NATIONAL TEST IN MATHEMATICS COURSE C
AUTUMN 2003

Directions

Test time	240 minutes for Part I and Part II together. We recommend that you spend no more than 60 minutes on Part I.
Resources	**Part I:** ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C, D and E.” *Please note that calculators are not allowed in this part.* **Part II:** Calculators, and ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C, D and E”.
Test material	The test material should be handed in together with your solutions. Write your name, the name of your education programme / adult education on all sheets of paper you hand in. *Solutions to Part I should be handed in before you retrieve your calculator. You should therefore present your work on Part I on a separate sheet of paper. Please note that you may start your work on Part II without a calculator.*
The test	The test consists of a total of 16 problems. **Part I** consists of 8 problems and **Part II** consists of 8 problems. To some problems (where it says *Only answer is required*) it is enough to give short answers. For the other problems short answers are not enough. They require that you write down what you do, that you explain your train of thought, that you, when necessary, draw figures. When you solve problems graphically/numerically please indicate how you have used your resources. Problem 16 is a larger problem which may take up to an hour to solve completely. It is important that you try to solve this problem. A description of what your teacher will consider when evaluating your work is attached to the problem. Try all of the problems. It can be relatively easy, even towards the end of the test, to receive some points for partial solutions. A positive evaluation can be given even for unfinished solutions.
Score and mark levels	The maximum score is 43 points. The maximum number of points you can receive for each solution is indicated after each problem. If a problem can give 2 ”Pass”-points and 1 ”Pass with distinction”-point this is written (2/1). Some problems are marked with ¤, which means that they more than other problems offer opportunities to show knowledge that can be related to the criteria for ”Pass with Special Distinction” in Assessment Criteria 2000.

Lower limit for the mark on the test

Pass:	12 points
Pass with distinction:	25 points of which at least 7 ”Pass with distinction” points.
Pass with special distinction:	25 points of which at least 14 ”Pass with distinction”-points. You also have to show ”*Pass with special distinction*” *qualities in at least one* of the ¤-problems.

Name: ______________________________ School: __________________________________

Education programme/adult education: ____

Part I

This part consists of 8 problems that should be solved without the aid of a calculator. Your solutions to the problems in this part should be presented on separate sheets of paper that must be handed in before you retrieve your calculator. Please note that you may begin working on Part II without the aid of a calculator.

1. Find $f'(x)$ if

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2$ *Only answer is required* (1/0)

b) $f(x) = 15$ *Only answer is required* (1/0)

2. Solve the equations. Give an exact answer.

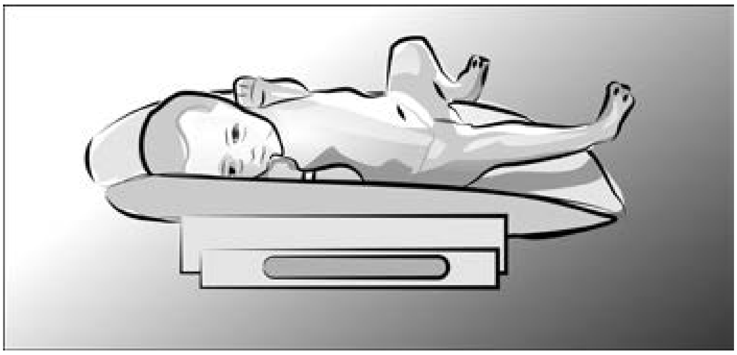
a) $x^3 = 10$ *Only answer is required* (1/0)

b) $10^x = 3$ *Only answer is required* (1/0)

c) $3^x = 10$ *Only answer is required* (1/0)

3. Solve the equation $x^3 - 16x = 0$ (2/0)

4.



Newborn babies normally lose weight during the first few days and then start to gain weight again. In order to determine if a baby follows the normal pattern for weight-development, someone at a hospital has collected data on the weight-development of newborn babies and arrived at the function:

$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$

where V is the average weight in grams and t is the time in days after birth. The equation is valid for the first 6 days after birth.

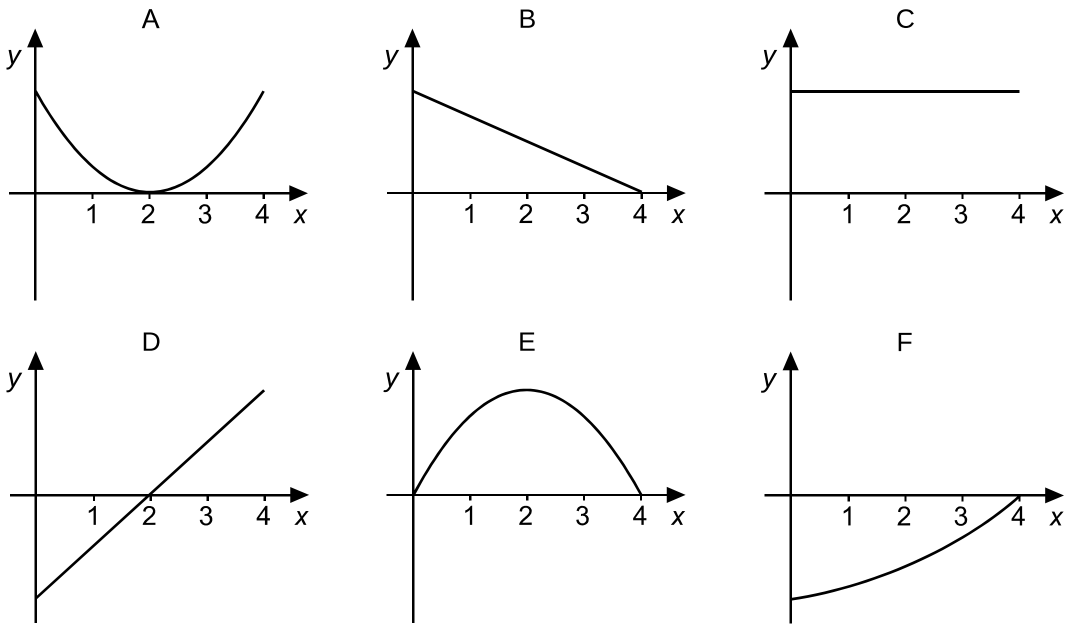
Show that the function which describes the average weight has a local minimum when $t = 3$. (3/0)

5. Give an example of a rational expression which is not defined for $x = 5$

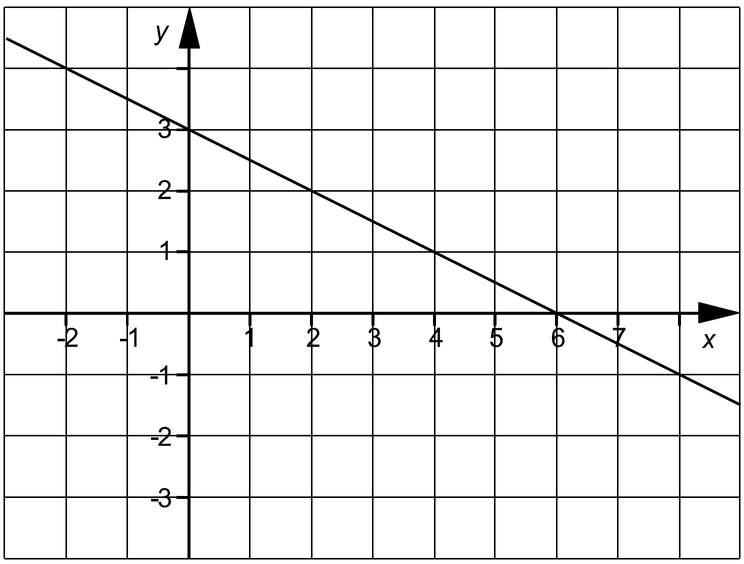
Only answer is required (1/0)

6. For the function $y = f(x)$ it is true that $f'(x) > 0$ for $0 < x < 4$.
Which of the graphs below is the graph of the function $y = f(x)$?

Only answer is required (0/1)



7. In the figure below the graph for a linear function $y = f(x)$ is shown.
For which value of x is it true that $f(x) = f'(x)$? (0/2)



8. Show with the help of the definition of the derivative that the derivative of *every* second order function is a first order function. (0/3/¤)

Part II

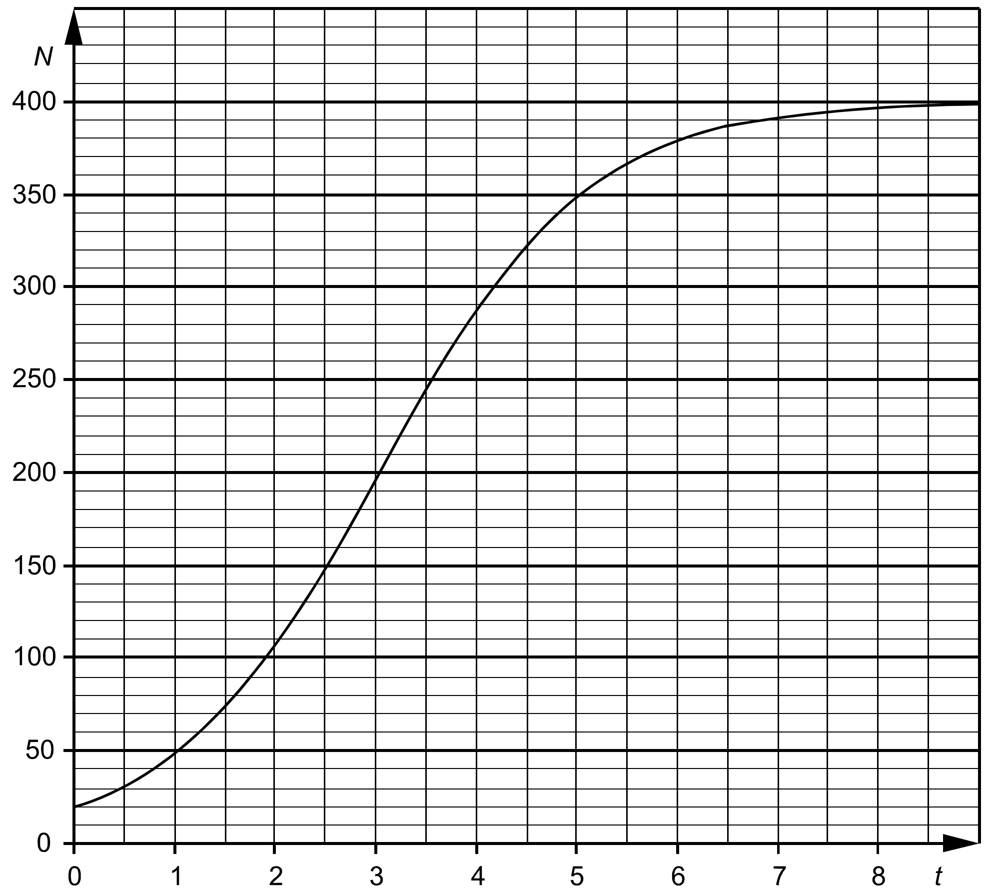
This part consists of 8 problems and you may use a calculator when solving them. Please note that you may begin working on Part II without a calculator.

9. The value of a car depreciates with time according to the equation
$V(t) = 260\,000 \cdot e^{-0.22 \cdot t}$
where V is the value in SEK and t is the time in years counted from the purchase date.

a) Calculate the value of the car when $t = 3$ (1/0)

b) Calculate the rate at which the value of the car depreciates when $t = 3$ (2/0)

10. The graph shows how the number of yeast cells N in a culture is dependent on the time t hours counted from the start of the experiment.



a) Estimate how much time after the culture started that the growth rate in the culture is greatest? *Only answer is required* (1/0)

b) Calculate the growth rate when it is greatest. (1/0)

11. Owning a co-op means that one is a part-owner of the house and grounds. The co-op's location can be decisive for how its value develops. In the following two cases you can assume that the increase in value is exponential.

a) David bought a co-op in Åkersberga for 112 000 SEK. Five years later he sold it for 345 000 SEK.

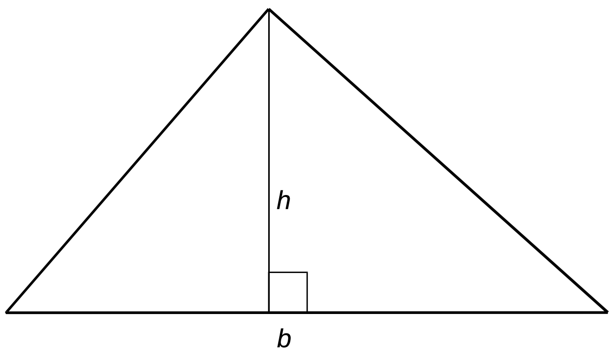
What is the average annual percentage increase in value that this represents? (0/2)

b) Kristina bought a co-op for 85 000 SEK at the same time as David in a different neighbourhood in Åkersberga. She hopes to sell her co-op for 500 000 SEK.

How long must she wait if the average annual percentage increase in value is 20%? (0/2)

12. For the function $y = f(x)$ it is given that $f'(4) = 1$
Describe what $f'(4) = 1$ means for the graph of the function $y = f(x)$ (1/1)

13. A triangle has the base b and the height h, where $b > h$. See the figure below.



If the base *decreases* with x and the height *increases* with x a new triangle is created with a different appearance.

a) Express the area of the new triangle in b, h and x.

Only answer is required (1/0)

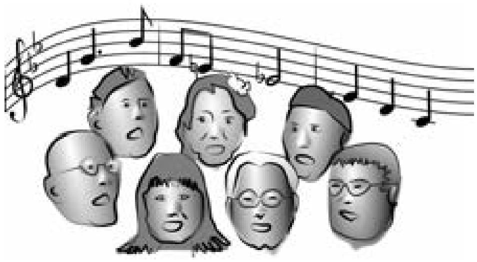
b) Find x, expressed in b and h, so that the area of the new triangle becomes as big as the area of the original triangle. (1/1)

c) The two triangles now have the same area. Compare the base in the original triangle with the height in the new triangle and the height in the original triangle with the base in the new triangle.

What conclusion can you draw? (0/1)

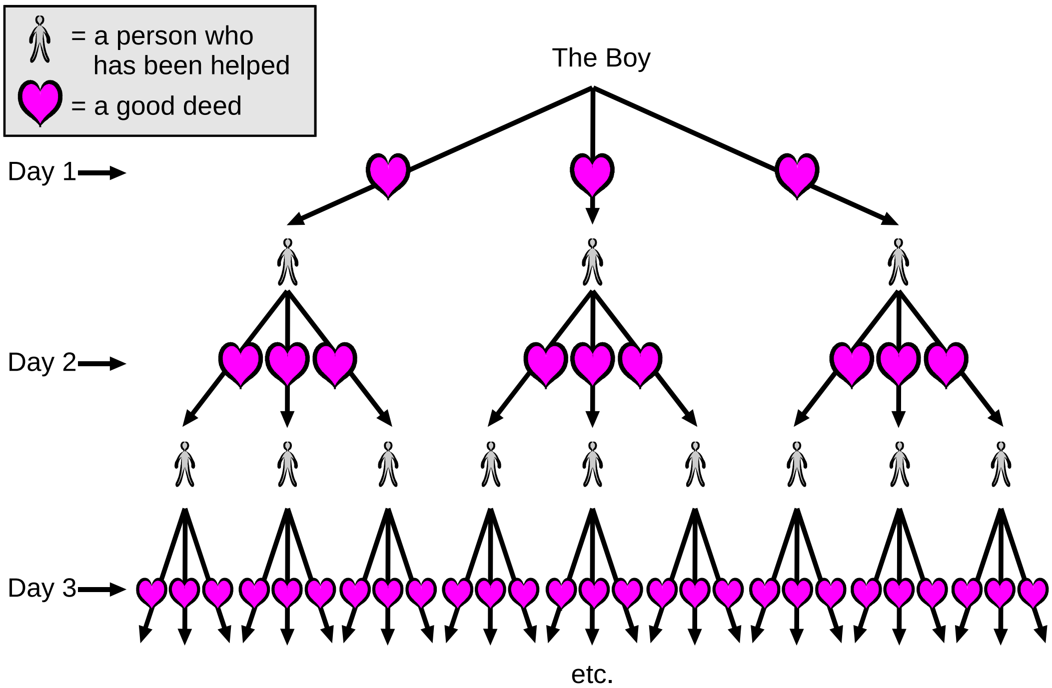
14. A measurement of how our ears register different volumes is called the sound level and is measured with the unit decibel (dB). A simplified model of the sound level L in a choir can be written

$L = 10 \cdot \lg(2 \cdot 10^6 \cdot N)$ where N is the number of choir members.



Show that the sound level always increases with approximately 7 dB if the number of choir members becomes 5 times greater. (1/1/¤)

15. In the film ”Pay it Forward” with actors Helen Hunt and Kevin Spacey, a boy comes up with an idea. The idea is that he can carry out three good deeds for three different people by helping them in a meaningful way. These people, each then help three other people who in turn each help three new people, etc. See the figure. In this manner, the world will change for the better.



Assume that the boy’s idea is put into practice and it takes one day for each person to carry out their three good deeds and nobody is helped more than once. The day after a person has been helped that person helps three new persons according to the figure.
In order for all the people on the earth to be helped it means that 6 thousand million good deeds must be carried out.

How long will it take before 6 thousand million good deeds have been carried out? (0/3)

When assessing your work with this problem the teacher will consider the following:

- How well you carry out your calculations
- How general your solution is
- How systematic you are in your investigation
- How well you support your conclusions
- How well you account for your work
- How well you use mathematical language

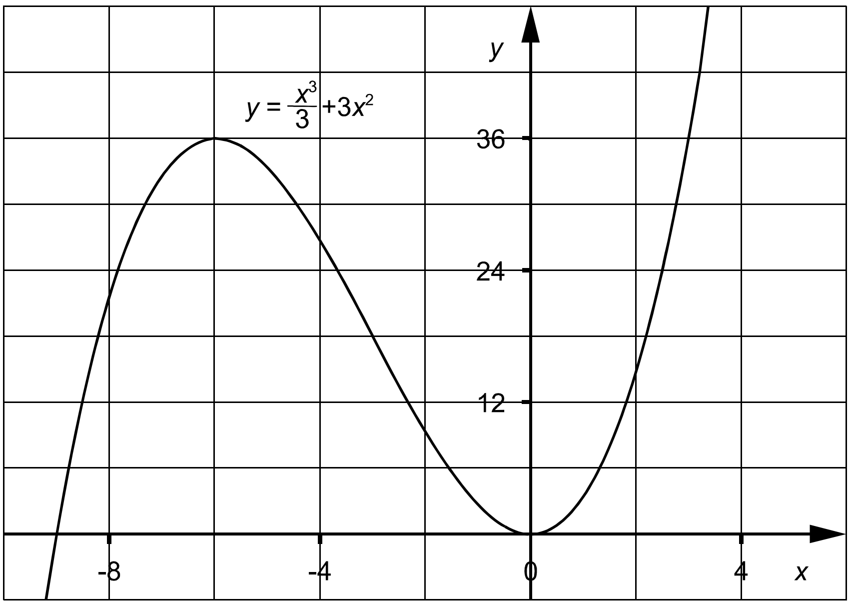
16. For this task you must study graphs of functions of the type $y = \frac{x^3}{3} + ax^2$ where $a \neq 0$

You should examine how the value of constant a affects the character and the co-ordinates of the extreme points. *Extreme points* means maximum and minimum points and *character* means which type of extreme point is in question.

- Let $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2$, i.e. $a = -6$

  Find the character and the coordinates of the extreme points. Sketch the graph of the function.

- The graph of $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$, i.e. $a = 3$, is shown in the figure below.



  Compare this graph with the one you have sketched. Formulate *one* conclusion about how the two different values of a affect both the character and the coordinates of the extreme points.

- Investigate how the constant a affects both the character and the coordinates for the extreme points of the curve $y = \frac{x^3}{3} + ax^2$

  Then support and summarise the conclusions that you can draw from your investigation. . (3/3/¤)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 och 8 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 7, 8, 11, 12, 13 c, 14, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i bl a modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 6, 8, 12, 13 c, 14 och 16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 8, 13 b, 13 c, 14, 15, 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 5, 8, 14 och 16 som alla har en högre grad av öppenhet, medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik ht 2003 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde											Betygskriterium														
Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1a	1	0									x				x														
1b	1	0									x				x														
2a	1	0				x									x														
2b	1	0				x									x														
2c	1	0				x									x														
3	2	0								x							x												
4	3	0									x	x				x	x	x											
5	1	0								x					x														
6	0	1											x						x	x	x								
7	0	2										x	x						x		x	x	x						
8	0	3	¤						x					x					x	x	x	x	x		x	x	x	x	
9a	1	0				x	x								x		x												
9b	2	0				x	x				x				x		x												
10a	1	0										x			x														
10b	1	0									x	x	x		x		x												
11a	0	2				x	x												x		x	x	x						
11b	0	2				x	x												x		x	x	x						
12	1	1									x						x		x		x	x							
13a	1	0			x				x						x														
13b	1	1							x								x		x			x	x						
13c	0	1							x										x	x	x	x							
14	1	1	¤			x	x									x	x		x	x	x	x	x		x		x	x	
15	0	3				x	x												x		x		x						
16	3	3	¤							x	x	x	x			x	x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	
Σ	23	20		0/0		6/8		5/4			12/8																		

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd: 12 poäng.

Väl godkänd: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng.

Mycket väl godkänd 25 poäng varav minst 14 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i minst en* av ¤-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)
   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp
   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]
   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg
   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaC ht 2003)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen "godtagbar" ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
Del I			
1.			**Max 2/0**
	a)	Korrekt svar $\left(f'(x)=12x^2-10x\right)$	+1 g
	b)	Korrekt svar $\left(f'(x)=0\right)$	+1 g
2.			**Max 3/0**
	a)	Godtagbart svar $\left(x=10^{\frac{1}{3}}\right)$	+1 g
	b)	Godtagbart svar ($x=\lg 3$)	+1 g
	c)	Godtagbart svar $\left(x=\dfrac{\lg 10}{\lg 3}\right)$	+1 g
3.			**Max 2/0**
		Redovisad godtagbar metod som leder till två korrekta rötter	+1 g
		med ytterligare en korrekt rot ($x_1=-4$, $x_2=0$ och $x_3=4$)	+1 g
4.			**Max 3/0**
		Korrekt bestämd derivata, $V'(t)=15t^2-135$	+1 g
		med godtagbar redovisning av att $V'(3)=0$	+1 g
		med godtagbar verifiering av minimum	+1 g

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

5. **Max 1/0**

Godtagbart svar $\left(\text{t ex } \dfrac{2}{x-5}\right)$ +1 g

6. **Max 0/1**

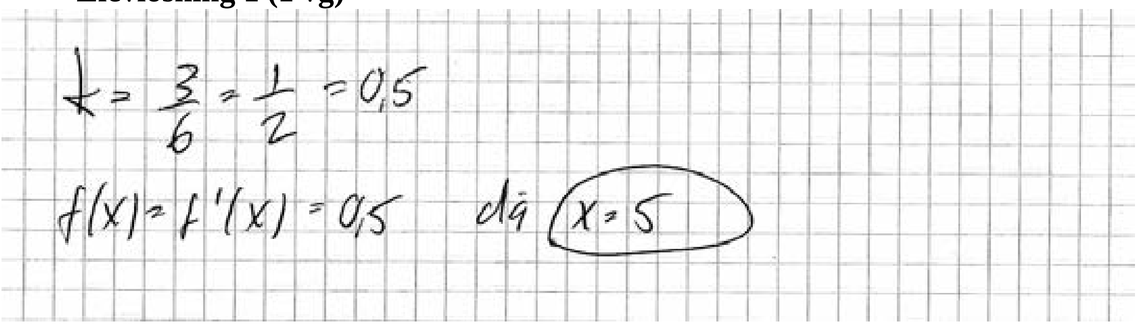
Korrekt svar (alternativ D och F) +1 vg

7. **Max 0/2**

Redovisad godtagbar metod inklusive godtagbar bestämning av x-koordinat +1 vg
med korrekt svar $(x = 7)$ +1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)



$k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$f(x) = f'(x) = 0{,}5$ då $x = 5$

Kommentar: Eleven beräknar linjens riktningskoefficient felaktigt, men visar kunskap om hur $f(x) = f'(x)$ ska tolkas och hur x kan avläsas ur figuren.

8. **Max 0/3/¤**

Eleven tecknar en korrekt ändringskvot för någon andragradsfunktion +1 vg

där den valda andragradsfunktionen har minst två generella koefficienter +1 vg

Eleven utför ett godtagbart bevis för den valda funktionen +1 vg

Redovisad godtagbar bevisföring som bygger på det generella fallet $f(x) = ax^2 + bx + c$ med ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk. ¤

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$y = x^2 \quad y' = 2x$

Derivatans definition $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$y' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} =$

$\dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a$ eller $2x$ om man använder x istället för a

Kommentar: Eleven tecknar en korrekt ändringskvot för en andragradsfunktion och utför ett godtagbart bevis. Kvaliteten i elevlösningen bedöms vara precis över gränsen för att erhålla 2 vg-poäng.

Elevlösning 2 (3 vg)

$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

antag $\underline{f(x) = x^2 + ax + b}$ en generell andragrads-ekvation

$f'(x) = \dfrac{(x+h)^2 + a(x+h) + b - (x^2 + ax + b)}{h} =$

$\dfrac{x^2 + 2xh + h^2 + ax + ah + b - x^2 - ax - b}{h} =$

$\dfrac{2xh + h^2 + ah}{h} = \dfrac{\cancel{h}(2x + h + a)}{\cancel{h}}$

$f'(x) \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + a) = \underline{\underline{2x + a}}$ en generell förstagradsekvation

Kommentar: Eleven tecknar en godtagbar ändringskvot för en andragradsfunktion som innehåller minst två generella koefficienter samt utför ett godtagbart bevis.

Elevlösning 3 (3 vg och ¤)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh - ax^2 - bx}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b) =$$

$2ax + b$ vilket är en funktion av första graden

Kommentar: Redovisad godtagbar bevisföring som bygger på det generella fallet $f(x) = ax^2 + bx + c$ med ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk.

Del II

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
9.			**Max 3/0**
	a)	Redovisad godtagbar lösning (134 000 kr)	+1 g
	b)	Redovisad godtagbar ansats, t ex korrekt derivering	+1 g
		med godtagbart svar (29 600 kr/år)	+1 g
10.			**Max 2/0**
	a)	Godtagbart svar (t =3)	+1 g
	b)	Redovisad godtagbar lösning (97 jästceller/timme)	+1 g
11.			**Max 0/4**
	a)	Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $345000 = 112000 \cdot a^5$	+1 vg
		med godtagbart svar (25 %)	+1 vg
	b)	Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $500000 = 85000 \cdot 1{,}20^t$	+1 vg
		med godtagbart svar (9,7 år)	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**

12. **Max 1/1**

Beskrivningen innehåller en av nedanstående punkter +1 g
Beskrivningen innehåller ytterligare en av nedanstående punkter +1 vg

- att grafens lutning eller tangentens riktningskoefficient är 1
- att den punkt på grafen som är aktuell är den punkt där *x*-koordinaten är 4

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g)

SVAR: Lutningen är ju 1

Elevlösning 2 (1 g och 1 vg)

Det betyder att k-värdet i grafen vid x=4 är 1

Kommentar: Kvaliteten i elevlösning 1 och 2 bedöms vara precis över gränsen för att erhålla 1 g-poäng respektive 1 g-poäng och 1 vg-poäng.

13. **Max 2/2**

a) Korrekt svar $\left(\frac{(b-x)(h+x)}{2}\right)$ +1 g

b) Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $\frac{bh}{2}=\frac{(b-x)(h+x)}{2}$ +1 g
med godtagbar bestämning av x, $(x=b-h)$ +1 vg

c) Godtagbar slutsats ("Den andra triangelns bas blir lika lång som den första triangelns höjd och den andra triangelns höjd blir lika lång som den första triangelns bas.") +1 vg

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

14. **Max 1/1/¤**

Nedan ges två alternativa bedömningsanvisningar. Elevens val av lösningsmetod styr vilken bedömningsanvisning som ska användas.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** ⟶		**Högre**
Elevlösning baserad på **specialfall**	Eleven visar för ett specialfall att ljudnivån ökar med 7 dB. (1/0)	Eleven styrker sin argumentation om att ljudnivån ökar med 7 dB genom att visa detta för fler än ett specialfall. (1/1)	
Elevlösning baserad på **generell metod**		Eleven tecknar ett generellt uttryck. (1/1)	Eleven tecknar ett generellt uttryck och visar att ljudnivån ökar med 7 dB. (1/1/¤)

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1vg)

$L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot N)$ (N = antalet körmedlemmar)

10 personer ⟶ 50 personer

$L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 10)$ $\qquad$ $L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 50)$

$10 \cdot 7.3 = 73$ dB $\qquad$ $10 \cdot 8 = 80$ dB

1 person ⟶ 5 personer

$L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 1)$ $\qquad$ $L = 10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 5)$

$L = 10 \cdot 6.3 = 63$ dB $\qquad$ $L = 10 \cdot 7 = 70$ dB

Svar: Det ökar alltså med 7 dB

Kommentar: Eleven visar att ökningen i ljudnivå är 7 dB för två specialfall.

Elevlösning 2 (1 g och 1 vg)

$10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot N)$

$10 \cdot \log(2 \cdot 10^6 \cdot 5N)$

$\log\left(\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 5N}{2 \cdot 10^6 \cdot N}\right) 10 = \log 5 \cdot 10 = \log 50 = 1{,}69$

?

Kommentar: Eleven tecknar ett generellt uttryck, men utför en felaktig förenkling.

Elevlösning 3 (1 g och 1 vg och ¤)

Svar: Ljudnivån ökar med $\lg 5 \cdot 10$ dB (6,99dB)

$10 \cdot \lg(2 \cdot 10^6 \cdot 5x) - 10 \cdot \lg(2 \cdot 10^6 \cdot x) = \Delta L$

$\lg(2 \cdot 10^6 \cdot 5x) - \lg(2 \cdot 10^6 \cdot x) = \frac{\Delta L}{10}$

(enligt logaritmlagarna $\lg 5x = \lg 5 + \lg x$)

$\lg 2 + 6 + \lg 5 + \lg x - (\lg 2 + 6 + \lg x) = \frac{\Delta L}{10}$

$\cancel{\lg 2} + \cancel{6} + \lg 5 + \cancel{\lg x} - \cancel{\lg 2} - \cancel{6} - \cancel{\lg x} = \frac{\Delta L}{10}$

$\Rightarrow \lg 5 \cdot 10 = \Delta L$

Kommentar: Eleven tecknar ett generellt utryck för ökningen i ljudnivå och förenklar, om än något omständligt, uttrycket. Skrivsättet $\lg 5 \cdot 10$ är inte lämpligt, men eleven behandlar uttrycket korrekt på sin räknare.

15. **Max 0/3**

Godtagbart tecknad ekvation, t ex $\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = 6 \cdot 10^9$ +1-2 vg

med godtagbart svar (21 dagar) +1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$1 + 3 + 9 + \ldots \qquad k = 3, \; a_0 = 1$

$$1 \cdot \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 6\,000\,000\,000$$

$$3^n - 1 = 12\,000\,000\,000$$

$$3^n = 12\,000\,000\,001$$

$$\lg 3^n = \lg 12\,000\,000\,001$$

$$n = \frac{\lg 12\,000\,000\,001}{\lg 3} \approx 21{,}12$$

SVAR: Ca. 21 dgr

Kommentar: Den uppställda ekvationen baseras på användandet av geometrisk summa men första termens värde är felaktig. Eleven löser ekvationen korrekt.

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**

16. **3/3/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

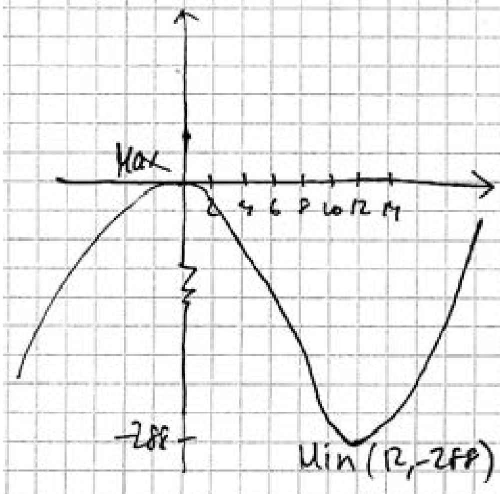
Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** ⟶	**Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven använder någon godtagbar metod för bestämning av extrempunkterna: max. $(0,0)$ och min. $(12,-288)$ samt skissar grafen. **1-2 g**	Eleven använder någon godtagbar metod för bestämning av extrempunkterna samt skissar grafen och eleven påbörjar en generell undersökning i tredje punkten och finner att derivatans nollställen är $x_1 = 0$ och $x_2 = -2a$ **2 g och 1 vg**	**2/1**
Matematiskt resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i andra punkten, t ex ”Om $a = -6$ blir origo en maxpunkt och när $a = 3$ blir origo en minpunkt”. **1 g**	Eleven drar, i tredje punkten, ytterligare någon eller några godtagbara slutsatser angående både punkternas läge och karaktär baserat på prövning av specialfall eller generell undersökning. **1 g och 1 vg**	**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt. **1 vg**	**0/1**
Summa			**3/3**

Eleven utför godtagbart punkterna 1 och 2.
Eleven väljer en generell metod i tredje punkten och beräknar extrempunkternas koordinater uttryckt i a. Eleven undersöker de två typfallen $a < 0$ och $a > 0$ och drar slutsatser både om extrempunkternas karaktär och koordinater. Någon av slutsatserna verifieras med generell metod. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16

Elevlösning 1 (3 g)

• Grafräknaren ger att
Min $(12, -288)$
Max $(-8{,}21 \cdot 10^{-7}, -4.04 \cdot 10^{-12})$



• När konstanten a är positiv kommer kurvans minpunkt i (0,0) och när a är negativ blir det tvärtom

Bedömning

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X		2/0	Eleven tolkar inte grafräknarens resultat till (0,0)
Matematiska resonemang	X		1/0	Otydlig slutsats.
Redovisning och matematiskt språk				Lösningen är för kortfattad för att redovisning och matematiskt språk ska kunna bedömas.
Summa			**3/0**	

Kommentar: Kvaliteten i elevens lösning vad gäller de två första aspekterna (metodval/genomförande samt resonemang) bedöms vara precis över gränsen för att erhålla 2 respektive 1 g-poäng.

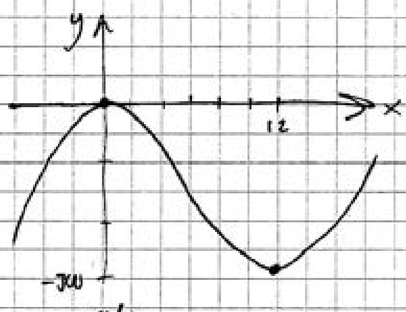
Elevlösning 2 (3 g och 2 vg)

• $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2$

$y' = 1x^2 - 12x$

$y' = 0 \Rightarrow 0 = x(x-12) \Rightarrow x_1 = 0$ och $x_2 = 12$

x		0		12	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	0	↘	−288	↗

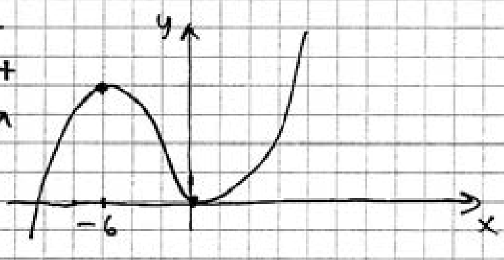


• $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$

$y' = x^2 + 6x$

$y' = 0 \Rightarrow 0 = x(x+6) \Rightarrow x_1 = 0$ alt $x_2 = -6$

x		−6		0	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	36	↘	0	↗



Slutsats: Vid a = −6 ligger minimipunkten "efter" maxpunkten, dvs i 4:e kvadranten, vid a = 3 ligger maxpunkten "före" minimipunkten, dvs i 2:a kvadranten

• Jag gör en undersökning på grafräknaren

a	maximipunkt	minimipunkt
−100	(0,0)	(200, −1333333)
−50	(0,0)	(100, −166666,7)
−10	(0,0)	(20, −1333,333)
10	(−20, 1333,3333)	(0,0)
50	(−100, 166666,67)	(0,0)
100	(−200, 1333333,3)	(0,0)

Slutsats: Alla graferna har en extrempunkt i punkten (0,0). När a är negativ är det en maximipunkt och när a är positiv är det en minimipunkt.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/1	Slutsatsen i punkt 3 är mer relevant och tydligare än slutsatsen i punkt 2. Eleven väljer systematiskt olika värden på *a* vilka kan anses vara väl valda.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Redovisningen är lätt att följa och förstå. Men vissa språkliga brister framträder, t ex bruket av ”före” och ”efter” gör att slutsatsen i punkt 2 är otydlig.
Summa		**3/2**	

Kommentar: Kvaliteten i elevens lösning vad gäller de två sista aspekterna (resonemang och redovisning/språk) bedöms vara precis över gränsen för att erhålla vg-poäng.

Elevlösning 3 (3 g och 3 vg)

$y = \frac{x^3}{3} + ax^2 \qquad a \neq 0$

$y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 \qquad a = -6$

$y'(x) = \frac{3x^2}{3} - 12x = x^2 - 12x$

$x^2 - 12x = x(x-12)$

$x(x-12) = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases}$

teckenstudium

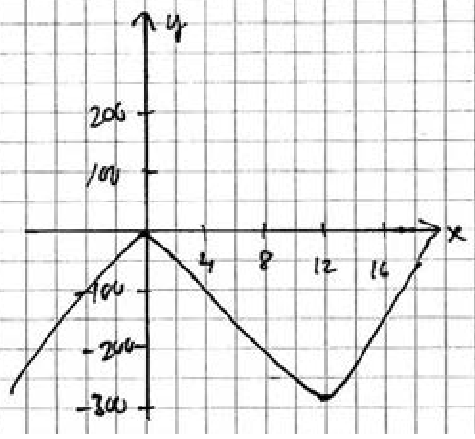
	$x<0$	0	$<x<$	12	$<x$
x	−	0	+	+	+
$(x-12)$	−	−	−	0	+
$y'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$y_{max}(x) = \frac{x^3}{3} - 6x^2 = \frac{0^3}{3} - 6 \cdot 0^2 = 0$

max punkt $(0,0)$

$y_{min}(x) = \frac{x^3}{3} - 6x^2 = \frac{12^3}{3} - 6 \cdot 12^2 = -288$

min punkt $(12, -288)$



SVAR: max 0
min 12
koordinaterna:
$(0,0)$ och
$(12,-288)$

· Vilket a man än använder så blir alltid första extrempunkten en maximipunkt, om man går från vänster till höger.

· $a < 0$ $a > 0$

$y = \frac{x^3}{3} + ax^2$

om $a > 0$ är a positivt alltså $+a$

$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + ax^2$

$y'(x) = \frac{3x^2}{3} + 2ax =$

$x^2 + 2ax$

$x^2 + 2ax = x(x+2a)$

$x(x+2a) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2a \end{cases}$

Extrempunkterna ligger vid 0 och $-2a$

teckenschema

	$x <$	$-2a$	$< x <$	0	$< x$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2a)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{max}(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 = -\frac{2a^3}{3} + a(-2a^2) =$

$= -\frac{8a^3}{3} + a(4a^2) = -\frac{8a^3}{3} + 4a^3 =$

$-\frac{8a^3}{3} + \frac{12a^3}{3} = -8a^3 + 12a^3 = \underline{\underline{\frac{4a^3}{3}}}$

Maxpunkt: $(-2a, 4a^3)$

$y_{min}(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 = \frac{0^3}{3} + a \cdot 0^2 = 0$ Minpunkt $= (0,0)$

Om $a < 0$ år a $\Rightarrow$ negativt alltså $-a$

$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} - ax^2$

$y'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2ax = x^2 - 2ax$

$x^2 - 2a = x(x-2a) \Rightarrow x(x-2a) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2a \end{cases}$

Extrempunkterna ligger vid 0 och 2a

teckenstudium

	$x <$	0	$< x <$	2a	$< x$
x	−	0	+	+	+
$(x-2a)$	−	−	−	0	+
$y'(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	↗	max	↘	min	↗

$y_{max}(x) = \frac{x^3}{3} - ax^2 = \frac{0^3}{3} - a \cdot 0^2 = 0$ Maxpunkt $(0,0)$

$y_{min}(x) = \frac{x^3}{3} - ax^2 = \frac{2a^3}{3} - a(2a)^2 = \frac{8a^3}{3} - a(4a^2) =$

$\frac{8a^3}{3} - 4a^3 = \frac{8a^3}{3} - \frac{12a^3}{3} = -4a^3$ Minpunkt $(2a, -4a^3)$

dvs.	$+a$	$-a$
max	$(-2a, 4a^3)$	$(0,0)$
min	$(0,0)$	$(2a, -4a^3)$

Som man ser i tabellen blir allting precis tvärtom!

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/1	Felaktigt beräknad y-koordinat.
Matematiska resonemang	X	1/1	Slutsatserna baseras på en generell undersökning och sammanfattar det väsentligaste i uppgiften.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Redovisningen är tydlig och strukturerad. Språket är i huvudsak lämpligt, men vissa brister framträder såsom ”om $a < 0$ är a negativt alltså $-a$”. Eleven sätter t ex likhetstecken mellan $y_{\min}(x)$ och $y(12)$ samt använder parenteser felaktigt.
Summa		**3/3**	

Elevlösning 4 (3 g och 3 vg och ¤)

- $y = 1/3\,x^3 - 6x^2$

  $y' = x^2 - 12x$

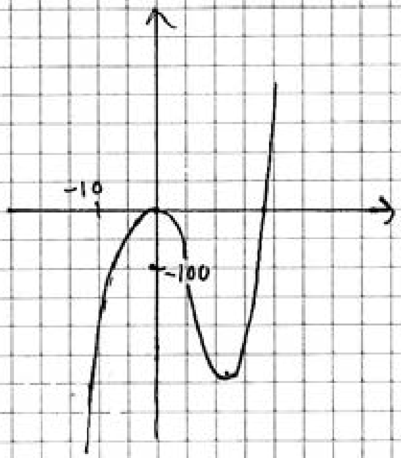
  $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 12$

x		0		12	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	0	↘	−288	↗

$y = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 18$

Maximipunkt (0,0)

Minimipunkt (12,−288)



- Det ena extremvärdet ligger alltid på (0,0) eftersom $x^2 + 2ax = 0$ har en rot som är lika med noll och $x^3/3 + ax^2$ inte har någon konstant (k) som höjer eller sänker grafen ($x = 0 \Rightarrow y = 0$)

  När a var negativt, blev (0,0) maxpunkt och (−2a, y(−2a)) minpunkt, när a var positivt blev (0,0) minpunkt och (−2a, y(−2a)) maxpunkt.

  Ju större a:s absolutvärde är, desto längre förskjuts sistnämnda extrempunkt från origo.

- $y = 1/3\,x^3 + ax^2$

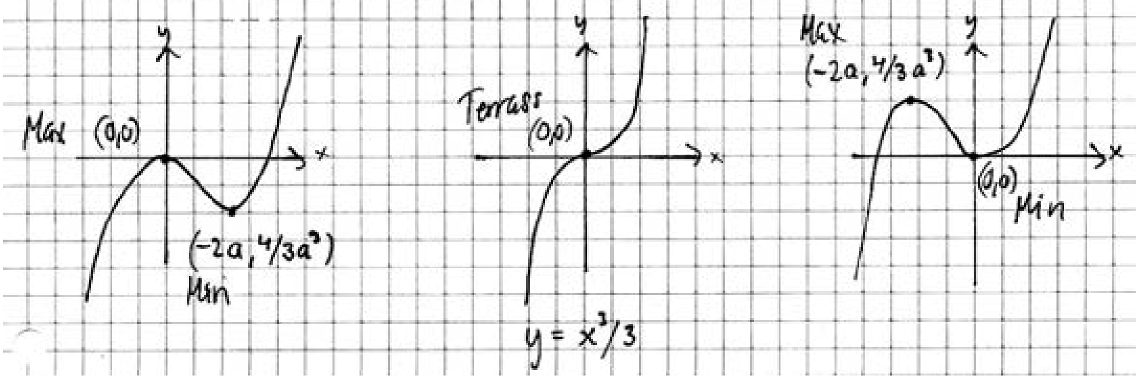
$y' = x^2 + 2ax$

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = -2a$

$y(-2a) = 1/3 \cdot (-2a)^3 + a(-2a)^2 = -\frac{8a^3}{3} + \frac{12a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}$

x	0	$-2a$
y'	0	0
y	0	$4/3\ a^3$

$a < 0$ $a = 0$ $a > 0$



Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/1	
Matematiska resonemang	X	1/1	Eleven ger generella slutsatser redan i punkt 2, vilket får anses vara godtagbart.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Elevens matematiska språk är i huvudsak korrekt. Redovisningen är delvis knapphändig.
Summa		**3/3/¤**	

Kommentar: Eleven beräknar extrempunkternas koordinater uttryckt i *a*. Eleven undersöker de två typfallen $a < 0$ och $a > 0$ och drar slutsatser både om extrempunkternas karaktär och om dess koordinater. Slutsatser som rör extrempunkternas koordinater verifieras generellt. Redovisningen av standardberäkningar, t ex ekvationslösning, kan ibland upplevas som knapphändig, men redovisningen är i sina väsentliga delar ändå tydlig och välstrukturerad. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt.

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)
R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)
A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)
D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					