

Prov som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap. 4 § offentlighets- och sekretesslagen (2009:400). Avsikten är att detta prov ska kunna återanvändas t.o.m. 2017-12-31.
Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS C HÖSTEN 2011

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 120 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C". <i>Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.</i> Del II: Miniräknare, även symbolhanterande räknare och "Formler till nationellt prov i matematik kurs C".
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. <i>Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.</i>
Provet	Provet består av totalt 18 uppgifter. Del I består av 8 uppgifter och Del II av 10 uppgifter. Till några uppgifter (där det står <i>Endast svar fordras</i>) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 8 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 45 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med $\square$, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. Undre gräns för provbetyget Godkänt: 13 poäng. Väl godkänt: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 15 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de $\square$ -märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm $f'(x)$

- | | | |
|----------------------|----------------------------|-------|
| a) $f(x) = 2x^4 - 8$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| b) $f(x) = 5e^{3x}$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| c) $f(x) = x^{n+1}$ | <i>Endast svar fordras</i> | (0/1) |

2. Följande uttryck är givet: $3x^4 - 9x - 2x^4 + x$

- | | | |
|--|----------------------------|-------|
| a) Förenkla uttrycket så långt som möjligt. | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| b) Faktorisera det förenklade uttrycket. | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| c) Lös ekvationen $3x^4 - 9x - 2x^4 + x = 0$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |

3. a) Lös ekvationen och svara exakt.

$x^5 = 6$	<i>Endast svar fordras</i>	(1/0)
-----------	----------------------------	-------

- | | | |
|---|----------------------------|-------|
| b) I vilket av följande intervall finns lösningen till ekvationen $x^5 = 6$? | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
|---|----------------------------|-------|

A. $-2 \leq x < -1$

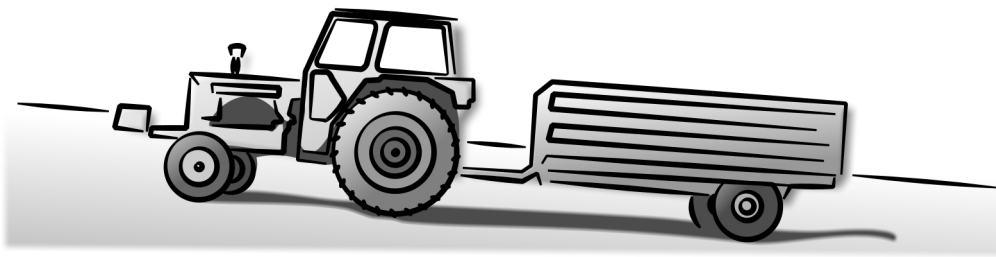
B. $-1 \leq x < 0$

C. $0 \leq x < 1$

D. $1 \leq x < 2$

E. $2 \leq x < 3$

4. En traktors bränsleförbrukning beror bland annat av traktorns hastighet, vägens lutning och vikten på den last traktorn har.



Vid en viss lutning och vikt har traktorn en bränsleförbrukning B (liter/km) som är beroende av traktorns hastighet v (km/h). Enligt en enkel modell kan traktorns bränsleförbrukning i detta fall beskrivas med sambandet:

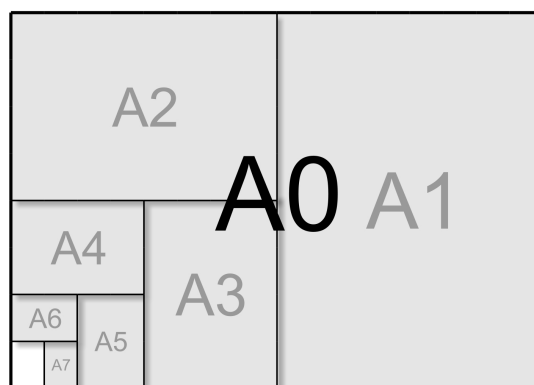
$$B(v) = 0,001v^2 - 0,04v + 0,9$$

Använd derivata och visa att bränsleförbrukningen är lägst vid hastigheten 20 km/h.

(3/0)

5. Beräkna det exakta värdet av uttrycket $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ då $x = 2,0123456789$ (0/1)

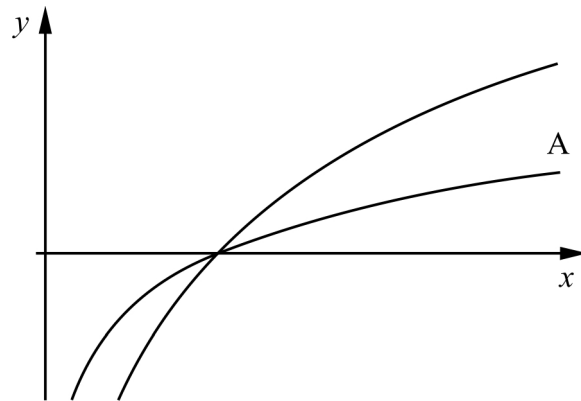
6. A-format är den vanligaste standarden för pappersformat i Europa. Grundformatet A0 har en area som är 1 m^2 . De övriga formaten A1-A7 fås genom upprepad halvering av formatet A0, se figur.



- a) Hur stor area (i m^2) har ett papper med formatet A3?
Endast svar fordras (1/0)
- b) Tolka vad man beräknar med uttrycket $\frac{0,5 \cdot (0,5^6 - 1)}{0,5 - 1}$ i detta sammanhang, se figuren ovan. (0/2)
- c) Vilket värde närmar sig uttrycket $\frac{1 \cdot (0,5^n - 1)}{0,5 - 1}$ då n blir större och större?
Motivera ditt svar. (0/2/□)

7. Figuren visar graferna till $y = \ln x$ och $y = \lg x$.
Vilken av dessa funktioner har markerats med A? Motivera ditt val.

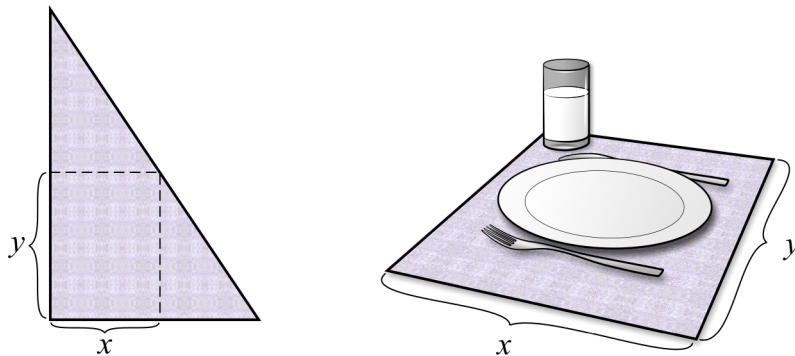
(0/1/□)



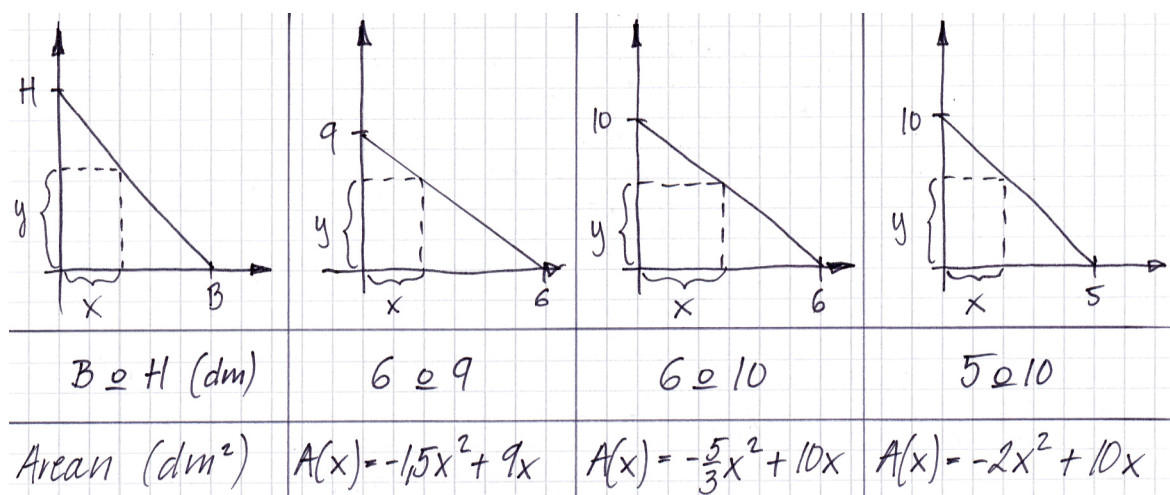
Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

8. Kim har startat ett företag inom "Ung Företagsamhet" (UF). Han kommer att få överblivna tygbitar från en fabrik och ska tillverka tallriksunderlägg. Han vet inte exakt vilka mått bitarna kommer att ha men fabriken kan garantera att tygbitarna har formen av en rätvinklig triangel. Ur dessa tygbitar ska Kim klippa rektangulära tallriksunderlägg med bredden x och längden y , se figur.



Kim vill undersöka hur han ska klippa för att tallriksunderläggets area ska bli så stor som möjligt. Han börjar med att undersöka tre olika typer av tygbitar med tänkbara mått. Kim betecknar de triangelformade tygbitarnas höjd med H och bas med B och kommer fram till följande:

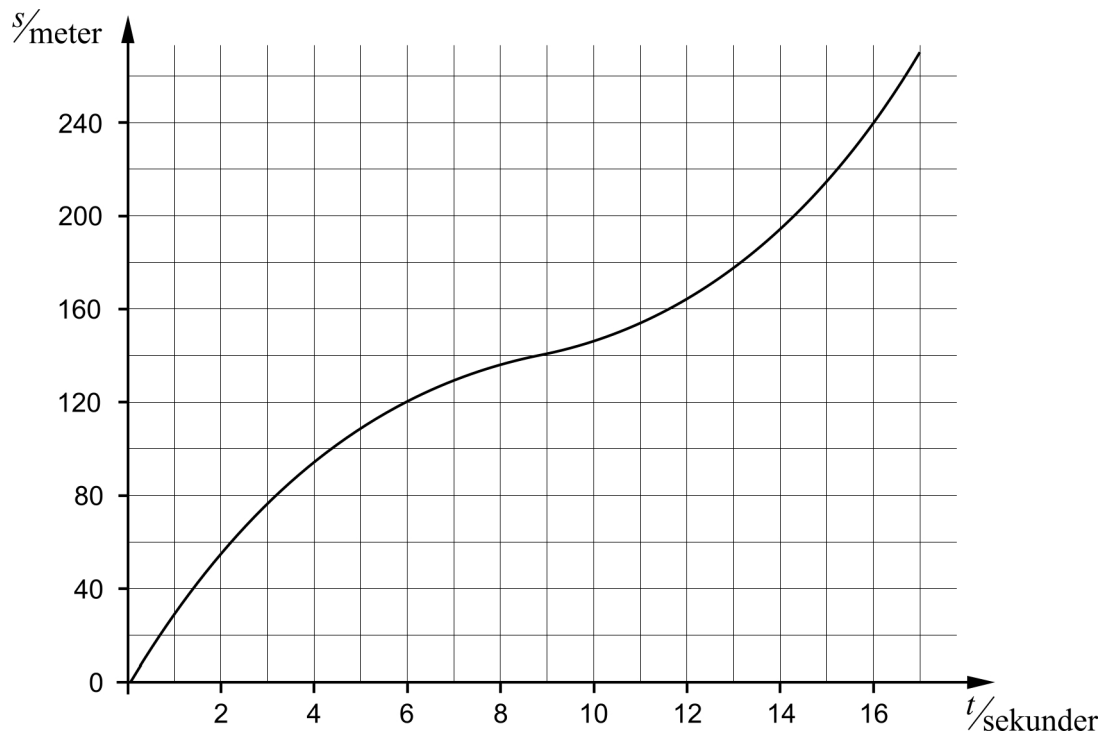


- Använd derivata och beräkna den bredd x och den längd y hos tallriksunderläggen som ger största arean A för vart och ett av de tre fallen ovan.
- Studera de mått på bredden x och längden y du räknat fram i de tre fallen ovan. Formulera en slutsats om var på tygbitarnas bas B och höjd H Kim ska klippa för att arean på tallriksunderläggen ska bli maximal.
- Utgå från att tygbitarna fortfarande har formen av en rätvinklig triangel med basen B och höjden H . Undersök om din slutsats alltid gäller oavsett vilka mått tygbitarna har.

Del II

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Grafen i diagrammet nedan beskriver en bils färd genom en kurva. Efter tiden t sekunder har bilen hunnit sträckan $s(t)$ meter.



Beräkna bilens medelhastighet i tidsintervallet $6 \leq t \leq 16$ sekunder.

(2/0)

10. Petra funderar på att ta ett sms-lån på 2000 kr. Den totala lånekostnaden (ränta, avgifter med mera) för den första månaden är 25 % av lånebeloppet. Petra antar att skulden ökar med samma procentsats varje månad och ställer upp sambandet:

$$S = 2000 \cdot 1,25^x \text{ där } S \text{ är skulden i kronor efter } x \text{ månader.}$$

Bestäm hur många månader det skulle ta innan Petras skuld blir större än 1 miljon kronor.

(2/0)

11. Vilket av alternativen A-E är en geometrisk talföljd?

Endast svar fordras

(1/0)

- A. 3, 4, 6, 9, 13
- B. 2, 4, 6, 8, 10
- C. 1, 1, 2, 3, 5
- D. 4, 9, 16, 25, 36
- E. 2, 4, 8, 16, 32

12. För funktionen f gäller att $f(x) = 0,01x^3 - 0,024x^2 + 2$

Bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet $-0,5 \leq x \leq 2,5$

(3/0)

13. a) Ge ett exempel på en funktion g för vilken det gäller att $g'(3) = 2$

Endast svar fordras

(0/1)

- b) Ge ett exempel på en funktion h för vilken det gäller att $h'(x) = h(x)$
för alla x och $h(x) \neq 0$

Endast svar fordras

(0/1)

14. Chihuahuan är världens minsta hundras. Under de senaste åren har rasen blivit allt populärare.



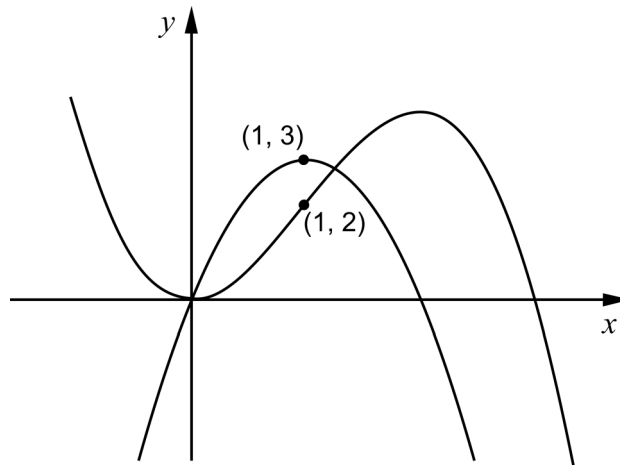
År 2000 registrerades 306 hundar av rasen i Sverige och år 2010 registrerades 2372 hundar av rasen i Sverige.

Antag att ökningen varit exponentiell.

Med hur många procent per år har antalet registrerade hundar av rasen Chihuahua ökat?

(0/2)

15. I figuren nedan är grafen till funktionen f och dess derivata f' uppritade.



Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(1, 2)$

(0/2)

16. Ove har löst två uppgifter i sin mattebok, se nedan.

a) Lös ekvationen:

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} = 0$$

(A)

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} = 0$$

$$x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} \right) = 0$$

$$x^2 - x + x - 1 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

SVAR: $x_1 = 1$
 $x_2 = -1$

b) Förenkla uttrycket:

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2}$$

(B)

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} =$$

$$= x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} \right) =$$

$$x^2 - x + x - 1 =$$

$$x^2 - 1$$

SVAR: $x^2 - 1$

Lösningen till en av uppgifterna är fel. Ange vilken av lösningarna A eller B som är den felaktiga. Ange också vad Ove gör för fel och varför det är fel att göra så. (0/1/2)

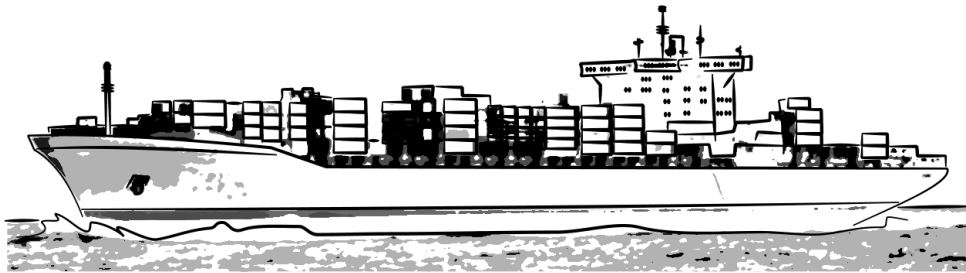
17. Punkten P ligger på grafen till en funktion f . Grafens lutning i punkten P är:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h)^4 + 3(2+h)) - (2^4 + 6)}{h} = 35$$

Vilka koordinater har punkten P ?

(0/2)

18. Ett lastfartyg ska göra en 24000 km lång resa från Göteborg till Singapore.



- a) Anta att fartyget håller en konstant hastighet genom hela resan och att resan tar t dygn. Teckna tiden t i dygn som funktion av hastigheten v i km/h.

Endast svar fordras

(0/1)

Vi antar att de huvudsakliga kostnaderna för att driva fartyget är bränslekostnader och besättningens löner. Enligt en förenklad modell kan kostnaden K kr/dygn beskrivas som

$$K = 0,15v^3 + 25000 \text{ (kr/dygn)}$$

- b) Vid vilken hastighet är den totala kostnaden för hela resan minst?

(0/3/□)

Innehåll	Sid nr
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet	4
Kravgränser	5
Allmänna riktlinjer för bedömning	6
Bedömningsanvisningar del I och del II	7
Mål för matematik kurs C – Kursplan 2000	26
Betygskriterier 2000	27
Kopieringsunderlag för aspektbedömning	28
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter	29
Insamling av provresultat för matematik kurs C hösten 2011	30

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 8 och 18 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 3b, 6b, 6c, 7, 8 och 16. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16 och 17 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 6b, 8, 14 och 18.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik ht 2011 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte).

				Kunskapsområde												Betygskriterium																	
Uppgift nr	g po-äng	vg po-äng	□	Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänt				Väl godkänt						Mycket väl godkänt								
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5				
1a	1	0								X				X																			
1b	1	0								X				X																			
1c	0	1								X								X															
2a	1	0							X								X																
2b	1	0									X						X																
2c	1	0								X							X																
3a	1	0				X											X																
3b	1	0				X											X																
4	3	0									X						X																
5	0	1								X																							
6a	1	0			X									X																			
6b	0	2				X	X																			X	X						
6c	0	2	□				X																			X				X		X	
7	0	1	□			X																				X				X		X	
8	3	3	□		X						X		X			X	X			X	X	X				X	X	X					
9	2	0									X						X																
10	2	0				X									X		X																
11	1	0					X								X																		
12	3	0									X		X			X	X																
13a	0	1											X														X						
13b	0	1											X														X						
14	0	2				X	X													X				X		X	X	X					
15	0	2												X												X		X	X				
16	0	1	□						X																	X		X	X			X	
17	0	2													X										X			X	X				
18a	0	1							X																			X					
18b	0	3	□							X	X									X				X		X	X	X		X		X	
Σ	22	23			2/0		5/7		4/4				11/12																				

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 45 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt: 13 poäng.

Väl godkänt: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng.

Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 15 vg-poäng.

Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre olika MVG-kvaliteter av de fem MVG-kvaliteter som är möjliga att visa i detta prov.

De α -märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fem olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift				
MVG-kvalitet	6c	7	8	16	18b
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○		
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	○	○			
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang			○		○
Värderar och jämför metoder/modeller				○	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk			○		○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)
 - 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
 - 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.
5. Uppgifter av långsvarstyp
 - 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
 - 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
 - 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpöängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
 - 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknefel.
6. Aspektbedömning
Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna "Metodval och genomförande", "Matematiskt resonemang" samt "Redovisning och matematiskt språk" som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg
 - 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
 - 7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
 - 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
 - 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (α) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Prov som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap. 4 § offentlighets- och sekretesslagen (2009:400). Avsikten är att detta prov ska kunna återanvändas t.o.m. 2017-12-31. Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

Bedömningsanvisningar (MaC ht 2011)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
-------	-----------------------	-------

Del I

1.		Max 2/1
-----------	--	----------------

- | | | |
|----|-------------------------------------|-------|
| a) | Korrekt svar ($f'(x) = 8x^3$) | +1 g |
| b) | Korrekt svar ($f'(x) = 15e^{3x}$) | +1 g |
| c) | Korrekt svar ($f'(x) = (n+1)x^n$) | +1 vg |

Kommentar: Svaret $f'(x) = n + 1 \cdot x^n$ bedöms som ett felaktigt svar.

2.		Max 3/0
-----------	--	----------------

- | | | |
|----|--|------|
| a) | Korrekt svar ($x^4 - 8x$) | +1 g |
| b) | Korrekt svar ($x(x^3 - 8)$) | +1 g |
| c) | Korrekt svar ($x_1 = 0$; $x_2 = 2$) | +1 g |

Kommentar: Även $x_1 = 0$; $x_2 = 8^{1/3}$ bedöms som ett korrekt svar.

3.		Max 2/0
-----------	--	----------------

- | | | |
|----|------------------------------------|------|
| a) | Korrekt svar ($x = \sqrt[5]{6}$) | +1 g |
| b) | Korrekt svar (D: $1 \leq x < 2$) | +1 g |

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
4.		Max 3/0
	Korrekt derivering	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning, t.ex. visar att $B'(20) = 0$	+1 g
	Godtagbar verifiering av minimum	+1 g

Källa: Markus Lundborg (2003), *Inverkan av hastighet och vägförhållande på bränsleförbrukning vid körning med traktor*, Examensarbete SLU

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 g)

$B(v) = 0,001v^2 - 0,04v + 0,9$
 $B'(v) = 0,002v - 0,04$
 $B(20) =$

v^2 -termen positiv
 "glad kurva"
 minimipunkt

Kommentar: Elevlösningen visar exempel på en korrekt derivering och en godtagbar verifiering av minimum. Av lösningen framkommer det däremot inte att traktorns bränsleförbrukning är lägst vid hastigheten 20 km/h. Lösningen ges därmed 2 g-poäng.

5.		Max 0/1
	Godtagbar lösning med korrekt svar (4,0123456789)	+1 vg
6.		Max 1/4/□
a)	Godtagbart svar $\left(\frac{1}{8}\right)$	+1 g
b)	Godtagbar ansats, inser att det rör sig om summan av areorna på 6 olika pappersark, t.ex. "Den totala arean av $A_0 + A_1 + \dots + A_5$ "	+1 vg
	med korrekt svar ("Den totala arean av $A_1 + A_2 + \dots + A_6$ ")	+1 vg
c)	Analyserar termen $0,5^n$ och drar slutsatsen att den går mot noll då n går mot oändligheten <i>eller</i> analyserar figuren och drar slutsatsen att arean av pappersformaten $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ går mot 1 då n går mot oändligheten*	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (2)	+1 vg

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera termen $0,5^n$ och dra slutsatsen att den går mot noll då n går mot oändligheten <i>eller</i> analysera figuren och dra slutsatsen att arean av pappersformaten $A_1+A_2+\dots+A_n$ går mot 1 då n går mot oändligheten.*
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

*MVG-kvaliteten gällande analys utfaller samtidigt som den första vg-poängen delas ut.

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg och en MVG-kvalitet)

$$\frac{1 \cdot (0,5^n - 1)}{-0,5}$$

då n är jättestort t ex 500
blir $0,5^n$ mkt litet $\Rightarrow$

$$\approx \frac{1 \cdot (-1)}{-0,5} = \frac{-1}{-0,5} = \underline{\underline{2}}$$

Kommentar: Eftersom eleven bestämmer ett approximativt värde för ett stort värde på n istället för att reda ut vilket värde uttrycket *närmar sig* då n blir större och större ges elevlösningen nätt och jämnt första vg-poängen och den MVG-kvalitet som gäller analys. Sammantaget ges lösningen 2 vg-poäng och en MVG-kvalitet.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****7.****Max 0/1/□**Korrekt svar ($y = \lg x$) med motivering som kan innehålla vissa brister +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera och dra korrekt slutsats, t.ex. "Eftersom $\ln e = 1$ och $\lg 10 = 1$ och eftersom $e \approx 2,71 < 10$ så kommer $\lg x$ växa långsammare än $\ln x$. Grafen A visar alltså $y = \lg x$ ".
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (0 vg)

$y = \lg x$	hör ihop med basen 10
$y = \ln x$	—n— basen e
$e = 2,7$	$2,7 < 10$
	Grafen A är $\lg x$.

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt slutsats men godtagbar motivering saknas då kopplingen mellan $2,7 < 10$ och slutsatsen inte finns med. Lösningen ges därmed 0 vg-poäng.

Elevlösning 2 (1 vg och en MVG-kvalitet)

$$\lg 10 = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$e \approx 2,7$$

$$\ln 2,7 \approx 1$$

$$\ln 10 > \lg 10$$

$$\ln x > \lg x$$

$$\text{Svar: } A = \{x = \lg x\}$$

Kommentar: Elevlösningen saknar kommentar om att olikheten på sista raden endast gäller då $x > 1$ och är i övrigt knapphändig. Trots detta bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla MVG-kriteriet gällande analys och tolkning av resultat och lösningen ges därmed 1 vg-poäng och en MVG-kvalitet.

Elevlösning 3 (1 vg och en MVG-kvalitet)

$$\lg x \Rightarrow 10^{\lg x} = 10^y$$

$$\ln x \Rightarrow e^{\ln x} = e^y$$

$$\lg 1 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \quad y = 0$$

$$\ln 1 = y \Leftrightarrow e^y = 1 \quad y = 0$$

Det ställe på grafen där $y = \ln x$ & $y = \lg x$ skär varandra är $(1, 0)$

Om man sätter in ett större värde för x så borde $y = \ln x$ vara större än $y = \lg x$ på grafen ex. $x = 10$

$$y = \lg 10 \Rightarrow 10^y = 10 \quad y = 1$$

$$y = \ln 10 \Rightarrow e^y = 10 \quad y > 1 \text{ eftersom}$$

talet $e < 10$ och

det krävs ett större tal för att få samma värde på x

Svar: $y = \lg x$ har markerats med A.

Kommentar: Elevlösningens fyra första rader är inte helt nödvändiga för lösningen men därefter ges en korrekt analys med en korrekt slutsats. Det är något oklart vad eleven menar med "tal" i "det krävs ett större tal". Användandet av implikationspilar på de första två raderna är inte helt matematiskt korrekt men eftersom det inte påverkar innebörden av resonemanget ges lösningen 1 vg-poäng och MVG-kvaliteten gällande analys och tolkning av resultat.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****8.****Max 3/3/□**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		Total poäng
	Lägre	Högre	
Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.</i> <i>Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i>	Eleven beräknar den bredd x som ger maximal area i två fall. 1 g	Eleven beräknar den bredd x som ger maximal area i tre fall. 2 g	2/0
		Eleven bestämmer den längd y som ger maximal area i minst två fall. 1 vg	0/1
Matematiska resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i>	Eleven drar, utifrån korrekta beräkningar av x i alla tre fallen, slutsatsen att Kim ska klippa på mitten av basen B . 1 g	Eleven drar, utifrån korrekta beräkningar av både x och y i alla tre fallen, slutsatsen att Kim ska klippa på mitten av tygbitens båda sidor. 1 vg	1/1
Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i>		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. 1 vg	0/1
Summa			3/3

Kommentar: Eftersom uppgiften innehåller figurer där det är möjligt att se att derivatans nollställen ger maximum så krävs inte verifiering av detta.

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generella metoder och bestämma derivatans nollställe $x = \frac{B}{2}$ ur sambandet $A(x) = -\frac{H}{B}x^2 + Hx$. (Sambandet har tagits fram antingen genom att eleven sett ett mönster i de tre givna specialfallen eller genom härledning.)
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	<i>härleda</i> en generell areafunktion och utifrån den visa att maximal area ges då $x = \frac{B}{2}$ och $y = \frac{H}{2}$.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt och lösningen omfattar större delen av uppgiften.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (3 g och 2 vg)

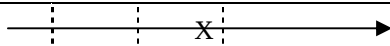
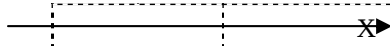
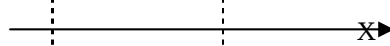
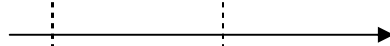
$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad A(x) &= -1,5x^2 + 9x \\
 A'(x) &= -3x + 9 = 0 \\
 x &= 3 \\
 A(x) &= -1,5 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 13,5 \Rightarrow y = \frac{13,5}{3} = 4,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad A(x) &= -\frac{5}{3}x^2 + 10x \\
 A'(x) &= -\frac{10}{3}x + 10 = 0 \\
 x &= 3 \\
 A(x) &= -\frac{5}{3} \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{3} = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad A(x) &= -2x^2 + 10x \\
 A'(x) &= -4x + 10 = 0 \\
 x &= 2,5 \\
 A(x) &= -2 \cdot 2,5^2 + 10 \cdot 2,5 = 12,5 \Rightarrow y = \frac{12,5}{2,5} = 5
 \end{aligned}$$

Slutsats: Klipp på hälften överallt

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande		2/0	
		0/1	
Matematiska resonemang		1/1	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	
Summa		3/2	

Kommentar: Elevlösningen är visserligen lätt att följa och förstå men det matematiska språket har sådana brister att vg-nivån ändå inte uppnås. Exempelvis används $A(x)$ istället för $A(3)$ och likhetstecknet missbrukas i t.ex. $A'(x) = -3x + 9 = 0$. Förutom detta är slutsatsen otydligt formulerad. Elevlösningen ges därmed 3 g- och 2 vg-poäng.

Elevlösning 2 (3 g och 3 vg och 2 MVG-kvaliteter)

$$6 \leq 9$$

$$A'(x) = -3x + 9$$

$$A'(x) = 9 - 3x$$

$$0 = 9 - 3x$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$A(3) = -1,5 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3$$

$$A(3) = 13,5 \text{ a.e.}$$

$$13,5 = x \cdot y$$

$$13,5 = 3y$$

$$y = 4,5$$

$$6 \leq 10$$

$$A'(x) = -\frac{10}{3}x + 10$$

$$A'(x) = 10 - \frac{10}{3}x$$

$$0 = 10 - \frac{10}{3}x$$

$$\frac{10}{3}x = 10$$

$$x = 3$$

$$A(3) = -\frac{5}{3} \cdot 3^2 + 10 \cdot 3$$

$$A(3) = 15 \text{ a.e.}$$

$$15 = x \cdot y$$

$$15 = 3y$$

$$y = 5$$

$$5 \leq 10$$

$$A'(x) = -4x + 10$$

$$A'(x) = 10 - 4x$$

$$0 = 10 - 4x$$

$$4x = 10$$

$$x = 2,5$$

$$A(2,5) = -2 \cdot 2,5^2 + 10 \cdot 2,5$$

$$A(2,5) = 12,5 \text{ a.e.}$$

$$12,5 = x \cdot y$$

$$12,5 = 2,5y$$

$$y = 5$$

Alternativ 1

Största möjliga area: 13,5 a.e.

Sidornas längd: 3 l.e. och 4,5 l.e.

Alternativ 2

Största möjliga area: 15 a.e.

Sidornas längd: 3 l.e. och 5 l.e.

Alternativ 3

Största möjliga area: 12,5 a.e.

Sidornas längd: 2,5 l.e. och 5 l.e.

Alla tre alternativen får sin största möjliga area när mitten på basen och höjden klipps.

Antagande: Om man klipper mitt på basen och mitt på höjden så får man största möjliga area på rektangeln om det man klipper i är en rättsidig triangel

$$A(x) = -\frac{H}{B}x^2 + Hx$$

$$A'(x) = -\frac{2Hx}{B} + H$$

$$0 = H - \frac{2Hx}{B}$$

$$\frac{2Hx}{B} = H$$

$$\frac{2x}{B} = 1$$

$$2x = B$$

$$x = \frac{B}{2}$$

$$y = \left(-\frac{H}{B}x^2 + Hx\right)/x$$

$$y = H - \frac{Hx}{B}$$

$$y = H - \frac{HB}{2B}$$

$$y = H - \frac{H}{2}$$

$$y = \frac{H}{2}$$

$$x = \frac{B}{2} \quad y = \frac{H}{2}$$

Hälften av basen och hälften av höjden ger störst area på rektangeln i en rättsidig triangel. V.S.V.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	2/0	
	X	0/1	
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		3/3	

Kommentar: Eleven härleder inte den generella areafunktionen utan ställer upp den utifrån ett mönster från de tre presenterade specialfallen. I och med detta så uppfylls MVG-kriteriet för användande av generella metoder men inte MVG-kriteriet gällande genomförandet av bevis. Lösningen är mycket välstrukturerad och tydlig och det matematiska språket bedöms vara i huvudsak korrekt även om uttrycket "rättsidig triangel" används. Sammantaget ges lösningen 3 g- och 3 vg-poäng samt 2 MVG-kvaliteter.

Elevlösning 3 (3 g och 3 vg och 3 MVG-kvaliteter)

• B o H

6 o 9

$$(dm) \quad A(x) = -1,5x^2 + 9x$$

$$A'(x) = -3x + 9$$

$$-3x + 9 = 0$$

$$x = 3$$

$$A(3) = -1,5 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3$$

$$A(3) = 13,5$$

$$y = \frac{13,5}{3} = 4,5$$

6 o 10

$$A(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 10x$$

$$A'(x) = -\frac{10}{3}x + 10$$

$$-\frac{10}{3}x + 10 = 0$$

$$x = 3$$

$$A(3) = -\frac{5}{3} \cdot 3^2 + 10 \cdot 3$$

$$A(3) = 15$$

$$y = \frac{15}{3} = 5$$

5 o 10

$$A(x) = -2x^2 + 10x$$

$$A'(x) = -4x + 10$$

$$-4x + 10 = 0$$

$$x = 2,5$$

$$A(2,5) = -2 \cdot 2,5^2 + 10 \cdot 2,5$$

$$A(2,5) = 12,5$$

$$y = \frac{12,5}{2,5} = 5$$

Störst area:

$$(dm) \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2,5 \\ y = 5 \end{cases}$$

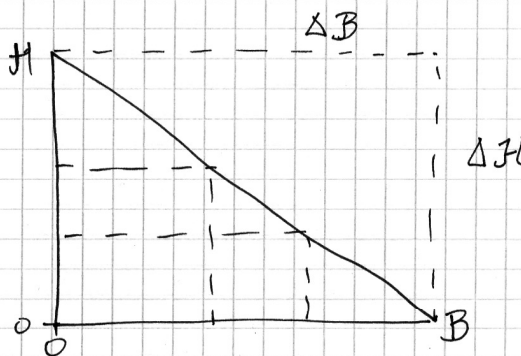
- Om man kollar i varje fall och jämför de olika tyg-bitarna så blir $y = \frac{H}{2}$ och $x = \frac{B}{2}$. Kim ska klippa på mitten av basen B och höjden H för att få störst area.

$$y = kx + m$$

$$y = \frac{\Delta H}{\Delta B} x + m$$

$$y = \frac{0 - H}{B - 0} x + m$$

$$y = -\frac{H}{B} x + m \quad \text{sepilen}$$



$$A(x) = x \left(-\frac{H}{B} x + H \right)$$

$$A(x) = -\frac{H}{B} x^2 + Hx$$

$$y = kx + m$$

$$k = \frac{\Delta H}{\Delta B}$$

$$H = -\frac{H}{B} \cdot 0 + m$$

$$m = H$$

forts. $A'(x) = -\frac{2H}{B}x + H$

$$A'(x) = 0$$

$$H - \frac{2H}{B}x$$

$$\frac{2H}{BH}x = 1$$

$$\frac{2x}{B} = 1$$

$$x = \frac{B}{2}$$

$$y = -\frac{H}{B}x + H$$

$$y = -\frac{H}{B} \cdot \frac{B}{2} + H$$

$$y = -\frac{H}{2} + H$$

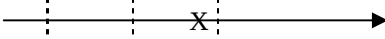
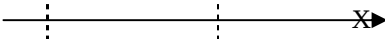
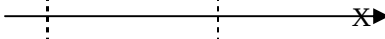
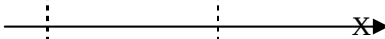
$$2y = -H + 2H$$

$$2y = H$$

$$y = \frac{H}{2}$$

Det visar att när arean är maximal är $x = \frac{B}{2}$
och $y = \frac{H}{2}$.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande		2/0	
		0/1	
Matematiska resonemang		1/1	
Redovisning och matematiskt språk		0/1	
Summa		3/3	

Kommentar: Lösningen visar alla tre MVG-kvaliteter, vilket innefattar användande av generella metoder, härledning av den generella areafunktionen samt ett korrekt matematiskt språk.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
9.		Max 2/0
	Godtagbart tecknad ändringskvot	+1 g
	med godtagbart svar inklusive korrekt enhet (12 m/s)	+1 g
10.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $1000000 = 2000 \cdot 1,25^x$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (28 månader)	+1 g
11.		Max 1/0
	Korrekt svar (E: 2, 4, 8, 16, 32)	+1 g
12.		Max 3/0
	Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer derivatans nollställen	+1 g
	med korrekt bestämning av funktionsvärdet i intervallets båda ändpunkter samt i de punkter där derivatan är noll	+1 g
	med korrekt bestämning av både det minsta och det största värdet (1,97952 respektive 2,00625)	+1 g

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges på nästa sida. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

Elevlösning 1 (2 g)

$$f(x) = 0,01x^3 - 0,024x^2 + 2 \quad -0,5 \leq x \leq 2,5$$

$$f'(x) = 0,03x^2 - 0,048x$$

$$0,03x^2 - 0,048x = 0$$

$$0,03x(x - 1,6) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1,6$$

$$f(0) = 2$$

$$f(1,6) = 0,01 \cdot 1,6^3 - 0,024 \cdot 1,6^2 + 2 = 1,97952$$

$$f(-0,5) = 0,01 \cdot (-0,5)^3 - 0,024 \cdot (-0,5)^2 + 2 = 1,99275$$

$$f(2,5) = 0,01 \cdot (2,5)^3 - 0,024 \cdot (2,5)^2 + 2 = 2,00625$$

SVAR: största värdet: $(2,5; 2,00625)$

Minsta värdet: $(1,6; 1,97952)$

Kommentar: Av svaret framgår inte vilket som är det minsta respektive det största värdet eftersom svaret innehåller såväl x - som y -koordinater. Elevlösningen ges därmed 2 g-poäng.

13.

Max 0/2

a) Korrekt svar (t.ex. $g(x) = 2x$)

+1 vg

b) Korrekt svar (t.ex. $h(x) = 2e^x$)

+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
--------------	------------------------------	--------------

14.		Max 0/2
------------	--	----------------

Godtagbar ansats, tecknar ekvationen $306 \cdot a^{10} = 2372$	+1 vg
--	-------

med godtagbar bestämning av den årliga procentuella ökningen (23 %)	+1 vg
---	-------

Kommentar: I bedömningen bortses från att elever inte kommenterar att det även finns en negativ lösning till ekvationen ovan.

Källa: Svenska Kennelklubben, (2011), Hundsport, Årgång 2011 (1-2), s. 20

15.		Max 0/2
------------	--	----------------

Korrekt bestämning av tangentens lutning, 3	+1 vg
---	-------

med i övrigt korrekt lösning med korrekt svar ($y = 3x - 1$)	+1 vg
--	-------

16.		Max 0/1/□
------------	--	------------------

Godtagbar ansats, t.ex. en början till förklaring men som inte svarar på frågan <i>varför</i> det är fel att göra som Ove gör, t.ex. "Ove gör fel i B. Han får inte multiplicera med x^2 då han förenklar"	+1 vg
--	-------

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	värdera metoden och kommentera <i>varför</i> multiplikation med x^2 inte är korrekt då Ove förenklar uttrycket, t.ex. "När Ove multiplicerar med x^2 så får han ett annat uttryck."
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på nästa sida. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (0 vg)

Svar: Ove gör fel i B.

Kommentar: Elevlösningen ger inget svar på vad Ove gör för fel. Lösningen ges därmed 0 vg-poäng.

Elevlösning 2 (1 vg)

Svar: I B ska han inte multiplicera med x^2 . Där ska man bara lägga ihop dem som är lika, inte hålla på och ändra massa.

Kommentar: Av lösningen framgår tydligt att det är multiplikation med x^2 som är felet i Oves lösning B. Däremot ges en svävande och oklar förklaring till varför det är fel att göra så och därmed anses inte MVG-kriteriet gällande värdering och jämförande av metoder vara uppnådd. Elevlösningen ges 1 vg-poäng.

Elevlösning 3 (1 vg och en MVG-kvalitet)

I den uppgift då han ska förenkla är det fel att multiplicera med x^2 . Om man gör det ändrar man värdet på talet. Svaret blir då inte rätt.

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} \neq x^2 - 1$$

Kommentar: Elevlösningen pekar såväl på att det är multiplikation med x^2 som är felet i förenklingen som på anledningen till varför det är fel. Trots att meningen "Om man gör det ändrar man värdet på talet" inte är helt matematiskt korrekt formulerad så tydliggörs innebörden genom $1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} \neq x^2 - 1$. Lösningen uppfyller därmed MVG-kriteriet gällande värdering och jämförande av metoder och ges 1 vg-poäng och nämnda MVG-kvalitet.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****17.****Max 0/2**Korrekt identifiering av funktionen $f(x) = x^4 + 3x$

+1 vg

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (2, 22)

+1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{((2+h)^4 + 3(2+h)) - (2^4 + 6)}{h} = 35$$

$$x+h = 2+h \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^4 + 6 = 22$$

(2, 22)

Kommentar: Elevlösningen visar på en jämförelse mellan det aktuella uttrycket och derivatans definition. Detta anses vara likvärdigt med en identifiering av funktionen. Lösningen ges 2 vg-poäng.

18.**Max 0/4/□**

a) Korrekt svar $\left(t(v) = \frac{1000}{v} \right)$

+1 vg

b) Korrekt tecknat uttryck för den totala resekostnaden,

t.ex. $K_{tot} = \frac{25 \cdot 10^6}{v} + 150v^2$ *

+1 vg

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (ca. 44 km/h)

+1 vg

Godtagbar verifiering av minimum

+1 vg

*MVG-kvaliteten gällande bevis utfaller samtidigt som den första vg-poängen delas ut.

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	härleda ett generellt uttryck för den totala kostanden $K_{tot} = \frac{25 \cdot 10^6}{v} + 150v^2$.*
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

*MVG-kvaliteten gällande bevis utfaller samtidigt som den första vg-poängen delas ut.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg och en MVG-kvalitet)

$$\begin{aligned}
 K &= 0,15v^3 + 25000 \text{ km/dygn} \quad \text{antagelse dygn} \\
 \Rightarrow (0,15v^3 + 25000) \left(\frac{24000/v}{24} \right) &= \text{totala kostnaden} \\
 &= \frac{3600v^3}{24v} + \frac{6 \cdot 10^8}{24v} \\
 &= \frac{3600v^3 + 6 \cdot 10^8}{24v} \\
 &= \frac{150v^3 + 2,5 \cdot 10^7}{v} = (150v^2 + 2,5 \cdot 10^7)v^{-1} \\
 \left. \begin{aligned} K_{tot} &= 150v^2 + 2,5 \cdot 10^7 v^{-1} \\ K' &= 300v - 2,5 \cdot 10^7 v^{-2} \end{aligned} \right\} \text{ger minivärde eftersom } v^2 \text{ är positiv.} \\
 \text{Grafisk lösning ger } v &= 43,7 \\
 \text{Svar: hastigheten som ger lägst kostnad är } &43,7 \text{ km/h}
 \end{aligned}$$

Kommentar: Verifieringen av minimum är felaktig. Redovisningen är inte fullständig eftersom det saknas redovisning av hur derivatans nollställe bestämts. Sammantaget ges lösningen av b)-uppgiften 2 vg och den MVG-kvalitet som rör bevis och matematiska resonemang.

Elevlösning 2 (3 vg och två MVG-kvaliteter)

a.) v km/h
 24 000 km
 t tiden

$$t(v) = \frac{24000}{v}$$

b.) $K = 0,15 v^3 + 25000$ kr/dygn $t = \frac{24000}{v}$

$$\begin{aligned} K_{\text{Tot}} &= (0,15 v^3 + 25000) \cdot \frac{24000}{v} = \\ &= \frac{24000 \cdot 0,15 v^3}{v} + \frac{25000 \cdot 24000}{v} = \\ &= 3600 v^2 + \frac{6 \cdot 10^8}{v} = 3600 v^2 + 6 \cdot 10^8 \cdot v^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'_{\text{Tot}} &= 7200 v - 6 \cdot 10^8 \cdot v^{-2} \\ 7200 v &= \frac{6 \cdot 10^8}{v^2} \end{aligned}$$

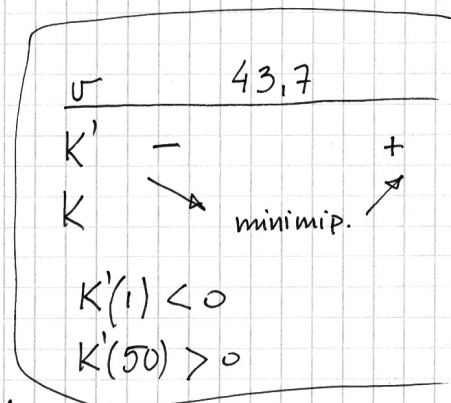
$$7200 v^3 = 6 \cdot 10^8$$

$$v^3 = \frac{6 \cdot 10^8}{7200}$$

$$v = \left(\frac{6 \cdot 10^8}{7200} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v = 43,7 \text{ km/h}$$

Svar: Hastigheten 43,7 km/h ger minimal kostnad.



Kommentar: Ovan visas en lösning där ett felaktigt svar i deluppgift a) påverkar utseendet av uttrycket för den totala kostnaden men uttrycket är korrekt tecknat utifrån det felaktiga svaret på a). I övrigt är lösningen korrekt genomförd och redovisningen lätt att följa. Följdfelet är av ett sådant slag att det inte anses påverka bedömningen av b)-uppgiften. Därmed ges lösningen av deluppgift a) 0 vg-poäng och lösningen till deluppgift b) 3 vg-poäng samt båda möjliga MVG-kvaliteter.

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)

R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)

A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)

D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel,

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt (Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning,

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (α-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	6c	7	8	16	18b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (α-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	6c	7	8	16	18b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (α-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	6c	7	8	16	18b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Insamling av provresultat för matematik kurs C

Från och med höstterminen 2011 utför SCB (Statistiska centralbyrån) på uppdrag av Skolverket en totalinsamling av elevresultat både vår- och hösttermin. Information om denna totalinsamling utgår från SCB. Förutom denna totalinsamling genomför provinstitutionen en egen urvalsinsamling. Denna urvalsinsamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om höstens prov i slutet av februari. Rapporten kommer att finnas tillgänglig på <http://www.edusci.umu.se/np-pb/np/> Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

Urvalsinsamlingen

För urvalsinsamlingen gäller att när du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 3:e, 8:e, 10:e, 23:e och 26:e i varje månad**. Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 3:e i varje månad**.

1. Gå in på <http://www.edusci.umu.se/np-pb/np/> och klicka på rubriken **Resultatinsamling ht 2011** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **hela5en** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 3:e, 8:e, 10:e, 23:e och 26:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 3:e i varje månad** till:

Umeå universitet Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar Nationella prov Att. Monika Kriström 901 87 Umeå

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av februari måste vi ha alla resultat **senast 20 januari 2012**.