NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS C HÖSTEN 2005

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C och D”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C och D”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 19 uppgifter. **Del I** består av 8 uppgifter och **Del II** av 11 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 19 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 44 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 13 poäng. Väl godkänd: 26 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänd: 26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de ¤-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

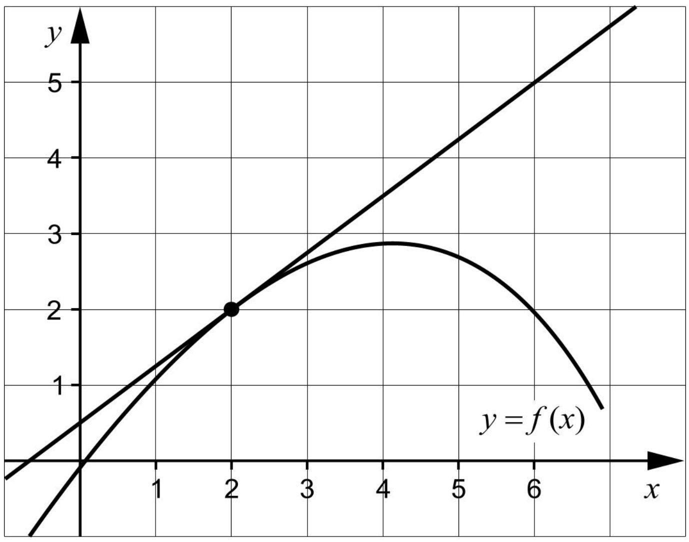
Del I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = x^3 - x^2$ *Endast svar fordras* (1/0)

2. Figuren visar grafen till en funktion $y = f(x)$ och tangenten i den punkt på kurvan där $x = 2$

Bestäm $f'(2)$ *Endast svar fordras* (1/0)



3. Lös ekvationerna. Svara exakt.

a) $10^x = 0{,}6$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $\lg x = 0{,}6$ *Endast svar fordras* (1/0)

4. Grafen till funktionen $f(x) = x^4 - 4x$ har endast en extrempunkt. Extrempunktens x-koordinat är 1.

Avgör om denna extrempunkt är en maximi - eller minimipunkt. (1/0)

5. Lös ekvationen $5x^3 - 45x = 0$ (2/0)

6. Vikten y hos en växande pumpa är en funktion av tiden t, det vill säga $y = f(t)$
Vikten y mäts i kg och tiden t i dygn.

Vad får man veta genom att bestämma $f'(10)$?
Välj ett av alternativen A-E. *Endast svar fordras* (0/1)

A Den vikt i kg som pumpan har vid tiden 10 dygn.

B Pumpans viktökning i kg under 10 dygn.

C Den tid det tar för pumpans vikt att öka med 10 kg/dygn.

D Den tid det tar för pumpans vikt att öka till 10 kg.

E Pumpans viktökning i kg/dygn vid tiden 10 dygn.

7. En spegel ska tillverkas av ett rektangulärt spegelglas omgivet av en träram.

Ramen ska tillverkas av en 0,5 dm bred trälist. Totalt ska 60 dm trälist användas. Ramen ska ha dubbla lister som över- och understycken, medan sidostyckena ska bestå av enkel list, se figuren.

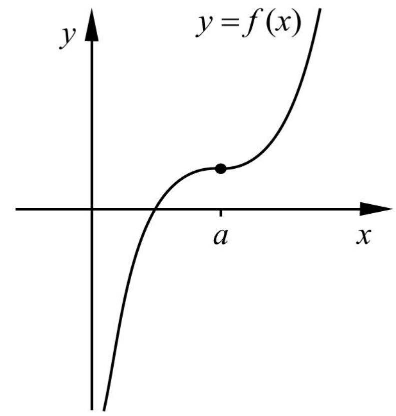
Spegelglasets area A dm^2, som funktion av överstyckets längd x dm ges av sambandet

$A(x) = -2x^2 + 32x - 30$

a) Använd derivata och bestäm för vilket värde på längden x som arean av spegelglaset är maximal. (3/0)

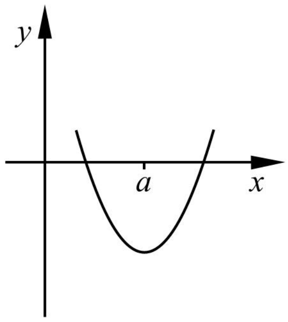
b) Visa att spegelglasets area A kan skrivas $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$ (0/2/¤)

8. I figuren nedan visas grafen till tredjegradsfunktionen $y = f(x)$
För $x = a$ har grafen en terrasspunkt.

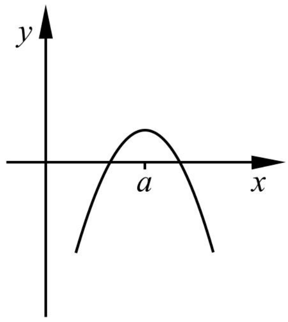


Vilken av figurerna A-F visar en graf till funktionen $y = f'(x)$?
Motivera ditt val. (0/1/¤)

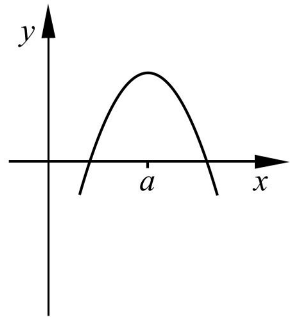
A



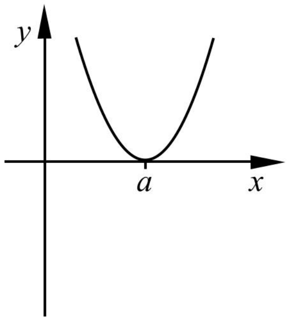
B



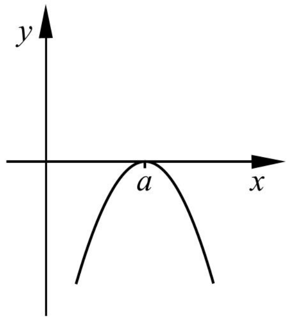
C



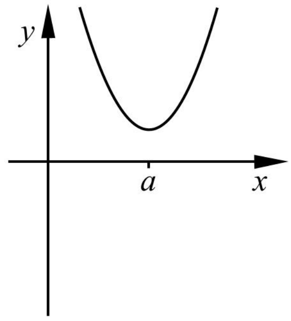
D



E



F



Del II

Denna del består av 11 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Beräkna

a) $\lg 2 + \lg 5$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $\lg 5^2 + (\lg 5)^2$ *Endast svar fordras* (1/0)

10. Formulera ett problem som handlar om en verklig situation som kan lösas med hjälp av ekvationen $5000 = 10000 \cdot 0{,}6^x$ (2/0)

11. Antalet skickade SMS har ökat i Sverige:

1998 skickades 44 miljoner SMS.

Fem år senare, år 2003, skickades 1816 miljoner SMS.

(Källa: Post- och Telestyrelsen)

a) Beräkna den årliga genomsnittliga ökningen av antalet skickade SMS. (1/0)

b) Beräkna den årliga procentuella ökningen av antalet skickade SMS. (0/2)

12. Derivera följande funktioner

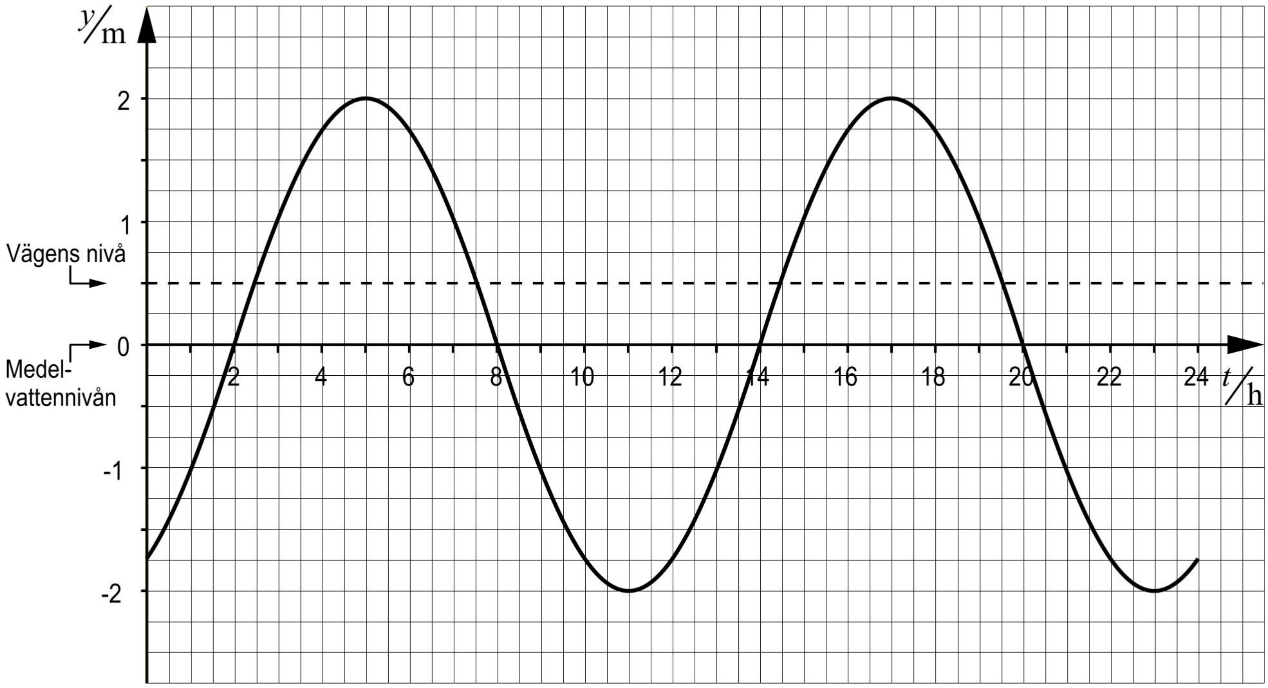
a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = \mathrm{e}x$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $f(x) = x^{\mathrm{e}}$ *Endast svar fordras* (0/1)

13. I nordöstra England finns en ö, ”The Holy Island of Lindisfarne”, som man bara kan nå med hjälp av en ”causeway”. Det är en väg som det inte går att köra på under vissa delar av dygnet eftersom tidvattnet då täcker vägen.

Tidvattennivån varierar kring medelvattennivån, enligt diagrammet nedan. Tidvattennivån y mäts i meter och tiden t i timmar. Tiden räknas från midnatt. Vägen till Holy Island ligger 0,5 m över medelvattennivån.



a) Hur högt över vägbanan når tidvattennivån som högst?

Endast svar fordras (1/0)

b) Vid vilken tidpunkt på eftermiddagen börjar vattnet stiga över vägbanan och med vilken hastighet sker detta? (1/1)

14. Ett rationellt uttryck är kvoten av två polynom.
Vad måste gälla för att ett rationellt uttryck ska vara definierat? (0/1)

15. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $(x^2-6)(x^2+6)-x^4$ (1/0)

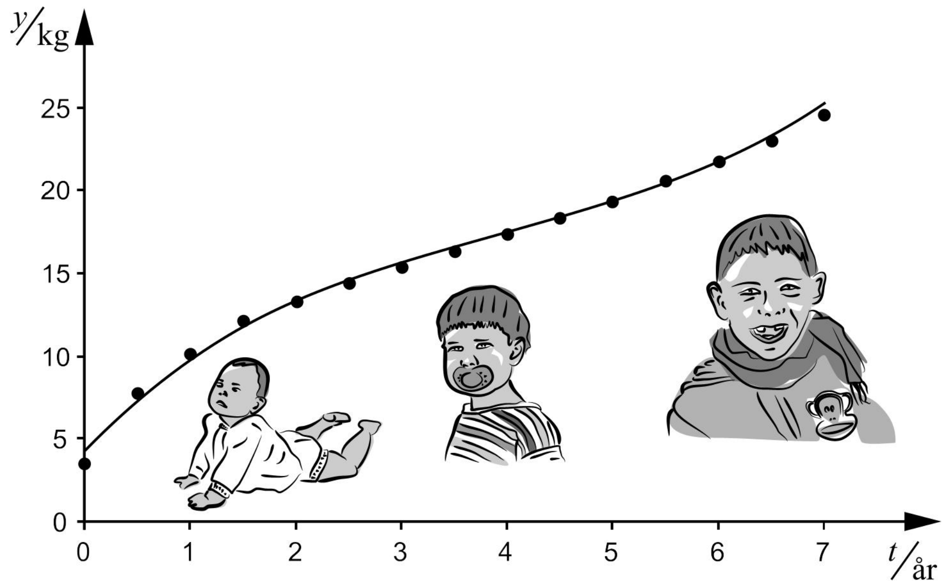
b) $\dfrac{2a^2-8a}{4-a}$ (1/1)

c) $\dfrac{3^x \cdot 3^x}{3^x+3^x+3^x}$ (1/1)

16. För en funktion $y = f(x)$ är derivatan $f'(x) = x^2 + 2x - 5$

Bestäm de värden på x för vilka grafen till $y = f(x)$ har en tangent med riktningskoefficienten 3. (0/2)

17. Mätpunkterna i diagrammet nedan visar hur Olles vikt ökar under hans sju första levnadsår. Diagrammet visar även en tredjegradskurva som är anpassad till mätpunkterna.



Tredjegradskurvan ges av $y = 0{,}10t^3 - 1{,}2t^2 + 6{,}5t + 4{,}4$
där Olles vikt y kg är en funktion av tiden t år.

a) Bestäm en funktion p som visar med vilken hastighet (kg/år) Olles vikt ökar. *Endast svar fordras* (0/1)

b) Beräkna den lägsta hastighet (kg/år) med vilken Olles vikt ökar. (0/2)

18. Bestäm $T'(2)$ då $T(x+h) = T(x) + h$ (0/1/¤)

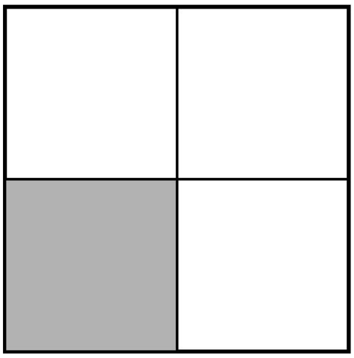
Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du genomför dina beräkningar
- Hur generell din lösning är
- Hur systematisk du är i din undersökning
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

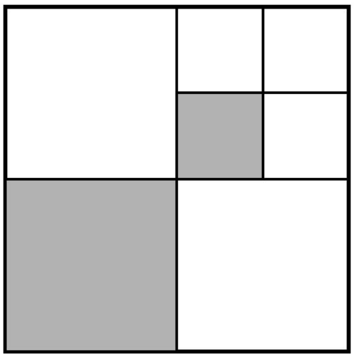
19. Figuren nedan visar tre kvadrater A, B och C som var och en består av ett antal mindre kvadrater. Vissa kvadrater är skuggade.

- Bestäm *andelen* skuggad yta hos var och en av kvadraterna A, B och C.

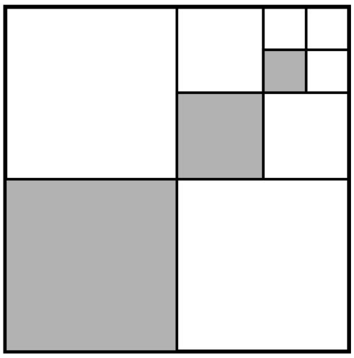
A



B

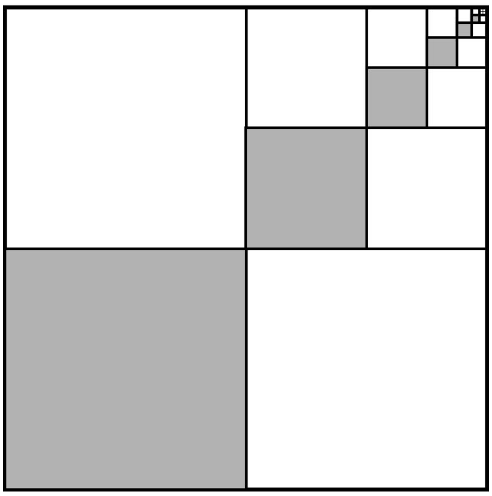


C



Studera nu kvadrat D. Antag att vi i denna kvadrat inför fler och fler allt mindre kvadrater och skuggar vissa av dem, enligt samma princip som ovan.

D



- Undersök och beskriv vad som då händer med *andelen* skuggad yta hos kvadrat D. Använd dina kunskaper om geometriska summor. (2/3/¤)

Innehåll

Sid nr

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 6, 7, 10, 11a, 11 b, 13a, 13b, 17a, 17b och 19. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 7b, 8, 10, 18 och 19. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 7b, 8, 18 och 19 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 10 och 19 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 7b och 11b.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik ht 2005 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde											Betygskriterium														
Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	1	0									x				x		x												
2	1	0										x			x		x												
3a	1	0				x									x		x												
3b	1	0				x									x		x												
4	1	0										x				x	x												
5	2	0								x							x												
6	0	1										x							x		x								
7a	3	0									x		x			x	x												
7b	0	2	¤						x										x	x	x	x	x				x		x
8	0	1	¤									x							x	x	x	x	x			x			
9a	1	0				x									x														
9b	1	0				x									x														
10	2	0				x											x												
11a	1	0									x				x		x												
11b	0	2				x	x												x		x	x	x						
12a	1	0									x			x	x		x												
12b	1	0									x			x	x		x												
12c	0	1									x			x					x			x	x						
13a	1	0			x										x														
13b	1	1									x				x		x		x		x	x	x						
14	0	1								x									x			x	x						
15a	1	0							x						x		x												
15b	1	1								x							x		x			x	x						
15c	1	1				x											x		x			x	x						
16	0	2									x	x							x		x	x	x						
17a	0	1											x						x		x	x	x						
17b	0	2										x	x						x		x	x	x						
18	0	1	¤											x					x	x	x	x	x		x				x
19	2	3	¤		x	x	x								x	x	x		x	x	x	x	x		x	x			x
Σ	24	20		2/0		8/6		4/4			10/10																		

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 24 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	13 poäng.
Väl godkänd:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift			
MVG-kvalitet	7b	8	18	19
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○	○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		○		○
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	○			
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	○		○	○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett.ex.empel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaC ht 2005)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
Del I		
1.		**Max 1/0**
	Korrekt svar ($f'(x) = 3x^2 - 2x$)	+1 g
2.		**Max 1/0**
	Korrekt svar (0,75)	+1 g
3.		**Max 2/0**
	a) Korrekt svar ($x = \lg 0{,}6$)	+1 g
	b) Korrekt svar ($x = 10^{0,6}$)	+1 g
4.		**Max 1/0**
	Korrekt svar (minimipunkt) med godtagbar verifiering	+1 g
5.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar bestämning av minst två lösningar	+1 g
	med godtagbar bestämning av ytterligare en lösning ($x_1 = 0$, $x_2 = 3$ och $x_3 = -3$)	+1 g
6.		**Max 0/1**
	Korrekt svar (E; Pumpans viktökning i kg/dygn vid tiden 10 dygn.)	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
7.		**Max 3/2/¤**

a) Godtagbar bestämning av derivatan, $A'(x) = -4x + 32$ +1 g

med godtagbar bestämning av derivatans nollställe, $x = 8$ +1 g

med godtagbar verifiering av maximum +1 g

b) En godtagbar härledning innehåller följande, om sidostyckets längd betecknas y:

- Eleven tecknar sambandet $4x + 2y = 60$ eller motsvarande
- Eleven tecknar sambandet $A = y \cdot (x - 1)$ eller motsvarande
- Eleven ger en godtagbar härledning av $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$ utifrån sambanden $A = y \cdot (x - 1)$ och $4x + 2y = 60$

Eleven redovisar en av ovanstående punkter +1 vg

Eleven redovisar ytterligare en av ovanstående punkter +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	utföra härledningen av uttrycket genom att redovisa alla de tre punkterna ovan.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt, dvs. införda beteckningar och uttryck förklaras med figur och/eller ord. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

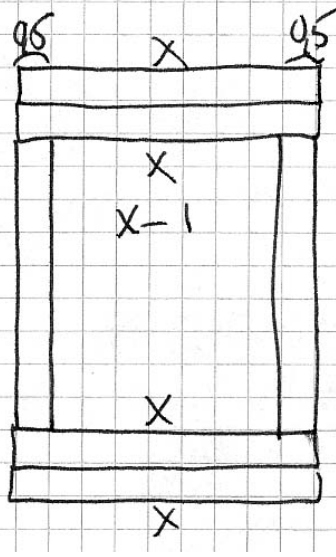
Elevlösning 1 (2 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$A(x) = (x-1)\left(\frac{60-4x}{2}\right) = 30x - 2x^2 - 30 + 2x$$
$$= -2x^2 + 32x - 30$$

Kommentar: Eleven härleder uttrycket $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$ och uppvisar därmed en av MVG-kvaliteterna. Lösningen uppvisar dock ingen MVG-kvalitet vad gäller redovisning eftersom de två faktorerna i uttrycket för arean inte förklaras.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

Elevlösning 2 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)



Kvar att dela på
$60-4x$

$A(x) = \left(\frac{60-4x}{2}\right)(x-1)$
$= 30x - 30 - 2x^2 + 2x$

Arean blir $-2x^2+32x-30$

Kommentar: Eleven härleder uttrycket $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$ och uppvisar därmed en av MVG-kvaliteterna. Redovisningen av uttryckets härkomst är något knapphändig. Trots detta bedöms kvaliteten i elevlösningen vara precis på gränsen för uppvisande av MVG-kvalitet med avseende på redovisningen.

8. **Max 0/1/¤**

Korrekt svar (alternativ D) med godtagbar förklaring +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera och dra slutsatser, genom att ge en fullständig förklaring till varför D är det korrekta alternativet.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

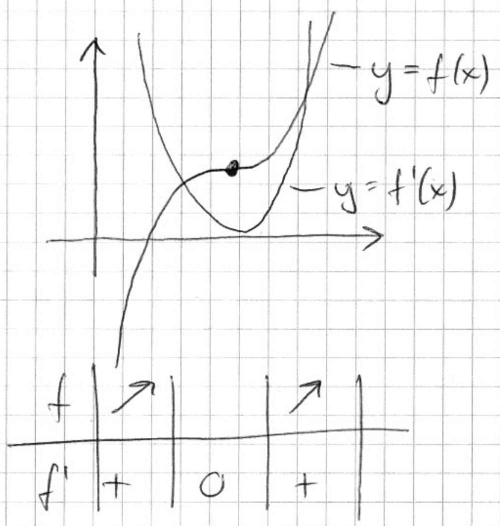
Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

Grafen stiger hela tiden. Då måste derivatan vara positiv. D är rätt!

Kommentar: Eleven gör en godtagbar koppling mellan grafens utseende och derivatan: stigande graf har positiv derivata. Motiveringen är dock ofullständig eftersom derivatans värde i terrasspunkten inte nämns över huvud taget.

Elevlösning 2 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna)



SVAR: D

Kommentar: Eleven ger en fullständig och korrekt koppling mellan grafens utseende och derivatans värden, även om derivatans graf är lite slarvigt ritad.

Elevlösning 3 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna)

Jag gissar på att D är rätt! Lutningen i y=f(x) är positiv, noll och positiv. Därför bör även funktionen av derivatan vara det.

Kommentar: Eleven ger en fullständig och korrekt koppling mellan grafens utseende och derivatans värden.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
9.		**Max 2/0**
a)	Korrekt svar (1)	+1 g
b)	Godtagbart svar (1,886)	+1 g
10.		**Max 2/0**
	Godtagbart formulerat problem som beskriver en situation där en exponentiell modell är rimlig	+1 g
	med korrekt använda värden	+1 g

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (0 g)

EN GAMMAL VOLVO KOSTAR 10000 KRONOR.
NÄR ÄR VÄRDET HÄLFTEN OM DET MINSKAR
MED 0,40 KRONOR VARSE DAG?

Kommentar: Elevens exempel beskriver en linjär modell.

Elevlösning 2 (1 g)

efter hur många år får man 8000 för TV:n
om den kostade 10000 och den minskar med
60% varje år

Kommentar: Elevens exempel beskriver en exponentiell modell men ändringsfaktorn är feltolkad.

Elevlösning 3 (2 g)

10000 kr kostar en dator. Efter hur
lång tid är den värd 5000 kr,
om värdeminskningen är 40 % per år?

Kommentar: Elevens exempel beskriver en exponentiell modell där värdena används korrekt.

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
11.			**Max 1/2**
	a)	Redovisad godtagbar lösning (354 miljoner/år)	+1 g
	b)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknat ekvationen $1816 = 44 \cdot a^5$	+1 vg
		med godtagbart svar (110 %)	+1 vg
12.			**Max 2/1**
	a)	Korrekt svar ($f'(x) = \mathrm{e}^x$)	+1 g
	b)	Korrekt svar ($f'(x) = \mathrm{e}$)	+1 g
	c)	Korrekt svar ($f'(x) = \mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}$)	+1 vg
13.			**Max 2/1**
	a)	Korrekt svar (1,5 m)	+1 g
	b)	Godtagbart svar (kl.14.30)	+ 1 g
		med godtagbar beräkning av hastigheten med korrekt enhet (1 m/h)	+1 vg

OBS: Enbart beräkning av hastigheten utan godtagbar tidsangivelse (kl.14.30) ger noll poäng.

14.			**Max 0/1**
		Godtagbart svar (”Att nämnaren är skild från noll.”)	+1 vg
15.			**Max 3/2**
	a)	Korrekt utveckling av parentesuttrycken med korrekt svar (-36)	+1 g
	b)	Korrekt fullständig faktorisering av täljaren, $2a(a-4)$	+1 g
		med korrekt svar ($-2a$)	+1 vg
	c)	Korrekt omskrivning som möjliggör vidare förenkling, t.ex. $3^x \cdot 3^x = 3^{2x}$	+1 g
		med godtagbart svar $\left(\frac{3^x}{3}\right)$	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

16. **Max 0/2**

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $x^2 + 2x - 5 = 3$ +1 vg

med korrekt svar $(2 \text{ och } -4)$ +1 vg

17. **Max 0/3**

a) Korrekt svar ($p = 0{,}30t^2 - 2{,}4t + 6{,}5$) +1 vg

b) Eleven visar insikt om att $p'(t)$ skall användas, t.ex. genom att dra en tangent i den punkt på kurvan där lutningen ser ut att vara minst +1 vg

med godtagbar bestämning av minsta värdet, t.ex. genom att beräkna den ritade tangentens riktningskoefficient (1,7 kg/år) +1 vg

18. **Max 0/1/¤**

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. eleven tecknar $\dfrac{T(x+h) - T(x)}{h}$ +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generella metoder, t.ex. genom att komma fram till att $T'(2) = 1$ med hjälp av derivatans definition eller genom att tolka uttrycket $T(x+h) = T(x) + h$ grafiskt.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$T(x+h) = T(x) + h$$

$$T'(x) = \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{T(x) + h - T(x)}{h} = 1$$

$$T'(2) = 1$$

Kommentar: Eleven använder en generell metod och bestämmer det sökta värdet, vilket visar på en av MVG-kvaliteterna. Det matematiska språket är dock inte lämpligt eftersom gränsvärdesbestämningen inte hanteras på ett korrekt sätt.

Elevlösning 2 (1 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$$T`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$$

$$T'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{T(2+h) - T(2)}{h} \quad \} \; T(2+h) = T(2) + h$$

$$T'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{T(2) + h - T(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{h} = \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 1$$

Kommentar: Eleven använder en generell metod och bestämmer det sökta värdet. Det matematiska språket är korrekt. Eleven uppvisar därmed två av MVG-kvaliteterna.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

19. **Max 2/3/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →	**Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven bestämmer godtagbart de sökta andelarna $\begin{pmatrix} 0{,}25; 0{,}3125 \text{ och} \\ 0{,}328125 \end{pmatrix}$ **1 g**	Eleven tecknar ett *korrekt* uttryck för andelens värde, t.ex. $\frac{0{,}25(0{,}25^{10}-1)}{0{,}25-1}$ **1 g och 1 vg**	**1/1**
Matematiskt resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven drar, med hjälp av sina kunskaper om geometriska summor, någon godtagbar slutsats om andelens värde i förlängningen. Slutsatsen baseras på … några enkla beräkningar, som t.ex. utgår från mätningar i kvadrat D. **1 g**	t.ex. ansättning av stora n i den geometriska summaformeln eller generella metoder. **1 g och 1 vg**	**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt. **1 vg**	**0/1**
Summa			**2/3**

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod och komma fram till att andelen har gränsvärdet $\frac{1}{3}$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera, på ett godtagbart sätt, vad som händer med $0{,}25^n$ när $n \to \infty$ och dra slutsatsen att $\lim_{n\to\infty} 0{,}25^n = 0$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 19

Elevlösning 1 (2 g)

a)

$A = \frac{2,3 \times 2,3}{4,6 \times 4,6}$ cm $= 0,25$

$B = 0,25 + \frac{1,1 \times 1,1}{4,6 \times 4,6} = 0,30$

$C = 0,30 + \frac{0,6 \times 0,6}{4,6 \times 4,6} = 0,32$

b)

D

Största 6,4×6,4

första 3,2 × 3,2 Andel: 0,25

andra 1,5 × 1,5 Andel: 0,055

$\frac{0,055}{0,25} = 0,22$

tredje 0,8 × 0,8 Andel: 0,0156

fjärde 0,4 × 0,4 Andel: 0,0039

femte 0,2 × 0,2 Andel: 9,765 E-4

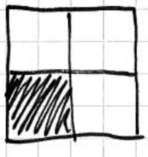
Geosumma: $0,25 \left(\frac{0,22^5 - 1}{0,22 - 1} \right) = 0,3203$

Det hamnar på 32% när man lägger på fler o fler.

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X →	1/0	Eleven bestämmer med hjälp av mätning i figurerna de sökta andelarna.
Matematiskt resonemang	X →	1/0	Eleven drar en slutsats, med hjälp av geometriska summaformeln, som baseras på mätningar i kvadrat D.
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa		**2/0**	

Kommentar: Eleven mäter i figurerna och avrundar upprepade gånger mitt i uträkningarna. Detta medför att elevens slutsats är oprecis och dåligt underbyggd. Lösningens kvalitet bedöms därför vara precis på gränsen för att ge 1 g-poäng vardera för aspekterna metodval och genomförande och matematiskt resonemang.

Elevlösning 2 (1 g och 2 vg)

A)  Jag sätter sidan till 10cm

Arean = längd · bredd

Längd på skuggad del : 5cm

Bredd på skuggad del : 5cm

Area : $5 \cdot 5 = 25$ Svar: 25 cm^2

B) Skuggade arean på 25 cm^2 kvarblir. Adderat med hälften av bredden och längden → arean

→ $25 \text{ cm}^2 + 2{,}5 \text{ cm} \cdot 2{,}5 \text{ cm} = 31{,}25 \text{ cm}^2$

Svar: $31{,}25 \text{ cm}^2$

C) Vi kan nu se ett mönster, dividerar man arean med talet 4 får den mindre kvadratens area på nästa bild

→ $\frac{6{,}25}{4} = 1{,}5625$

$31{,}25 + 1{,}5625 = 32{,}8125$ Svar: $32{,}8125 \text{ cm}^2$

D) Sidan är fortfarande 10

Jag använder $a\left(\frac{k^n - 1}{k-1}\right)$ där $k \neq 1$

$25 + 25 \cdot 0{,}25 + 25 \cdot 0{,}25^2 + \ldots$

~~Detta tal använde~~ forts.

0,25

↑

Detta tal använder jag eftersom det hela tiden ökas ~~...~~ på med en fjärdedel av kvadraten på arean.

$$25 \cdot \left(\frac{0{,}25^3 - 1}{0{,}25 - 1} \right) = 32{,}8125$$

Om jag byter exponenttalet mot

5 fås 33,30078125

10 fås 33,33330154

50 fås 33,33333333

Svar: ju större exponenttalet är i exponenten ju mer går arean mot 33,333...

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	→	0	Eleven räknar på areor istället för andelar och tecknar därmed ett felaktigt uttryck för andelens värde.
Matematiskt resonemang	X →	1/1	Eleven visar numeriskt för stora *n* hur arean närmar sig 33,3333 cm^2
Redovisning och matematiskt språk	X →	0/1	Redovisningen är i huvudsak lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt.
Summa		**1/2**	

Kommentar: Eleven ansätter en sidlängd och beräknar areor istället för andelar. Den geometriska summaformel som sedan tecknas är korrekt utifrån ett areaperspektiv. Felet underlättar inte problemet nämnvärt.

Elevlösning 3 (2 g och 3 vg och en av MVG-kvaliteterna)

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{5}{16}$

C $\frac{21}{64}$

$$a_1\left(\frac{k^n-1}{k-1}\right) = a_1\left(\frac{1-k^n}{1-k}\right)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}^n\right)}{\frac{3}{4}} \text{ går mot } \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/1	Eleven beräknar de sökta andelarna och tecknar en korrekt summa.
Matematiskt resonemang	X	1/1	Se nedan.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Se nedan.
Summa		**2/3**	

Kommentar: Eleven väljer en generell metod och kommer fram till att andelen är en tredjedel. Lösningen uppvisar därmed en MVG-kvalitet. Eleven inser (?) att potensen går mot noll men visar inte hur gränsvärdet bestäms. Det matematiska språket, i den mån det visas över huvud taget, är lämpligt förutom potensen som skrivs utan parentes. Redovisningen är mycket kortfattad. Sammantaget bedöms lösningens kvalitet därför vara precis på gränsen för att ge 1 vg-poäng vardera när det gäller aspekterna matematiskt resonemang samt redovisning och matematiskt språk.

Elevlösning 4 (2 g och 3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

A) $\frac{1}{4}$ är skuggad (0,25)

B) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ är skuggad (0,3125)

C) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64}$ är skuggad (0,328125)

D) n = antalet skuggade småkvadrater

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4^n}$$

$$S = a\left(\frac{k^n - 1}{k-1}\right) \qquad a = \frac{1}{4}, \quad k = \frac{1}{4}$$

När n blir större och större går $\frac{1}{4^n}$ mot 0

$$\frac{1}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{4^n} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} \text{ går mot } \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{-\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{3}$$

SVAR: Andelen går mot $\frac{1}{3}$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/1	
Matematiskt resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/3**	

Kommentar: Elevlösningen uppvisar alla tre MVG-kvaliteter: Eleven använder en generell metod och kommer fram till att andelen har gränsvärdet $\frac{1}{3}$ genom att diskutera potensens värde i förlängningen. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt, även om rekursionsformeln inte är definierad.

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)
R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)
A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)
D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	7b	8	18	19	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	7b	8	18	19	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	7b	8	18	19	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					