

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av december 2013.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS C HÖSTEN 2003

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E". <i>Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.</i> Del II: Miniräknare och "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E".
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. <i>Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.</i>
Provet	Provet består av totalt 16 uppgifter. Del I består av 8 uppgifter och Del II av 8 uppgifter. Till några uppgifter (där det står <i>Endast svar fordras</i>) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 43 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med α , vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 12 poäng. Väl godkänd: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänd: 25 poäng varav minst 14 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat <i>MVG-kvaliteter i minst en av α-uppgifterna.</i>

Namn: _____ Skola: _____

Komvux/gymnasieprogram: _____

Del I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.

Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = 15$ *Endast svar fordras* (1/0)

2. Lös ekvationerna. Svara exakt.

a) $x^3 = 10$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $10^x = 3$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $3^x = 10$ *Endast svar fordras* (1/0)

3. Lös ekvationen $x^3 - 16x = 0$ (2/0)

4.



Nyfödda barn förlorar normalt i vikt de första dygnet innan vikten ökar igen. För att kunna undersöka om barnen följer den normala viktutvecklingen har man på ett sjukhus samlat in uppgifter om nyfödda barns viktutveckling och ställt upp funktionen:

$$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$$

där V är medelvikten i gram och t är tiden i dygn efter födseln. Sambandet gäller under de första 6 dygnet efter födseln.

Visa att funktionen som beskriver medelvikten har ett lokalt minimum då $t = 3$. (3/0)

5. Ge exempel på ett rationellt uttryck som inte är definierat för $x = 5$

Endast svar fordras

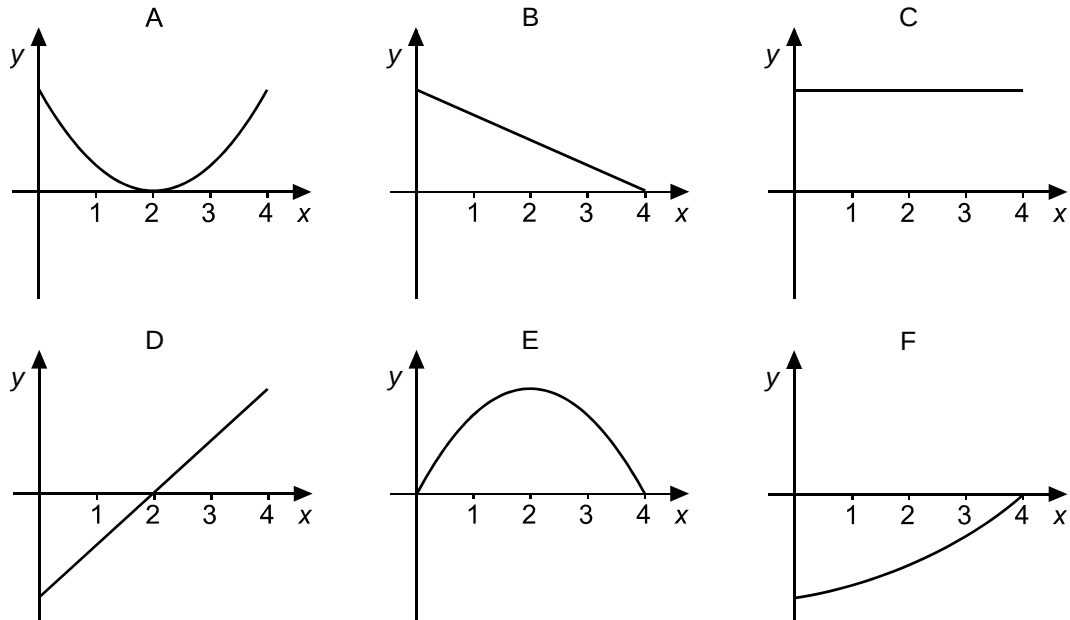
(1/0)

6. För funktionen $y = f(x)$ gäller att $f'(x) > 0$ för $0 < x < 4$.

Vilka av graferna nedan kan vara grafen till funktionen $y = f(x)$?

Endast svar fordras

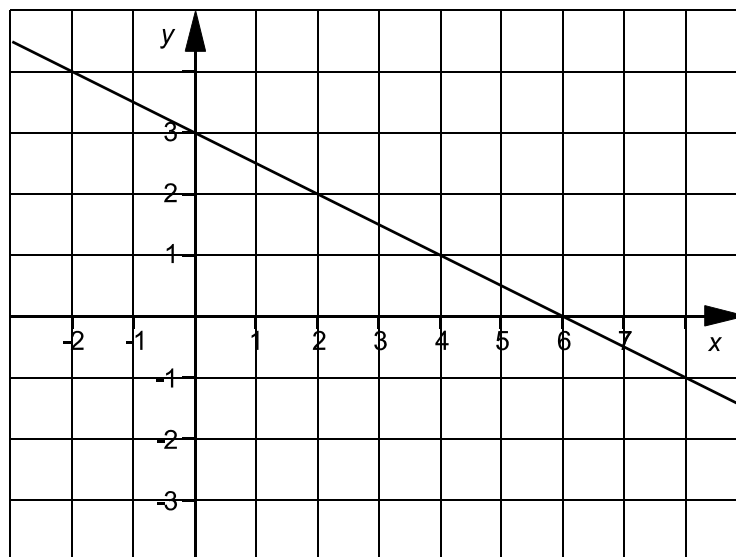
(0/1)



7. I figuren nedan visas grafen till en linjär funktion $y = f(x)$.

För vilket värde på x gäller att $f(x) = f'(x)$?

(0/2)



8. Visa med hjälp av derivatans definition att derivatan till *varje* funktion av andra graden är en funktion av första graden.

(0/3/∞)

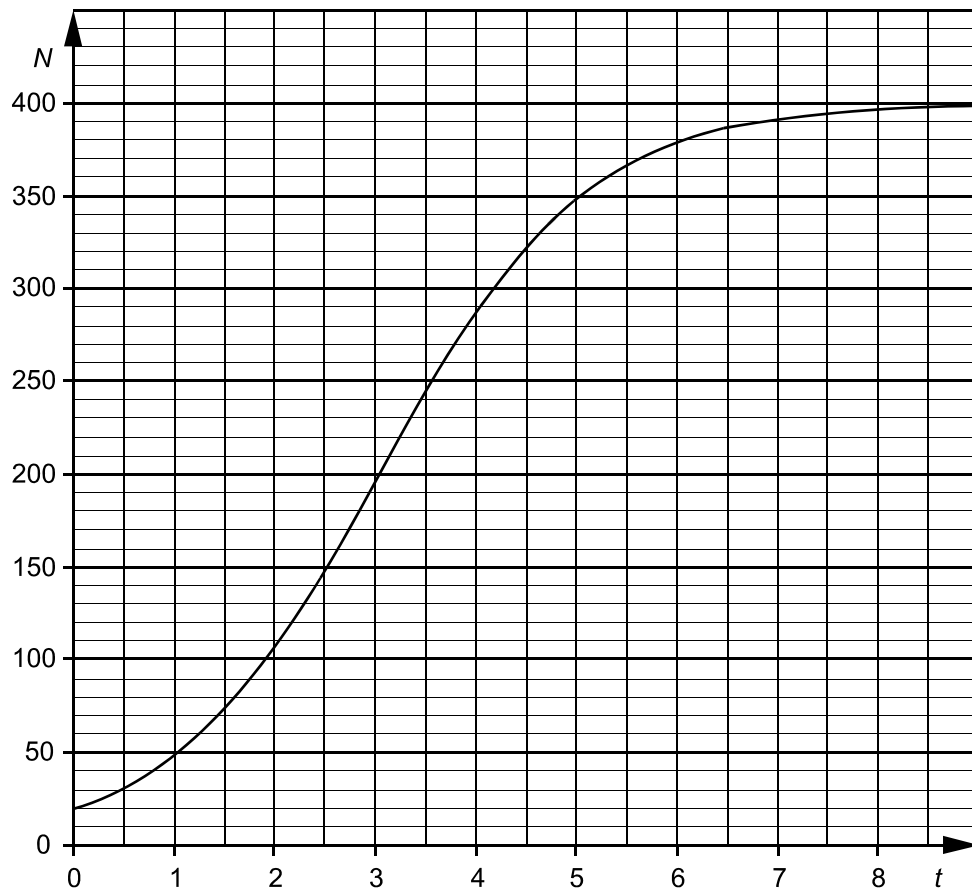
Del II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Värdet av en bil avtar med tiden enligt sambandet $V(t) = 260\,000 \cdot e^{-0,22 \cdot t}$ där V är värdet i kronor och t är tiden i år räknat från inköpstillfället.

- a) Beräkna bilens värde då $t = 3$ (1/0)
- b) Beräkna den hastighet med vilken bilens värde minskar då $t = 3$ (2/0)

10. Grafen visar hur antalet jästceller N i en odling beror av tiden t timmar räknat från försökets början.



- a) Uppskatta hur lång tid efter försökets början som tillväxthastigheten i odlingen är störst? *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Beräkna tillväxthastigheten då den är störst. (1/0)

11. Att äga en bostadsrätt innebär att man är delägare i hus och mark. Bostadsrättens läge kan vara avgörande för hur värdet utvecklas. I följande två fall kan du anta att värdeökningen är exponentiell.

- a) David köpte en bostadsrätt i Åkersberga för 112 000 kr. Fem år senare sålde han den för 345 000 kr.

Vilken genomsnittlig årlig procentuell värdeökning motsvarar detta? (0/2)

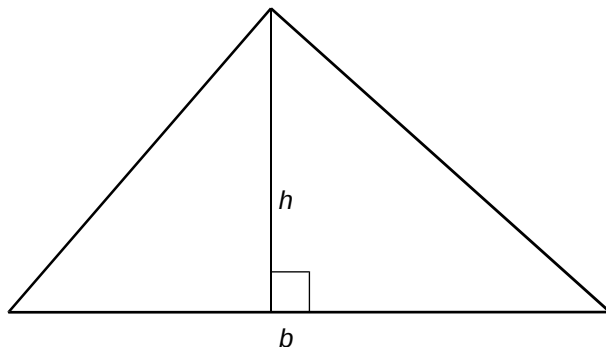
- b) Kristina köpte en bostadsrätt för 85 000 kr i ett annat bostadsområde i Åkersberga samtidigt som David. Hon hoppas få sälja sin bostadsrätt för 500 000 kr.

Hur länge måste hon vänta om den genomsnittliga årliga procentuella värdeökningen är 20%? (0/2)

12. För funktionen $y = f(x)$ gäller att $f'(4) = 1$

Beskriv vad $f'(4) = 1$ betyder för grafen till funktionen $y = f(x)$ (1/1)

13. En triangel har basen b och höjden h , där $b > h$. Se figur nedan.



Om basen *minskar* med x och höjden *ökar* med x fås en ny triangel med ett annat utseende.

- a) Uttryck den nya triangelns area i b , h och x .

Endast svar fordras (1/0)

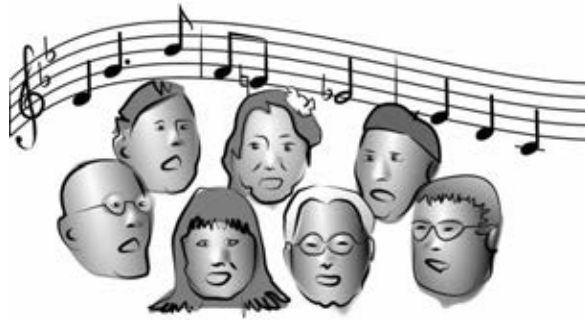
- b) Bestäm x , uttryckt i b och h , så att den nya triangelns area blir lika stor som den ursprungliga triangelns area. (1/1)

- c) De två triangelarna har nu lika stor area. Jämför basen i den ursprungliga triangeln med höjden i den nya triangeln, och höjden i den ursprungliga triangeln med basen i den nya triangeln.

Vilken slutsats drar du? (0/1)

14. Ett mått på hur våra öron uppfattar olika ljudstyrkor kallas ljudnivå och mäts i enheten decibel (dB). En förenklad modell av ljudnivån L hos en kör kan skrivas

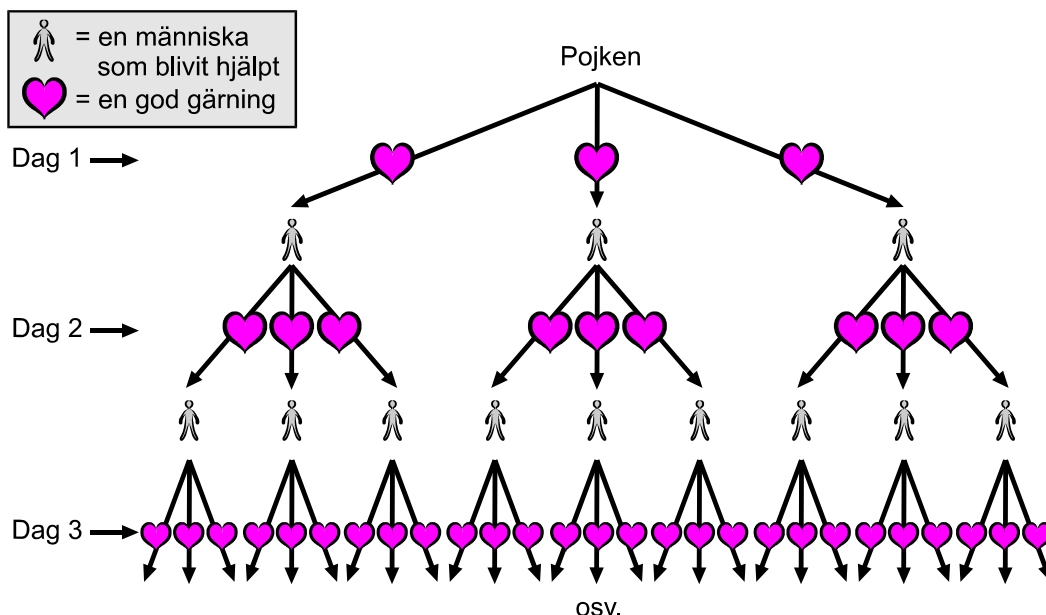
$$L = 10 \cdot \lg(2 \cdot 10^6 \cdot N) \text{ där } N \text{ är antalet körmedlemmar.}$$



Visa att ljudnivån alltid ökar med ca 7 dB om antalet körmedlemmar blir 5 gånger större.

(1/1/0)

15. I filmen "Pay it Forward" med skådespelarna Helen Hunt och Kevin Spacey kommer en pojke på en idé. Idén går ut på att han utför tre goda gärningar åt tre olika personer genom att hjälpa dem på ett betydelsefullt sätt. Dessa personer hjälper sedan tre andra människor vardera, vilka i sin tur hjälper tre nya människor vardera osv. Se figur. På så vis kommer världen att förändras till det bättre.



Antag att pojken idé blir verklighet och att det tar en dag för varje person att utföra sina tre goda gärningar och att ingen person blir hjälpt mer än en gång. Dagen efter att en person blivit hjälpt, hjälper den personen tre nya människor, enligt figuren.

För att alla människor på jorden ska bli hjälpta behöver 6 miljarder goda gärningar utföras.

(0/3)

Hur lång tid tar det innan 6 miljarder goda gärningar har utförts?

Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur generell din lösning är
- Hur systematisk du är i din undersökning
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

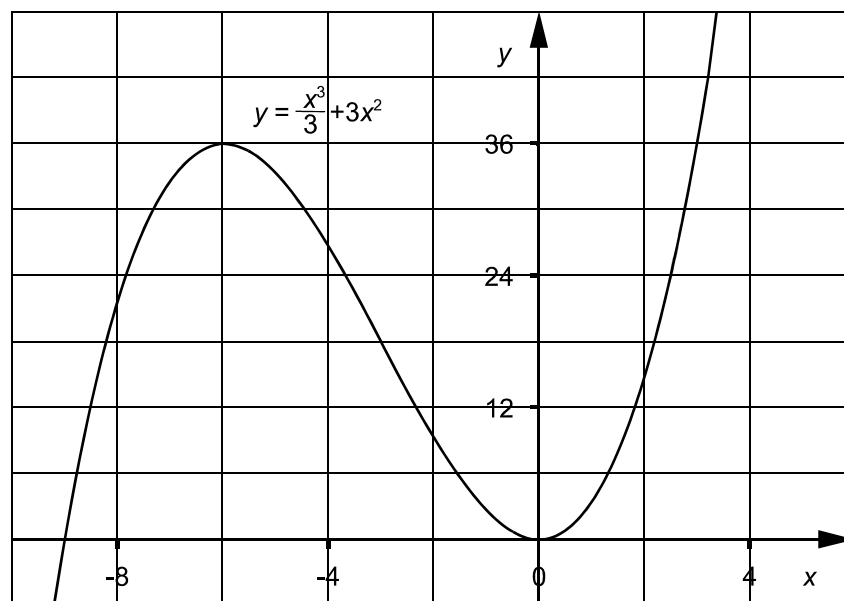
16. I denna uppgift ska du studera grafer till funktioner av typen $y = \frac{x^3}{3} + ax^2$ där $a \neq 0$

Du ska undersöka hur värdet på konstanten a påverkar extrempunkternas karaktär och koordinater. Med *extrempunkter* avses maximi- och minimipunkter och med *karaktär* avses vilken typ av extrempunkt det är frågan om.

- Låt $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2$, dvs. $a = -6$

Bestäm extrempunkternas karaktär och koordinater. Skissa grafen till funktionen.

- I figuren nedan visas grafen till $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$, dvs. $a = 3$



Jämför denna graf med den graf du skissat. Formulera *en* slutsats om hur de två olika värdena på a påverkar både karaktär och koordinater hos extrempunkterna.

- Undersök hur konstanten a påverkar både karaktär och koordinater för extrempunkterna till kurvan $y = \frac{x^3}{3} + ax^2$

Motivera och sammanfatta sedan de slutsatser du drar av din undersökning. (3/3/∞)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 och 8 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 7, 8, 11, 12, 13 c, 14, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i bl a modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 6, 8, 12, 13 c, 14 och 16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 8, 13 b, 13 c, 14, 15, 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 5, 8, 14 och 16 som alla har en högre grad av öppenhet, medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik ht 2003 i förhållande till betygs-kriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde												Betygskriterium														
Upp- gift nr	g po- äng	vg po- äng	□	Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd					
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	
1a	1	0										x				x														
1b	1	0										x				x														
2a	1	0					x									x														
2b	1	0					x									x														
2c	1	0					x									x														
3	2	0										x							x											
4	3	0										x	x					x	x	x										
5	1	0										x				x														
6	0	1																				x	x	x						
7	0	2																				x		x	x	x				
8	0	3	□									x										x	x	x	x	x	x		x	x
9a	1	0					x	x								x			x											
9b	2	0					x	x								x			x											
10a	1	0														x														
10b	1	0														x			x											
11a	0	2					x	x														x			x	x	x			
11b	0	2					x	x														x			x	x	x			
12	1	1																	x			x		x	x					
13a	1	0					x									x														
13b	1	1																	x					x	x					
13c	0	1																				x	x	x	x					
14	1	1	□				x	x											x	x		x	x	x	x	x		x		x
15	0	3					x	x														x				x				
16	3	3	□									x	x	x	x				x	x		x	x	x	x		x	x	x	x
Σ	23	20		0/0		6/8		5/4			12/8																			

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd: 12 poäng.

Väl godkänd: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng.

Mycket väl godkänd 25 poäng varav minst 14 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter* i minst en av □-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng

För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpöängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknepel.

6. Aspektbedömning

Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna "Metodval och genomförande", "Matematiskt resonemang" samt "Redovisning och matematiskt språk" som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (⊞) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av december 2013.

Bedömningsanvisningar (MaC ht 2003)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		Max 2/0
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 12x^2 - 10x$)	+1 g
b)	Korrekt svar ($f'(x) = 0$)	+1 g
2.		Max 3/0
a)	Godtagbart svar ($x = 10^{\frac{1}{3}}$)	+1 g
b)	Godtagbart svar ($x = \lg 3$)	+1 g
c)	Godtagbart svar ($x = \frac{\lg 10}{\lg 3}$)	+1 g
3.		Max 2/0
	Redovisad godtagbar metod som leder till två korrekta rötter	+1 g
	med ytterligare en korrekt rot ($x_1 = -4$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 4$)	+1 g
4.		Max 3/0
	Korrekt bestämd derivata, $V'(t) = 15t^2 - 135$	+1 g
	med godtagbar redovisning av att $V'(3) = 0$	+1 g
	med godtagbar verifiering av minimum	+1 g

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****5.****Max 1/0**Godtagbart svar $\left(\text{tex } \frac{2}{x-5} \right)$

+1 g

6.**Max 0/1**

Korrekt svar (alternativ D och F)

+1 vg

7.**Max 0/2**Redovisad godtagbar metod inklusive godtagbar bestämning av x -koordinat med korrekt svar ($x = 7$)

+1 vg

+1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

$$k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$f(x) = f'(x) = 0,5 \quad \text{där } x = 5$$

Kommentar: Eleven beräknar linjens riktningskoefficient felaktigt, men visar kunskap om hur $f(x) = f'(x)$ ska tolkas och hur x kan avläsas ur figuren.**8.****Max 0/3/□**

Eleven tecknar en korrekt ändringskvot för någon andragsgradsfunktion

+1 vg

där den valda andragsgradsfunktionen har minst två generella koefficienter

+1 vg

Eleven utför ett godtagbart bevis för den valda funktionen

+1 vg

Redovisad godtagbar bevisföring som bygger på det generella fallet

 $f(x) = ax^2 + bx + c$ med ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk.

□

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$$y = x^2 \quad y' = 2x$$

Derivatans definition $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a \text{ eller } 2x \text{ om man}$$

använder x istället för a

Kommentar: Eleven tecknar en korrekt ändringskvot för en andragsradsfunktion och utför ett godtagbart bevis. Kvaliteten i elevlösningen bedöms vara precis över gränsen för att erhålla 2 vg-poäng.

Elevlösning 2 (3 vg)

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Antag $f(x) = x^2 + ax + b$ en generell andragsrads-
ekvation

$$f'(x) = \frac{(x+h)^2 + a(x+h) + b - (x^2 + ax + b)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 + ax + ah + b - x^2 - ax - b}{h} = \frac{2xh + h^2 + ah}{h} = \frac{h(2x + h + a)}{h}$$

$$f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + a) = \underline{2x + a} \text{ en generell f\u00f6rdragsradsfunktion}$$

Kommentar: Eleven tecknar en godtagbar ändringskvot för en andragsradsfunktion som innehåller minst två generella koefficienter samt utför ett godtagbart bevis.

Elevlösning 3 (3 vg och □)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh - ax^2 - bx}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + ah + b) = \\
 &= 2ax + b \quad \text{vilket är en funktion av första graden}
 \end{aligned}$$

Kommentar: Redovisad godtagbar bevisföring som bygger på det generella fallet $f(x) = ax^2 + bx + c$ med ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk.

Del II

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
9.		Max 3/0
a)	Redovisad godtagbar lösning (134 000 kr)	+1 g
b)	Redovisad godtagbar ansats, t ex korrekt derivering med godtagbart svar (29 600 kr/år)	+1 g +1 g
10.		Max 2/0
a)	Godtagbart svar ($t=3$)	+1 g
b)	Redovisad godtagbar lösning (97 jästceller/timme)	+1 g
11.		Max 0/4
a)	Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $345000 = 112000 \cdot a^5$ med godtagbart svar (25 %)	+1 vg +1 vg
b)	Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $500000 = 85000 \cdot 1,20^t$ med godtagbart svar (9,7 år)	+1 vg +1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****12.****Max 1/1**

Beskrivningen innehåller en av nedanstående punkter

+1 g

Beskrivningen innehåller ytterligare en av nedanstående punkter

+1 vg

- att grafens lutning eller tangentens riktningskoefficient är 1
- att den punkt på grafen som är aktuell är den punkt där x -koordinaten är 4

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g)

SVAR: Lutningen är ju 1

Elevlösning 2 (1 g och 1 vg)

Det betyder att k -värdet i grafen vid $x=4$ är 1

Kommentar: Kvaliteten i elevlösning 1 och 2 bedöms vara precis över gränsen för att erhålla 1 g-poäng respektive 1 g-poäng och 1 vg-poäng.

13.**Max 2/2**

- a) Korrekt svar $\left(\frac{(b-x)(h+x)}{2} \right)$ +1 g
- b) Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $\frac{bh}{2} = \frac{(b-x)(h+x)}{2}$ +1 g
med godtagbar bestämning av x , ($x = b - h$) +1 vg
- c) Godtagbar slutsats ("Den andra triangelns bas blir lika lång som den första triangelns höjd och den andra triangelns höjd blir lika lång som den första triangelns bas.") +1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****14.****Max 1/1/□**

Nedan ges två alternativa bedömningsanvisningar. Elevens val av lösningsmetod styr vilken bedömningsanvisning som ska användas.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		
	Lägre	→	Högre
Elevlösning baserad på specialfall	Eleven visar för ett specialfall att ljudnivån ökar med 7 dB. (1/0)	Eleven styrker sin argumentation om att ljudnivån ökar med 7 dB genom att visa detta för fler än ett specialfall. (1/1)	
Elevlösning baserad på generell metod		Eleven tecknar ett generellt uttryck. (1/1)	Eleven tecknar ett generellt uttryck och visar att ljudnivån ökar med 7 dB. (1/1/□)

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1vg)

$$L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot N) \quad (N = \text{antalet körmedlemmar})$$

10 personer $\rightarrow$ 50 personer

$$L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 10) \quad L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 50)$$

$$10 \cdot 7.3 = 73 \text{ dB} \quad 10 \cdot 8 = 80 \text{ dB}$$

1 person $\rightarrow$ 5 personer

$$L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 1) \quad L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 5)$$

$$L = 10 \cdot 6.3 = 63 \text{ dB} \quad L = 10 \cdot 7 = 70 \text{ dB}$$

Svar: Det ökar alltså med 7 dB

Kommentar: Eleven visar att ökningen i ljudnivå  r 7 dB för två specialfall.

Elevlösning 2 (1 g och 1 vg)

$$\begin{aligned}
 &10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot N) \\
 &10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 5N) \\
 &\log\left(\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 5N}{2 \cdot 10^6 \cdot N}\right) \cdot 10 = \log 5 \cdot 10 = \log 50 = 1,69 \\
 &\quad \quad \quad ?
 \end{aligned}$$

Kommentar: Eleven tecknar ett generellt uttryck, men utför en felaktig förenkling.

Elevlösning 3 (1 g och 1 vg och □)

$$\begin{aligned}
 &\text{Svar: Ljudnivån ökar med } \lg 5 \cdot 10 \text{ dB (6,99 dB)} \\
 &10 \cdot \lg(2 \cdot 10^6 \cdot 5x) - 10 \cdot \lg(2 \cdot 10^6 \cdot x) = \Delta L \\
 &\lg(2 \cdot 10^6 \cdot 5x) - \lg(2 \cdot 10^6 \cdot x) = \frac{\Delta L}{10} \\
 &(\text{enligt logaritmlagarna } \lg 5x = \lg 5 + \lg x) \\
 &\lg 2 + 6 + \lg 5 + \lg x - (\lg 2 + \lg 6 + \lg x) = \frac{\Delta L}{10} \\
 &\lg 2 + 6 + \lg 5 + \lg x - \lg 2 - 6 - \lg x = \frac{\Delta L}{10} \\
 &\Rightarrow \lg 5 \cdot 10 = \Delta L
 \end{aligned}$$

Kommentar: Eleven tecknar ett generellt uttryck för ökningen i ljudnivå och förenklar, om än något omständligt, uttrycket. Skrivsättet $\lg 5 \cdot 10$ är inte lämpligt, men eleven behandlar uttrycket korrekt på sin räknare.

15.

Max 0/3

Godtagbart tecknad ekvation, t ex $\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = 6 \cdot 10^9$
 med godtagbart svar (21 dagar)

+1-2 vg

+1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

Handwritten student solution on grid paper:

$$1 + 3 + 9 + \dots \quad k=3, a_0=1$$

$$1 \cdot \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 6000000000$$

$$3^n - 1 = 12000000000$$

$$3^n = 12000000001$$

$$\lg 3^n = \lg 12000000001$$

$$n = \frac{\lg 12000000001}{\lg 3} \approx 21,12$$

SVAR: ca. 21 dgr

Kommentar: Den uppställda ekvationen baseras på användandet av geometrisk summa men första termens värde är felaktigt. Eleven löser ekvationen korrekt.

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

16.

3/3/□

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		Total poäng
	Lägre	→ Högre	
Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problem-situation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i>	Eleven använder någon godtagbar metod för bestämning av extrempunkterna: max. $(0, 0)$ och min. $(12, -288)$ samt skissar grafen. 1-2 g	Eleven använder någon godtagbar metod för bestämning av extrempunkterna samt skissar grafen och eleven påbörjar en generell undersökning i tredje punkten och finner att derivatans nollställen är $x_1 = 0$ och $x_2 = -2a$ 2 g och 1 vg	2/1
Matematiskt resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i>	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i andra punkten, t ex "Om $a = -6$ blir origo en maxpunkt och när $a = 3$ blir origo en minpunkt". 1 g	Eleven drar, i tredje punkten, ytterligare någon eller några godtagbara slutsatser angående både punkternas läge och karaktär baserat på prövning av specialfall eller generell undersökning. 1 g och 1 vg	1/1
Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i>		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt. 1 vg	0/1
Summa			3/3

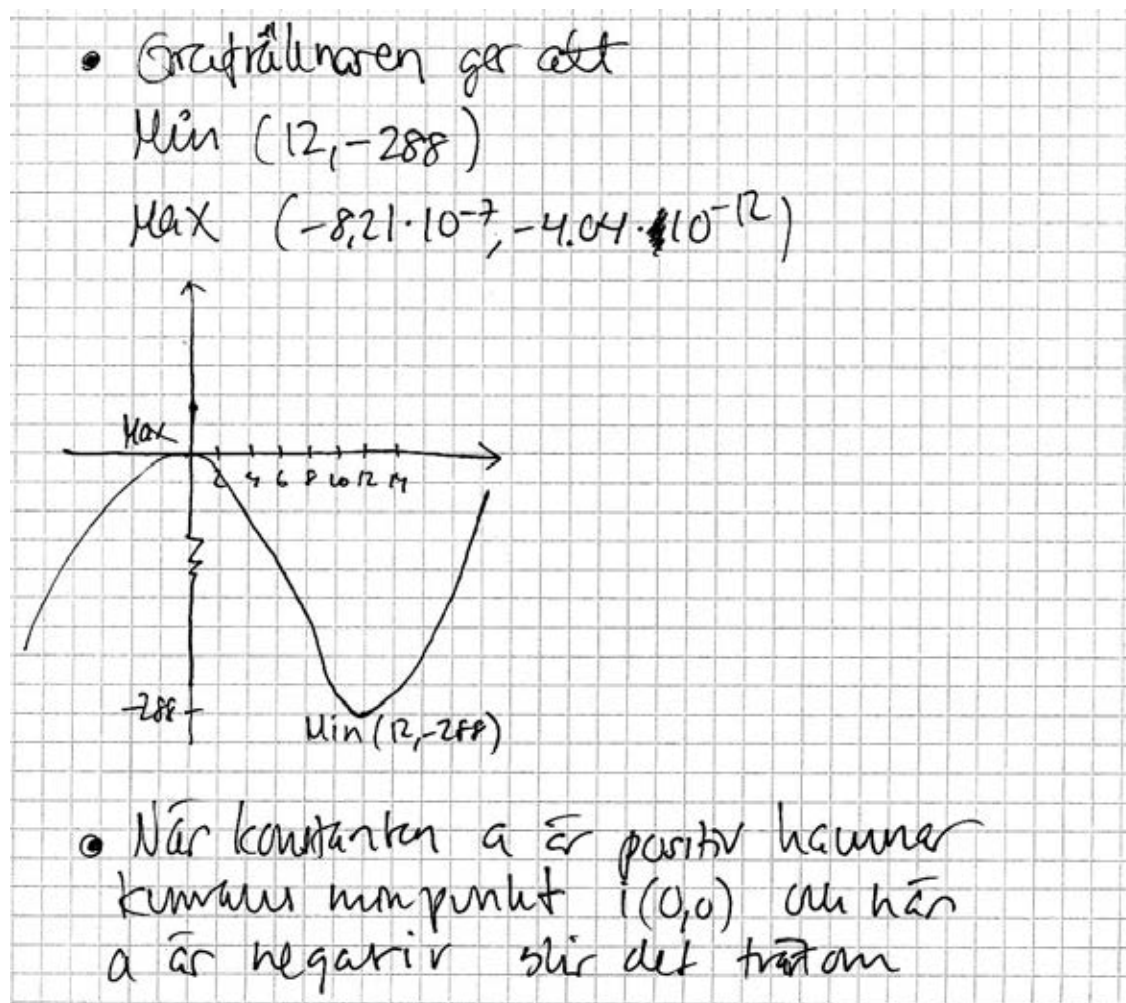
Eleven utför godtagbart punkterna 1 och 2.

Eleven väljer en generell metod i tredje punkten och beräknar extrempunkternas koordinater uttryckt i a . Eleven undersöker de två typfallen $a < 0$ och $a > 0$ och drar slutsatser både om extrempunkternas karaktär och koordinater. Någon av slutsatserna verifieras med generell metod. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt.

□

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16

Elevlösning 1 (3 g)



Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X →	2/0	Eleven tolkar inte grafräknares resultat till $(0,0)$
Matematiska resonemang	X →	1/0	Otydlig slutsats.
Redovisning och matematiskt språk			Lösningen är för kortfattad för att redovisning och matematiskt språk ska kunna bedömas.
Summa		3/0	

Kommentar: Kvaliteten i elevens lösning vad gäller de två första aspekterna (metodval/genomförande samt resonemang) bedöms vara precis över gränsen för att erhålla 2 respektive 1 g-poäng.

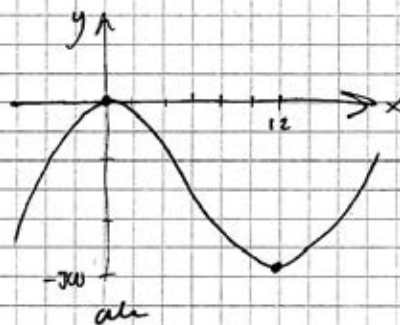
Elevlösning 2 (3 g och 2 vg)

$$\bullet y = \frac{x^3}{3} - 6x^2$$

$$y' = x^2 - 12x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 0 = x(x-12) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ och } x_2 = 12$$

x	0	12
y'	+	-
y	0	-288

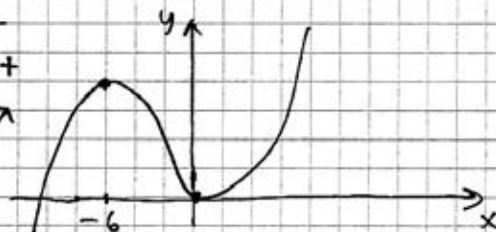


$$\bullet y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$$

$$y' = x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 0 = x(x+6) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ och } x_2 = -6$$

x	-6	0
y'	+	-
y	36	0



Starktats Vid $a = -6$ ligger minipunkten "efter" maxipunkten, dvs i 4:e kvadranten, vid $a = 3$ ligger maxipunkten "före" minipunkten, dvs i 2:a kvadranten

- Jag gör en undersökning på grafritaren

a	maxipunkt	minipunkt
-100	(0,0)	(200, -1333333)
-50	(0,0)	(100, -166666,7)
-10	(0,0)	(20, -1333,333)
10	(-20, 1333,333)	(0,0)
50	(-100, 166666,67)	(0,0)
100	(-200, 1333333,3)	(0,0)

Slutsats: Alla graferna har en extrempunkt i punkten (0,0). När a är negativ är det en maxipunkt och när a är positiv är det en minipunkt.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	$\xrightarrow{\quad X \quad}$	2/0	
Matematiska resonemang	$\xrightarrow{\quad \quad X \quad}$	1/1	Slutsatsen i punkt 3 är mer relevant och tydligare än slutsatsen i punkt 2. Eleven väljer systematiskt olika värden på a vilka kan anses vara väl valda.
Redovisning och matematiskt språk	$\xrightarrow{\quad \quad X \quad}$	0/1	Redovisningen är lätt att följa och förstå. Men vissa språkliga brister framträder, t ex bruket av "före" och "efter" gör att slutsatsen i punkt 2 är otydlig.
Summa		3/2	

Kommentar: Kvaliteten i elevens lösning vad gäller de två sista aspekterna (resonemang och redovisning/språk) bedöms vara precis över gränsen för att erhålla vg-poäng.

Elevlösning 3 (3 g och 3 vg)

$$y = \frac{x^3}{3} + ax^2 \quad a \neq 0$$

$$\cdot y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 \quad a = -6$$

$$y'(x) = \frac{3x^2}{3} - 12x = x^2 - 12x$$

$$x^2 - 12x = x(x - 12)$$

$$x(x - 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases}$$

teckenstudium

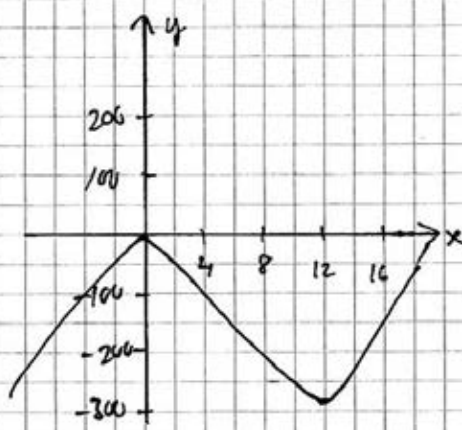
	$x < 0$		$0 < x < 12$		$x > 12$
x	-	0	+	+	+
$(x-12)$	-	-	-	0	+
$y'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max}(x) = \frac{x^3}{3} - 6x^2 = \frac{0^3}{3} - 6 \cdot 0^2 = 0$$

max punkt (0,0)

$$y_{\min}(x) = \frac{x^3}{3} - 6x^2 = \frac{12^3}{3} - 6 \cdot 12^2 = -288$$

min punkt (12, -288)

Svar: max 0
min 12

koordinaterna:

(0,0) och

(12, -288)

- Vilket a man än använder så blir alltid första extrempunkten en maxipunkt, om man går från vänster till höger.

- $a < 0$ $a > 0$

$$y = \frac{x^3}{3} + ax^2$$

Om $a > 0$
är a positivt
alltså $+a$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + ax^2$$

$$y'(x) = \frac{3x^2}{3} + 2ax =$$

$$x^2 + 2ax$$

$$x^2 + 2ax = x(x + 2a)$$

$$x(x + 2a) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2a \end{cases}$$

Extrempunkterna ligger vid 0 och $-2a$

teckenstudium

	$x < -2a$	$-2a < x < 0$	$0 < x$	$x > 0$
x	-	-	-	+
$(x+2a)$	-	+	+	+
$y'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	$\rightarrow$	max	$\rightarrow$ min	$\rightarrow$

$$y_{\max}(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 = \frac{-2a^3}{3} + a(-2a^2) =$$

$$= -\frac{8a^3}{3} + a(4a^2) = -\frac{8a^3}{3} + 4a^3 =$$

$$-\frac{8a^3}{3} + \frac{12a^3}{3} = -8a^3 + 12a^3 = \underline{\underline{4a^3}}$$

$$\text{Maxpunkt: } (-2a, 4a^3)$$

$$y_{\min}(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 = \frac{0^3}{3} + a \cdot 0^2 = 0 \quad \text{Minpunkt} = (0, 0)$$

Om $a < 0$ är $a \Rightarrow$
negativt alltså $-a$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} - ax^2$$

$$y'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2ax = x^2 - 2ax$$

$$x^2 - 2a = x(x - 2a) \Rightarrow x(x - 2a) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2a \end{cases}$$

Extrem punkterna ligger vid 0 och $2a$

teckenstudium

	$x < 0$	$0 < x < 2a$	$x > 2a$	
x	-	+	+	
$(x-2a)$	-	-	+	
$y'(x)$	+	-	+	
$f''(x)$	$\rightarrow$	max	$\rightarrow$ min	

$$y_{\max}(x) = \frac{x^3}{3} - ax^2 = \frac{0^3}{3} - a \cdot 0^2 = 0 \quad \text{Maxpunkt } (0, 0)$$

$$y_{\min}(x) = \frac{x^3}{3} - ax^2 = \frac{(2a)^3}{3} - a(2a)^2 = \frac{8a^3}{3} - a(4a^2) =$$

$$\frac{8a^3}{3} - 4a^3 = \frac{8a^3}{3} - \frac{12a^3}{3} = -4a^3 \quad \text{Minpunkt } (2a, -4a^3)$$

dvs.	$+a$	$-a$	
max	$(-2a, 4a^3)$	$(0, 0)$	Så man ser i tabellen blir allting precis tvärtom!
min	$(0, 0)$	$(2a, -4a^3)$	

Bedömning

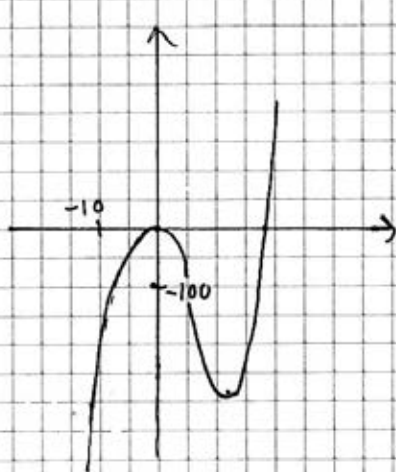
	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		2/1	Felaktigt beräknad y-koordinat.
Matematiska resonemang		1/1	Slutsatserna baseras på en generell undersökning och sammanfattar det väsentligaste i uppgiften.
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Redovisningen är tydlig och strukturerad. Språket är i huvudsak lämpligt, men vissa brister framträder såsom "om $a < 0$ är a negativt alltså $-a$ ". Eleven sätter t ex likhetstecken mellan $y_{\min}(x)$ och $y(12)$ samt använder parenteser felaktigt.
Summa		3/3	

Elevlösning 4 (3 g och 3 vg och ∞)

- $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2$
 $y' = x^2 - 12x$
 $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 12$

x	0	12
y'	+	-
y	↗ 0 ↘	↘ -288 ↗

$$y = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = 18$$



Maximipunkt (0,0)

Minimipunkt (12, -288)

- Det ena extremvärdet ligger alltid på (0,0) eftersom $x^2 + 2ax = 0$ har en rot som är lika med noll och $x^3/3 + ax^2$ inte har någon konstant (k) som höjer eller sänker grafen ($x=0 \Rightarrow y=0$)

När a var negativt, blev (0,0) maxpunkt och $(-2a, y(-2a))$ minpunkt, när a var positivt blev (0,0) minpunkt och $(2a, y(2a))$ maxpunkt.

Ju större a 's absolutvärde är, desto längre förskjuts sistnämnda extrempunkt från origo.

$$y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2$$

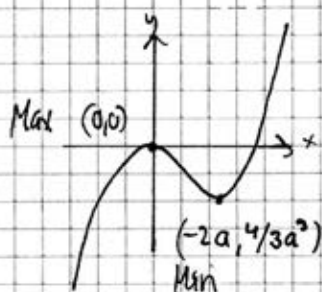
$$y' = x^2 + 2ax$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2a$$

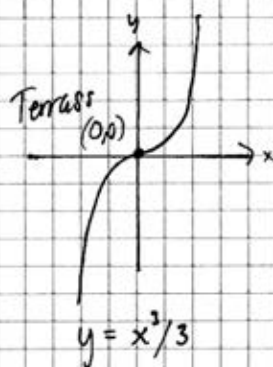
$$y(-2a) = \frac{1}{3} \cdot (-2a)^3 + a(-2a)^2 = -\frac{8a^3}{3} + \frac{12a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$$

x	0	-2a
y'	0	0
y	0	$\frac{4}{3}a^3$

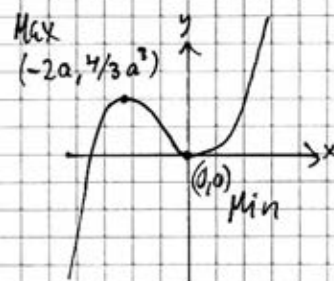
$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$



Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	☒	2/1	
Matematiska resonemang	☒	1/1	Eleven ger generella slutsatser redan i punkt 2, vilket får anses vara godtagbart.
Redovisning och matematiskt språk	☒	0/1	Elevens matematiska språk är i huvudsak korrekt. Redovisningen är delvis knapphändig.
Summa		3/3	

Kommentar: Eleven beräknar extrempunkternas koordinater uttryckt i a . Eleven undersöker de två typfallen $a < 0$ och $a > 0$ och drar slutsatser både om extrempunkternas karaktär och om dess koordinater. Slutsatser som rör extrempunkternas koordinater verifieras generellt. Redovisningen av standardberäkningar, t ex ekvationslösning, kan ibland upplevas som knapphändig, men redovisningen är i sina väsentliga delar ändå tydlig och välstrukturerad. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt.

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)

R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)

A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)

D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→		
Matematiska resonemang	—	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→		
Matematiska resonemang	—	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→		
Matematiska resonemang	—	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→		
Matematiska resonemang	—	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→		
Matematiska resonemang	—	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→		
Summa				