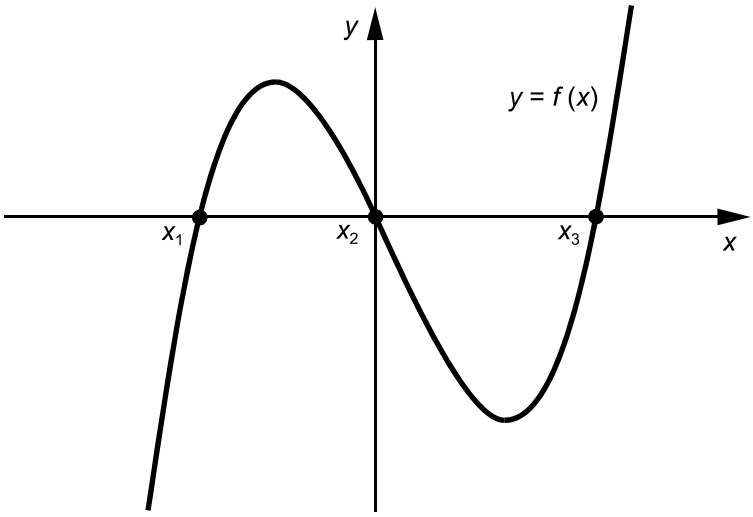
b) $f(x) = 5e^{4x}$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $f(x) = 10$ *Endast svar fordras* (1/0)

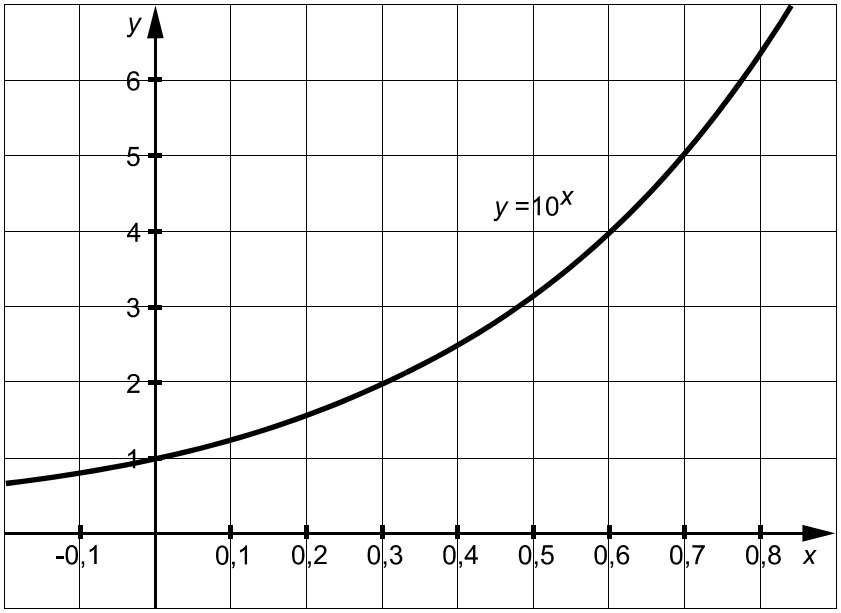
2. Beräkna $\lg 100 + \lg 10000$ *Endast svar fordras* (1/0)

3. Figuren nedan visar grafen till funktionen $y = x^3 - 2x^2 - 63x$ och dess nollställen x_1, x_2 och x_3

Bestäm x_1, x_2 och x_3 (3/0)



4.



Figuren ovan visar en del av grafen till funktionen $y = 10^x$

Lös följande uppgifter med hjälp av figuren.

a) Skriv talet 3 som en potens med basen 10 *Endast svar fordras* (1/0)

b) Ange ett närmevärde till $\lg 5$ *Endast svar fordras* (1/0)

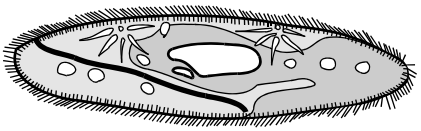
c) Bestäm ett närmevärde till potensen $10^{1,3}$
Redogör för hur du kom fram till ditt svar. (0/2)

5.

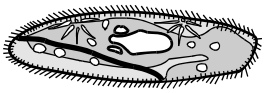
Bilden visar ett toffeldjur

År 1934 utförde den ryske biologen Georgyi Frantsevitch Gause ett experiment med två typer av toffeldjur: *Paramecium caudatum* och *Paramecium aurelia*. Han odlade de två typerna separat och fann följande samband:

$$f(t) = \frac{105}{1+34\mathrm{e}^{-1{,}1244t}} \quad (\textit{Paramecium caudatum})$$



$$g(t) = \frac{64}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}794t}} \quad (\textit{Paramecium aurelia})$$



där $f(t)$ och $g(t)$ är antalet toffeldjur i respektive odling och t är tiden i dagar från det att toffeldjuren började odlas.

a) Hur många *Paramecium caudatum* fanns i odlingen från början?
Endast svar fordras (1/0)

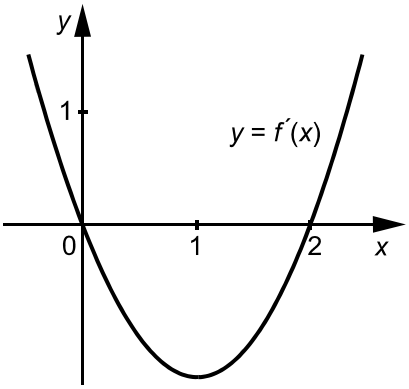
b) Formulera en fråga som du får svar på om du löser ekvationen $f(t) = g(t)$ (0/1)

c) Formulera en fråga som du får svar på om du löser ekvationen $f'(t) = g'(t)$ (0/1)

d) Vilket bestämt värde skulle antalet *Paramecium caudatum* ha närmat sig med tiden enligt sambandet ovan? Motivera ditt svar. (0/1)

6. I bilden visas grafen till **derivatan** $y = f'(x)$. Derivatan är ett polynom av andra graden.

Skissa några av graferna till de funktioner som har denna derivata i ett och samma koordinatsystem. Motivera varför dina grafer har detta utseende.



(0/2/¤)

Del II

Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

7. Beräkna summan av de 60 första termerna i en geometrisk summa där den första termen är 10 och den andra termen är 12 (2/0)

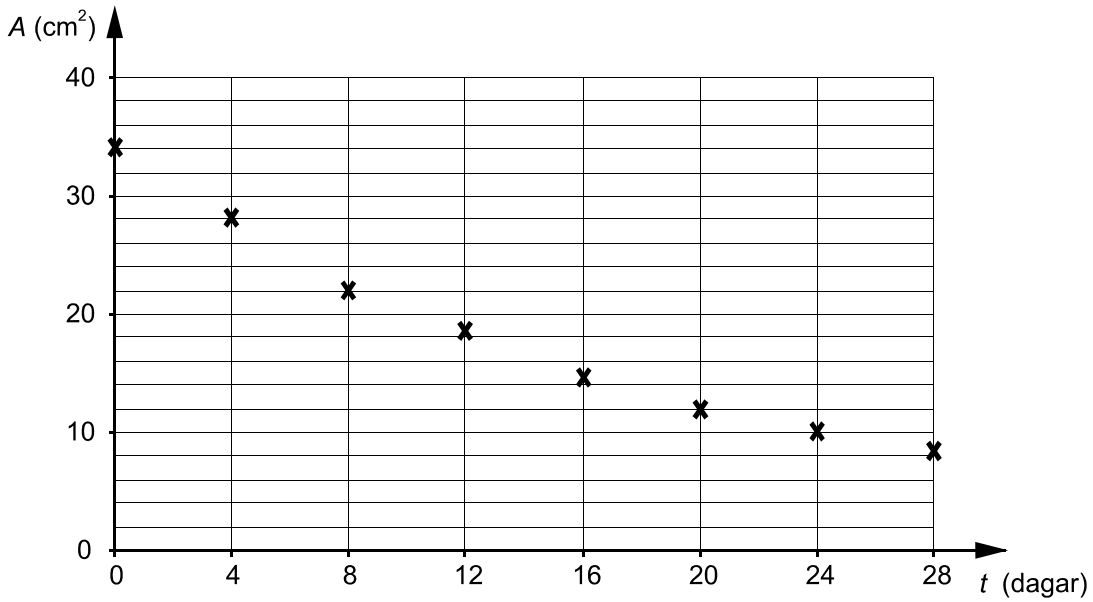
8. En idrottsforskare undersökte förhållandet mellan syreupptagningen S liter/minut och steglängden l centimeter för ett antal löpare som sprang med en viss hastighet. Forskaren fann följande samband:

$$S = 0{,}0009775 \cdot l^2 - 0{,}287385 \cdot l + 25{,}0653$$

där $133 \le l \le 170$

Visa med hjälp av derivata att syreupptagningen är som lägst vid steglängden 147 cm. (3/0)

9. För att avgöra hur snabbt en sårskada läkte mättes dess area kl. 12.00 var fjärde dag. Resultatet visas i diagrammet nedan.



a) Bestäm hur stor minskningen av sårets area var i genomsnitt per dag från kl. 12.00 dag 4 till kl. 12.00 dag 24. (1/0)

Om mätvärdena anpassas till en exponentialfunktion fås sambandet $A = 34 \cdot 0{,}95^t$ där A är arean i kvadratcentimeter och t är tiden i dagar.

b) Efter hur lång tid är arean hos sårskadan 3 cm^2 enligt detta samband? (2/0)

c) Efter hur lång tid minskar sårskadans area med 1 cm^2/dag? (0/3)

10.

För 190 år sedan bodde ungefär 32 000 personer i Norrbottens län. Idag bor det ungefär 254 000 personer där. Antag att ökningen har varit exponentiell under hela tidsperioden.

Beräkna den genomsnittliga årliga procentuella ökningen av antalet personer i Norrbottens län under denna tidsperiod. (0/2)

11. Bestäm den funktion $f(x) = kx^4$ (k är en konstant) för vilken det gäller att $f'(4) = 1$ (1/1)

12. Anna har löst ekvationen $\frac{3}{x-3} - \frac{x}{3} = \frac{x}{x-3}$ så här:

$$\frac{3}{x-3} - \frac{x}{3} = \frac{x}{x-3}$$

$$3 \cdot 3 - x(x-3) = 3x$$

$$9 - x^2 + 3x = 3x$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

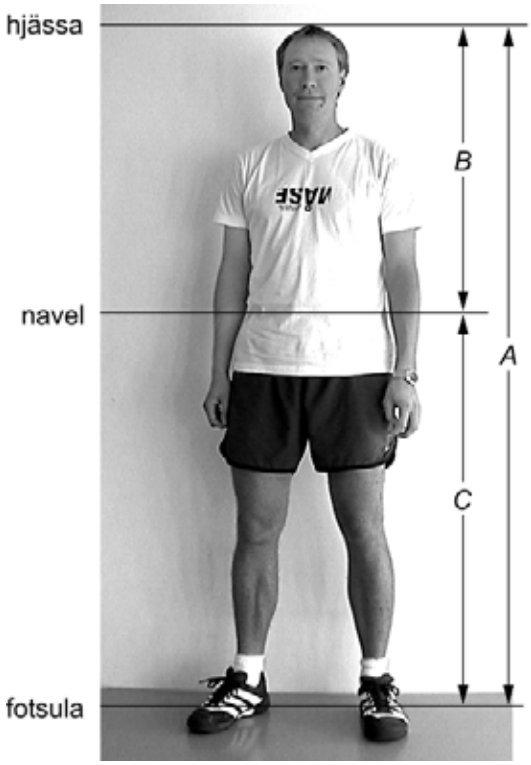
SVAR: $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$

Annas syster Kajsa säger att: ”Lösningen av ekvationen är rätt, men svaret är fel!”
Förklara på vilket sätt svaret är fel. (0/1)

13. Gyllene snittet är en delning av en sträcka i två delar som anses estetiskt tilltalande för ögat.

Det sägs att naveln delar vissa människokroppars längd enligt det gyllene snittet. Om en människokropp uppfyller principen för det gyllene snittet ska följande samband gälla: $\frac{B}{C} = \frac{C}{A}$

där A är hela kroppens längd, B är avståndet mellan hjässa och navel och C är avståndet mellan navel och fotsula, se figur.

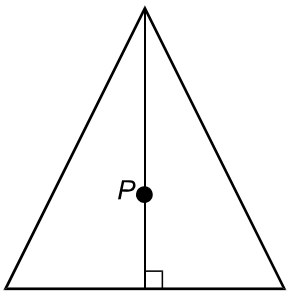


I bilden ovan visas Magnus som är 180 cm lång. Beräkna avståndet mellan hans navel och fotsula i centimeter förutsatt att han är byggd enligt principen för det gyllene snittet. (0/2)

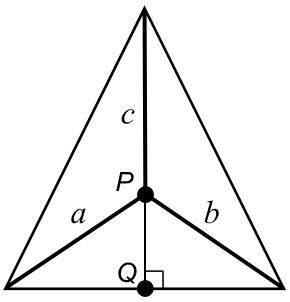
14. Om $f(x) = Ax^2$ (A är en konstant) så gäller att $f'(x) = 2Ax$
Visa detta med hjälp av derivatans definition. (0/2/¤)

Vid bedömning av ditt arbete med uppgift 15 kommer läraren att ta hänsyn till:
- Hur väl du genomför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur systematisk du är i din undersökning
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du använder matematiska ord och symboler
- Hur väl du redovisar ditt arbete

15.

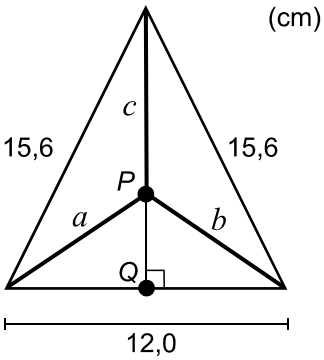


Figur 1



Figur 2

Figur 1 visar en likbent triangel. Punkten P ligger på en av triangelns höjder. Avstånden mellan punkten P och triangelns hörn har längderna a, b och c, se figur 2. Punkten Q ligger mitt på triangelns bas.



Figur 3

I följande uppgift ska du studera figur 3.

- Låt avståndet PQ vara 8,0 cm. Beräkna längden a.

- Låt avståndet PQ vara 8,0 cm. Beräkna värdet av summan på kvadraterna av längderna a, b och c, dvs $a^2 + b^2 + c^2$.

- Undersök och beskriv så fullständigt och utförligt som möjligt hur värdet av summan $a^2 + b^2 + c^2$ beror av avståndet PQ.
  Formulera sedan, baserat på din undersökning, några *olika* slutsatser angående hur summans värde beror av avståndet PQ. (3/4/¤)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 och 8 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 7, 8, 9, 10, 13 och 15 som avser indikera elevens kunskaper i bl a modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 5, 6, 8, 12, 14 och 15. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 5, 6, 9, 10, 13 och 15 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 6, 9, 10 och 15 som alla har en högre grad av öppenhet, medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik ht 2002 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde												Betygskriterium															
Upp-	**g**	**vg**	¤																							Mycket väl					
gift	po-	po-		Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						godkänd				
nr	äng	äng		1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1a	1	0									x				x		x												
1b	1	0									x				x		x												
1c	1	0									x				x		x												
2	1	0				x									x														
3	3	0							x	x							x	x											
4a	1	0				x									x		x												
4b	1	0				x									x														
4c	0	2				x													x		x		x						
5a	1	0				x	x		x						x		x												
5b	0	1		x	x		x												x		x		x						
5c	0	1					x				x								x		x		x						
5d	0	1				x	x		x										x	x	x	x	x						
6	0	2	¤						x		x	x	x						x	x	x	x	x		x			x	
7	2	0					x								x		x												
8	3	0					x				x	x	x			x	x	x											
9a	1	0									x				x		x												
9b	2	0				x	x								x		x												
9c	0	3				x	x				x	x	x						x		x	x	x						
10	0	2				x	x												x		x	x	x						
11	1	1									x	x			x		x		x		x	x	x						
12	0	1								x									x	x	x	x							
13	0	2							x										x		x	x	x						
14	0	2	¤								x	x		x					x	x	x	x	x		x		x		
15	3	4	¤	x	x	x	x	x	x		x	x	x		x	x	x		x	x	x	x	x		x	x		x	
Σ	22	22		2/1		9/4		3/6			8/11																		

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	13 poäng.
Väl godkänd:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd	26 poäng varav minst 14 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i minst två* av ¤-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)
   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp
   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]
   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg
   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av december 2012.

Bedömningsanvisningar (MaC ht 2002)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		**Max 3/0**
a)	Korrekt svar $\left(f'(x) = 9x^2 + 4\right)$	+1 g
b)	Korrekt svar $\left(f'(x) = 20\mathrm{e}^{4x}\right)$	+1 g
c)	Korrekt svar $\left(f'(x) = 0\right)$	+1 g
2.		**Max 1/0**
	Korrekt svar (6)	+1 g
3.		**Max 3/0**
	Godtagbar ansats, t.ex. tecknat ekvationen $x^3 - 2x^2 - 63x = 0$	+1 g
	med godtagbar bestämning av nollställena $\left(x_1 = -7\ ,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9\right)$	+1-2 g
4.		**Max 2/2**
a)	Godtagbart svar $\left(10^{0,48}\right)$	+1 g
b)	Godtagbart svar $\left(0,7\right)$	+1 g
c)	Godtagbar ansats, t.ex. tecknat $10^{1,3} = 10^1 \cdot 10^{0,3}$	+1 vg
	med godtagbart svar (20)	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

5. **Max 1/3**

Om eleven behandlat *Paramecium Aurelia* istället för *Paramecium Caudatum* i fråga a) och/eller d) och gjort detta korrekt ges full poäng.

a) Godtagbart svar $\left(\frac{105}{35}\right)$ +1 g

b) Godtagbart formulerad fråga (”Vid vilken tidpunkt finns det lika många toffeldjur i de två odlingarna?”) +1 vg

c) Godtagbart formulerad fråga (”Vid vilken tidpunkt är tillväxthastigheten hos toffeldjuren lika stor i de två odlingarna?”) +1 vg

d) Korrekt svar (105) med en godtagbar motivering +1 vg

6. **Max 0/2/¤**

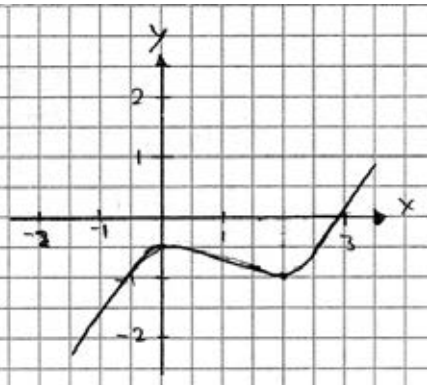
En godtagbar beskrivning innehåller:

- en godtagbar redogörelse för varför grafen till funktionen $f(x)$ har en maximipunkt där $x = 0$ och en minimipunkt där $x = 2$
- en godtagbar skiss av minst en möjlig kurva
- en godtagbar redogörelse för varför de tänkbara graferna ser likadana ut men är förskjutna i y-led

Beskrivningen innehåller en av ovanstående punkter. +1 vg
Beskrivningen innehåller ytterligare en av ovanstående punkter. +1 vg

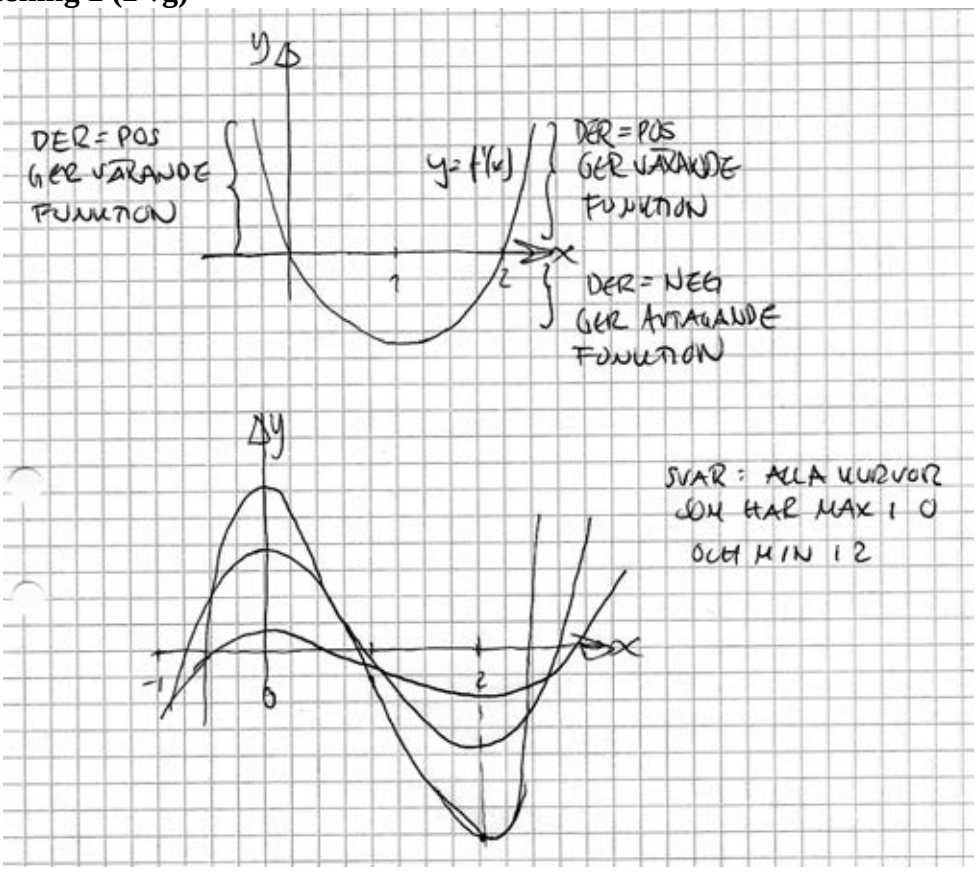
Beskrivningen innehåller alla tre punkterna Redovisningen är tydlig och lätt att följa. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Elevlösning 1 (1 vg)

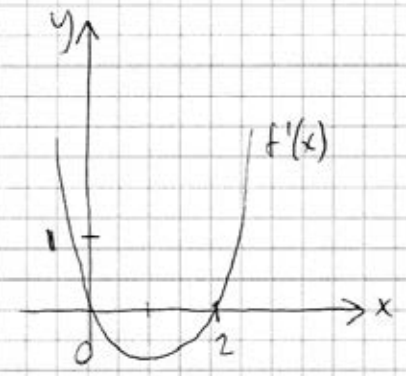


Den har sina max och min punkter vid 0 och 2. Då x=0 har funktionen sitt max värde och då x=2 har funktionen sitt min värde. Det kan man säga för att derivatan till funktionen skär x-axeln där funktionen har sina max och min värde.

Elevlösning 2 (2 vg)



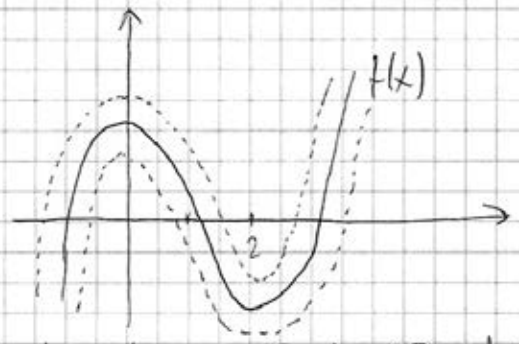
Elevlösning 3 (2 vg och ¤)



Teckenschema som här till:

x	−1	0	1	2	3
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗ MAX		↘	MIN	↗

f(x) har en maxpunkt då x=0 och en minpunkt då x=2



f'(x) är av andra graden. Då är f(x) av tredje graden:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

a, b och c är bestämda och skulle gå att bestämma ur grafen till f'(x)

När man derivera försvinner konstanten d (som kunde ha varit vad som helst)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ha alltså samma värde oavsett vad d var.

Alla grafena måste alltså ha samma derivata i varje x. Eftersom d styr hur högt upp eller långt ner kurvorna ligger så kan det variera däremot.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

Del II

7. **Max 2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. korrekt bestämning av kvoten, $k = 1{,}2$	+1 g
med godtagbart svar (2817326)	+1 g

8. **Max 3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. korrekt bestämd derivata, $S'(l) = 0{,}001955l - 0{,}287385$	+1 g
med godtagbar redovisning av att $S'(147) = 0$	+1 g
med godtagbar verifiering av minimum	+1 g

9. **Max 3/3**

a)	Redovisad godtagbar lösning (0,9 cm^2/dag)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t.ex. tecknat ekvationen $34 \cdot 0{,}95^t = 3$	+1 g
	med godtagbart svar (47 dagar)	+1 g
c)	Insett att $A'(t) = -1$	+1 vg
	Godtagbar algebraisk eller grafisk metod för bestämning av tidpunkten	+1 vg
	med godtagbart svar (11 dagar)	+1 vg

10. **Max 0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknat ekvationen $32000 \cdot x^{190} = 254000$	+1 vg
med godtagbart svar (1,1 %)	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
11.		**Max 1/1**
	Korrekt derivering, $f'(x) = 4kx^3$	+1 g
	med godtagbar bestämning av funktionen $\left(f(x) = \frac{x^4}{256} \right)$	+1 vg
12.		**Max 0/1**
	Godtagbar förklaring (” $x = 3$ ger noll i nämnaren och det går inte.”)	+1 vg
13.		**Max 0/2**
	Godtagbart uppställd ekvation, t.ex $\frac{180 - x}{x} = \frac{x}{180}$	+1 vg
	med godtagbar lösning av ekvationen ($x \approx 111$ cm)	+1 vg
14.		**Max 0/2/¤**
	Korrekt tecknad ändringskvot $\frac{A(x+h)^2 - Ax^2}{h}$	+1 vg
	med godtagbart slutfört bevis	+1 vg
	Eleven löser uppgiften korrekt och använder ett lämpligt och i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen är tydlig och lätt att följa och förstå.	¤

Elevlösning 1 (1 vg)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{A(a+h)^2 - Aa^2}{h} =$$

$$\frac{A(a^2 + 2ah + h^2) - Aa^2}{h} = \frac{Aa^2 + 2ahA + Ah^2 - Aa^2}{h} =$$

$$2aA + Ah$$

Elevlösning 2 (2 vg)

$f(x)=Ax^2$ A är konstant gäller $f(x)=2Ax$

$$f(x) \underset{h\to 0}{\lim} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\lim}{\underset{h\to 0}{=}} \frac{A(x+h)^2-(Ax^2)}{h} = \underset{h\to 0}{\lim}$$

$$\underset{h\to 0}{\lim} = \frac{A(x^2+2xh+h^2)-Ax^2}{h} \overset{\lim}{\underset{h\to 0}{=}} \frac{2Axh+Ah^2}{h} = \underset{h\to 0}{\lim}$$

$$\underset{h\to 0}{\lim} \frac{h(2Ax+Ah)}{h} = \underset{h\to 0}{\lim} 2Ax+Ah \overset{\lim}{\underset{h\to 0}{=}} 2Ax + A\cdot 0 = \underset{h\to 0}{\lim}$$

$$=2Ax$$

Kommentar: Eleven behandlar algebran korrekt men vissa språkliga brister framträder. Eleven använder $f(x)$ i stället för $f'(x)$, $\lim\limits_{h\to 0}$ är felplacerat samt gränsvärdesbestämningen är språkligt felaktig.

Elevlösning 3 (2 vg och ¤)

$f(x)=Ax^2 \qquad f'(x)=2Ax$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{A(x+h)^2-Ax^2}{h} =$$

$$\frac{A(x^2+2xh+h^2)-Ax^2}{h} = \frac{A2xh+Ah^2}{h}$$

$$= A2x + Ah = 2Ax + Ah$$

$2Ax + Ah \to 2Ax$ då $h \to 0$

dvs. $f'(x)=2Ax$ om $f(x)=Ax^2$

Uppg. Bedömningsanvisningar Poäng

15. **Max 3/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

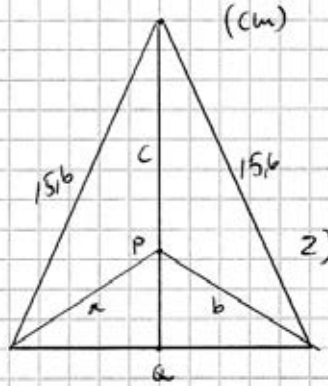
Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** → **Högre**			**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet*	Eleven beräknar godtagbart längden a (10 cm). **1/0**	Eleven beräknar godtagbart summans värde för ett specialfall (då $PQ = 8{,}0$ cm är summan 241) eller några specialfall. **2/0**	Eleven tecknar ett korrekt algebraiskt uttryck som visar hur summan beror av avståndet PQ. **2/1**	**2/1**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang*	Eleven formulerar *minst en enkel* relevant godtagbar slutsats, se nedan, vilken baseras på en enkel eller systematisk undersökning eller det algebraiska uttrycket. **1/0**	Eleven formulerar *en* godtagbar relevant slutsats, se nedan, vilken baseras på en *systematisk* undersökning eller det algebraiska uttrycket. **1/1**	Eleven formulerar *minst två* godtagbara relevanta slutsatser, se nedan, vilka baseras på en *systematisk* undersökning eller det algebraiska uttrycket. **1/2**	**1/2**
	• Exempel på enkla godtagbara slutsatser: ”Summan blir större om $PQ = 3$ cm än om $PQ = 5$ cm” ”Om PQ dubblas (från 5 cm till 10 cm) ökar summans värde” • Exempel på godtagbara slutsatser: ”Summan har sitt minsta värde $210{,}24\ \text{cm}^2$ då $PQ = 4{,}8$ cm” ”Summan har sitt största värde $486{,}72\ \text{cm}^2$ då $PQ = 14{,}4$ cm			
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. **0/1**		**0/1**
Summa				**3/4**

Eleven tecknar ett korrekt algebraiskt uttryck för summan. Eleven formulerar och verifierar minst två slutsatser. Slutsatserna är av sådan art att en algebraisk eller grafisk behandling på räknaren av uttrycket är lämpligast för att stödja slutsatserna. Redovisningen är välstrukturerad, fullständig och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

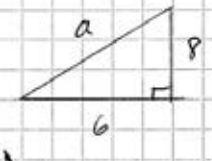
Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 15

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

1)



PQ = 8,0 cm

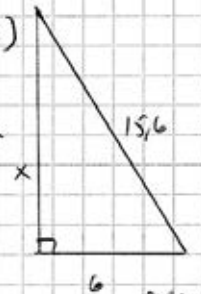


pyt sats

$a^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$a = 10$ cm

2)



$a^2 = b^2 = 100$

$x = \sqrt{6^2 + 15{,}6^2} = 16{,}714$ cm

$c = x - 8 = 16{,}714 - 8 = 8{,}714$ cm

$c^2 = 75{,}93$

summan $a^2 + b^2 + c^2 =$

$100 + 100 + 75{,}93 = 275{,}9$

3) PQ = 3,5 cm ger

$a^2 = 6^2 + 3{,}5^2 = 48{,}3$

$x = \sqrt{15{,}6^2 + 6^2} = 16{,}714$

$c = x - 3{,}5 = 13{,}214$

$c^2 = 174{,}61$

Summan: $a^2 + b^2 + c^2 =$

$48{,}3 + 48{,}3 + 174{,}6 = 271{,}2$

PQ = 6,5 cm ger

$a^2 = 6^2 + 6{,}5^2 = 78{,}25$

$b^2 = a^2$

$x = 16{,}714$

$c = x - 6{,}5 = 10{,}214$

$c^2 = 104{,}33$

Summan $a^2 + b^2 + c^2 =$

$78{,}25 + 78{,}25 + 104{,}33 = 261$

PQ	Summa
3	278
3,5	271,2
4	265,6
5	260
6	258,8
6,5	261
7	264,4
8	276
10	275,9

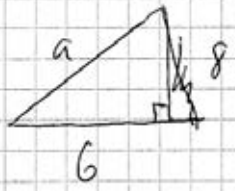
Slutsats: summan värde avgörs mest av c^2:s värde

Desto större c^2 desto större summa.

Bedömning

Kvalitativa nivåer					Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X			1/0	Orimlig höjd
Matematiska resonemang					0/0	Slutsatserna är ej kopplade mot PQ.
Redovisning och matematiskt språk			X		0/1	
Summa					**1/1**	

Elevlösning 2 (3 g och 1 vg)

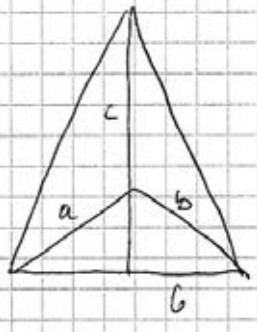


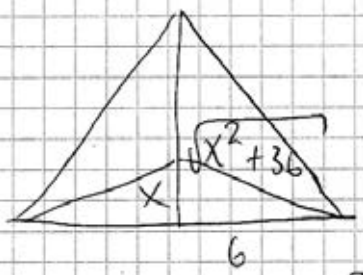
$a^2 = 100$

$a = 10$

$c = 14{,}4 - 8\text{ cm} = 6{,}4$

$a^2 + b^2 + c^2 = 200 + 6{,}4^2 = 241$





Summan =

$2(x^2+36) + (14{,}4-x)^2$

Summan $= 2x^2 + 72 + 207{,}36 + x^2 - 28{,}8x$

$3x^2 - 28{,}8x + 279{,}36$

$x = 6$ summan $= 214{,}6$

$x = 12$ – " – $= 366$

$x = 8$ – " – $= 241$

ju större värde på x desto större värde på summan

Bedömning

Kvalitativa nivåer					Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				X	2/1	
Matematiska resonemang		X			1/0	Utnyttjar inte potentialen i det generella uttrycket, utan ger en enkel godtagbar slutsats baserad på specialfall.
Redovisning och matematiskt språk					0/0	Svårt att följa p.g.a. bristande redovisning.
Summa					**3/1**	

Elevlösning 3 (3 g och 3 vg)

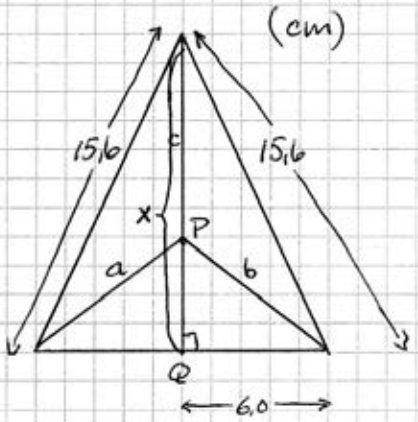
Bestäm a om PQ = 8,0cm

Pythagoras sats ger

$6{,}0^2 + 8{,}0^2 = a^2$

$a = 10$

$\boxed{a = 10 \text{ cm}}$



Bestäm $a^2+b^2+c^2$ om PQ = 8,0cm

Pythagoras sats ger

$a^2 = 6{,}0^2 + 8{,}0^2 = 100$

$b^2 = 6{,}0^2 + 8{,}0^2 = 100$

$x^2 + 6{,}0^2 = 15{,}6^2$

$x^2 = 15{,}6^2 - 6{,}0^2$

$x = 14{,}4$

$c = (14{,}4 - 8{,}0)\text{cm} = 6{,}4\text{cm}$ ger $c^2 = 40{,}96$

Summan $a^2 + b^2 + c^2$ ger $100 + 100 + 40{,}96 = 240{,}96$

$\boxed{\text{Summan} = 240{,}96}$

PQ = 5,0 cm ger $c = (14{,}4 - 5{,}0)\text{cm} = 9{,}4$ cm ger $c^2 = 88{,}36$

$a^2 = 6{,}0^2 + 5{,}0^2 = 61$

$b^2 = 6{,}0^2 + 5{,}0^2 = 61$

Summan $a^2 + b^2 + c^2$ ger $61 + 61 + 88{,}36 = \underline{210{,}36}$

PQ = 7,0 cm ger $c = (14{,}4 - 7{,}0)\text{cm} = 7{,}4$cm ger $c^2 = 54{,}76$

$a^2 = b^2$

$a^2 = 6{,}0^2 + 7{,}0^2 = 85$

$a^2 + b^2 + c^2 = 85 + 85 + 54{,}76 = \underline{224{,}76}$

PQ = 9,0 cm ger

$c = (14{,}4 - 9{,}0)\,cm = 5{,}4\,cm$ ger $c^2 = 29{,}16$

Pythagoras sats ger

$a^2 = 6{,}0^2 + 9{,}0^2 = 117$

$a^2 + b^2 + c^2 = 117 + 117 + 29{,}16 = \underline{263{,}16}$

Slutsats: Ju längre sträckan PQ är, desto större blir summan av $a^2 + b^2 + c^2$

För att kontrollera om denna slutsats verkligen stämmer, kommer jag att undersöka några fler fall.

PQ = 1,0 cm ger $c = 13{,}4$ cm

$a^2 = 6{,}0^2 + 1{,}0^2 = 37$

Summan av $a^2 + b^2 + c^2$ blir då $37 + 37 + 179{,}56 = \underline{253{,}56}$

Detta tyder på att mina tidigare slutsatser inte var korrekta

PQ = 2,0 cm ger $c = 12{,}4$ cm $\Rightarrow c^2 = 153{,}76$

$a^2 = 6{,}0^2 + 2{,}0^2 = 40$

$a^2 + b^2 + c^2$ ger $40 + 40 + 153{,}76 = \underline{233{,}76}$

Om PQ = 3,0 cm ger $c = 11{,}4$ cm $\Rightarrow c^2 = 129{,}96$

$a^2 = 6{,}0^2 + 3{,}0^2 = 45$

$a^2 + b^2 + c^2$ ger $45 + 45 + 129{,}96 = \underline{219{,}96}$

Om PQ = 0 cm ger $c = 14{,}4$ cm $\Rightarrow c^2 = 207{,}36$

$a^2 = 6{,}0^2 + 0^2 = 36$

$a^2 + b^2 + c^2$ ger $36 + 36 + 207{,}36 = \underline{279{,}36}$

Om PQ = 14,4 cm ger $c = 0 \rightarrow c^2 = 0$

$a^2 = 15{,}6^2 = b^2 = 243{,}36$

$a^2 + b^2 + c^2$ ger $243{,}36 + 243{,}36 + 0 = \underline{486{,}72}$

Sammanställning av data:

PQ	0	1	2	3	5	7	8	9	14,4
$a^2+b^2+c^2$	279	254	234	220	210	225	241	263	487

Detta visar att minsta summan erhålls när

$3{,}0 < PQ < 7{,}0$

Jag tittar därför lite närmare på värden inom detta intervall

Om PQ = 4,0 cm ger $c = 10{,}4 \Rightarrow c^2 = 108{,}16$

$a^2 = 6{,}0^2 + 4{,}0^2 = 52$

$a^2 + b^2 + c^2 = 52 + 52 + 108{,}16 = \underline{212{,}16}$

Om PQ = 6,0 cm ger $c = 8{,}4$ cm $\Rightarrow c^2 = 70{,}56$

$a^2 = 6{,}0^2 + 6{,}0^2 = 72$

$a^2 + b^2 + c^2 = 72 + 72 + 70{,}56 = \underline{214{,}56}$

Minsta summan är 210 när PQ = 5,0 cm

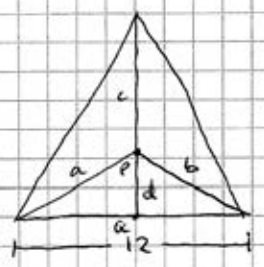
Största summan är 487 när PQ = 14,4 cm

Bedömning

Kvalitativa nivåer					Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			X		2/0	
Matematiska resonemang				X	1/2	Två godtagbara slutsatser som baseras på en systematisk undersökning: undersöker gränsfallen och snävar in intervallet.
Redovisning och matematiskt språk				X	0/1	
Summa					**3/3**	

Elevlösning 4 (3 g och 4 vg och ¤)

Avståndet mellan punkt Q är 8,0cm



$a = b = 6{,}0\text{cm}$

Pyt. sats ger $a^2 = 8{,}0^2 + 6{,}0^2$

$a = \pm\sqrt{100}$

$a_1 = 10$

Sidan finns ju! $(a_2 = -10)$

Svar: $a = 10\text{cm}$

Anta att avståndet mellan punkt Q är dcm

Pyt. sats ger:

$6{,}0^2 + (c+d)^2 = 15{,}6^2$

$c^2 + 2cd + d^2 = 15{,}6^2 - 36^2$

$c^2 + 16c + 64 = 207{,}36$ $\quad (d = 8{,}0\text{cm})$

$c^2 + 16c - 143{,}36 = 0$

$c = -\frac{16}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{2}\right)^2 + 143{,}16}$ $\quad c_1 = 6{,}4$ $\quad (c_2 = -22{,}24)$

$a^2 = b^2 = 8{,}0^2 + 6{,}0^2 = 100$

$a^2 + b^2 + c^2 = 100 + 100 + 6{,}4^2 = \underline{240{,}96\ \text{cm}^2}$: Svar

---

$a^2 = b^2 = 6{,}0^2 + d^2 = 36{,}0 + d^2$

$(c+d)^2 + 6{,}0^2 = 15{,}6^2$

$(c+d)^2 = 207{,}36$

$c + d = 14{,}4 \Rightarrow c = 14{,}4 - d$ och $c^2 = (14{,}4 - d)^2$

$a^2 + b^2 + c^2 = 36 + d^2 + 36 + d^2 + 14{,}4^2 + d^2 - 28{,}8d$

$= 3d^2 - 28{,}8d + 279{,}36$

dess summan av $a^2 + b^2 + c^2$ da sträckan PQ antas vara dcm är $\underline{\underline{(3d^2 - 28{,}8d + 279{,}36)}}\ \text{cm}^2$

Slutbakes:

$a^2+b^2+c^2$ antas vara y cm^2

$y = 3d^2 - 28{,}8d + 279{,}36$

$y' = 6d - 28{,}8$

$y' = 0$ ger funktionen y:s extrempunkter

$6d - 28{,}8 = 0$

$d = 4{,}8$

$y_{min} = 210{,}24$

y	↘		↗
y'	$-$	0	$+$
d		$4{,}8$ ← minpunkt	

Det minsta värdet summan av $a^2+b^2+c^2$ antar är $210{,}24$ cm^2.

Maxvärdet av summan av $a^2+b^2+c^2$ är antingen $6{,}0^2+6{,}0^2+(14{,}4-0)^2$ eller $15{,}6^2+15{,}6^2+0^2$.

Prövning ger att det största värdet fås då punkten P sammanfaller med den "stora" triangelns topp. Det är då $15{,}6^2+15{,}6^2+0^2 = 486{,}72$ cm^2

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \text{ cm} \le d \le 14{,}4 \text{ cm} \\ 210{,}24 \text{ cm}^2 \le y \le 486{,}72 \text{ cm}^2 \end{array}}$$

Bedömning

Kvalitativa nivåer					Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				X →	2/1	Skrivfel i beräkning: 36^2
Matematiska resonemang				X →	1/2	Relevanta slutsatser (största och minsta värde) baserade på behandling av det generella uttrycket
Redovisning och matematiskt språk				X →	0/1	
Summa					**3/4/¤**	

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)
R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)
A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)
D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

Kvalitativa nivåer				Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

Kvalitativa nivåer				Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

Kvalitativa nivåer				Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

Kvalitativa nivåer				Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språ					
Summa					

Kvalitativa nivåer				Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					