Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av juni 2013.

NATIONELLT KURSPROV I
MATEMATIK KURS C
VÅREN 2003

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 17 uppgifter. **Del I** består av 8 uppgifter och **Del II** av 9 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 17 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 42 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 12 poäng. Väl godkänd: 25 poäng varav minst 6 vg-poäng. Mycket väl godkänd: Kraven för Väl godkänd ska vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser ¤-uppgifterna.

Namn: _____ Skola: _____

Komvux/gymnasieprogram: _____

Del I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Antag att $f(x) = 3x^2 - 4$

a) Bestäm $f(5)$ *Endast svar fordras* (1/0)

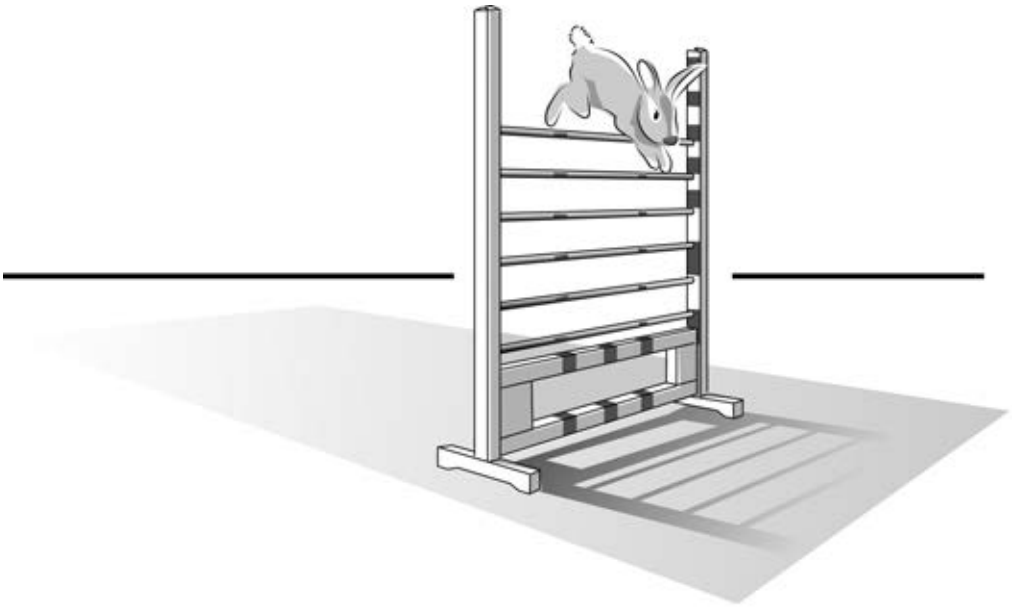
b) Bestäm $f'(3)$ *Endast svar fordras* (1/0)

2. Vilket av alternativen nedan är en lösning till ekvationen $10^x = 5$?

A)	B)	C)	D)	E)
$x = \frac{\lg 10}{\lg 5}$	$x = \lg 0{,}5$	$x = \lg 2$	$x = \lg 5$	$x = \frac{\lg 5}{10}$

Endast svar fordras (1/0)

3.



1997 satte kaninen Tösen från Danmark världsrekord i höjdhopp för kaniner.
Enligt en modell gäller att Tösens höjd under hoppet ges av
$h = 4x - 4x^2$
där h är höjden i meter över golvet och där x är avståndet i meter längs golvet från avstampet.
Beräkna med hjälp av derivata Tösens maximala hopphöjd. (2/0)

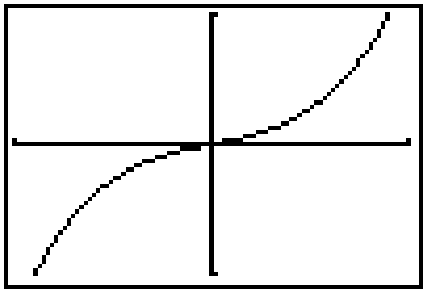
4. Lös ekvationen $2x^3 - 18x = 0$ (2/0)

5. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $5(x-1)^m - 2(x-1)^m$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $5(x-1)^m \cdot 2(x-1)^m$ *Endast svar fordras* (0/1)

6. Din klasskompis Kalle funderar på utseendet hos grafen till funktionen $f(x) = x^3 + 0{,}3x$. Han visar dig funktionens graf på sin grafräknare, se figur nedan.

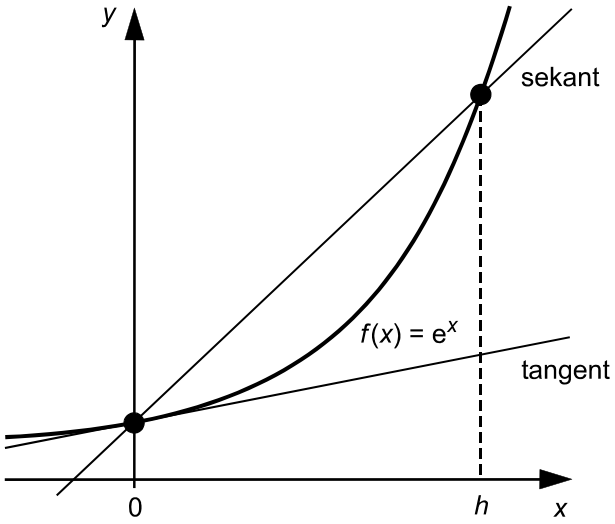


Kalle säger: "Det verkar som om den här funktionen inte har någon maximi - eller minimipunkt alls… Det syns i alla fall inte i fönstret på räknaren. Jag har försökt med allt! Kan just den här funktionen ha sådana punkter ändå?"

Du svarar: ”Jag kan visa dig hur du avgör om funktionen $f(x) = x^3 + 0{,}3x$ har någon maximi- eller minimipunkt *utan att använda* räknaren!”

Visa hur du gör. (1/1)

7. Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = \mathrm{e}^x$ och en tangent i den punkt på kurvan där $x = 0$. I figuren visas också en rät linje som går genom de punkter på kurvan där $x = 0$ respektive $x = h$. En sådan linje kallas sekant.

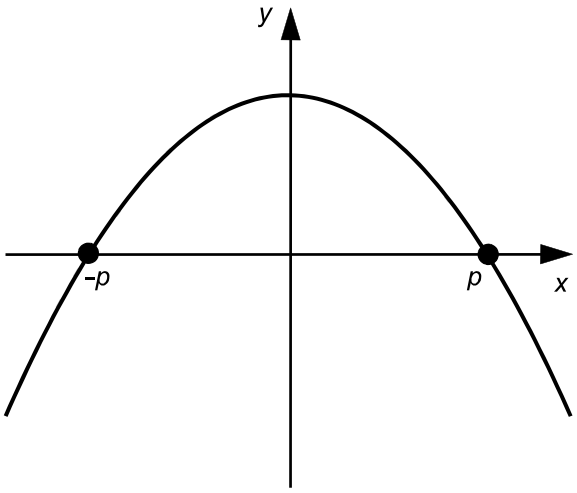


a) Teckna ett uttryck för *sekantens* riktningskoefficient.

Endast svar fordras (0/1)

b) Bestäm *tangentens* riktningskoefficient. Motivera ditt svar. (0/2)

8.



Figuren visar grafen till en andragradsfunktion $y = f(x)$ som har nollställena $x_1 = -p$ och $x_2 = p$. Vidare gäller att $f'(p) = k$

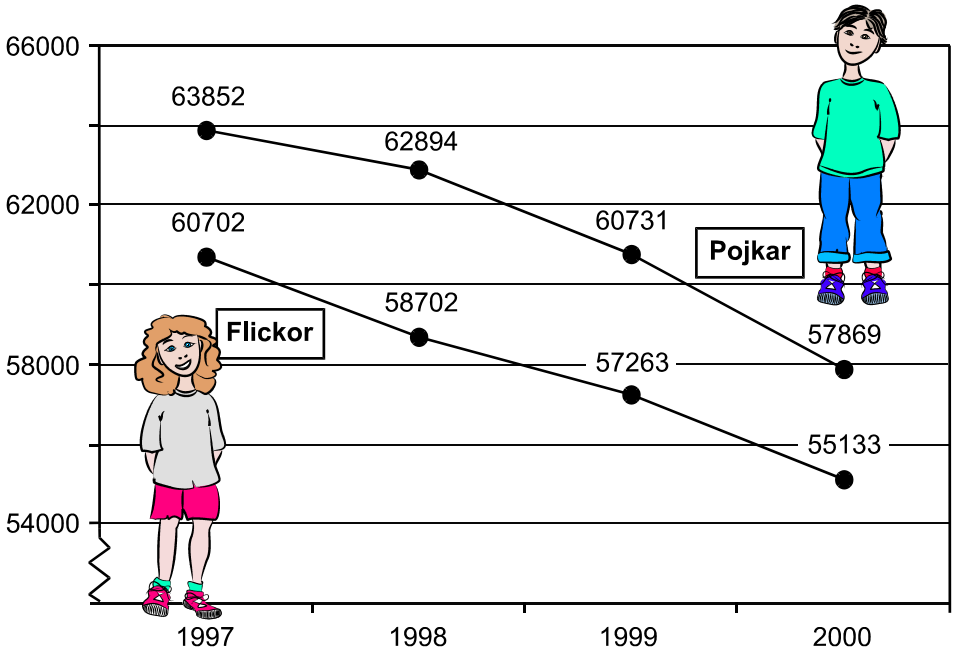
Visa att $f'(0{,}5p) = 0{,}5k$ (0/2/¤)

Del II

Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Ge ett exempel på en fjärdegradsfunktion och ange funktionens derivata. (2/0)

10. Diagrammet visar antalet pojkar respektive flickor som gick årskurs 1 i den svenska kommunala grundskolan åren 1997-2000.



Beräkna den årliga genomsnittliga förändringshastigheten för *totala* antalet elever som gick årskurs 1 i den svenska kommunala grundskolan under perioden 1997-2000. (2/0)

11. För den linjära funktionen $y = f(x)$ gäller att $f(3) = 7$ och $f'(3) = 1$
Bestäm funktionen på formen $y = kx + m$ (2/0)

12. Ljuskänsligheten hos fotografisk film angavs tidigare i ASA (*American Standards Association*) eller i DIN (*Deutsche Industrie Normen*).

Sambandet mellan a ASA och d DIN ges av $a = 25 \cdot 2^{\frac{d-15}{3}}$

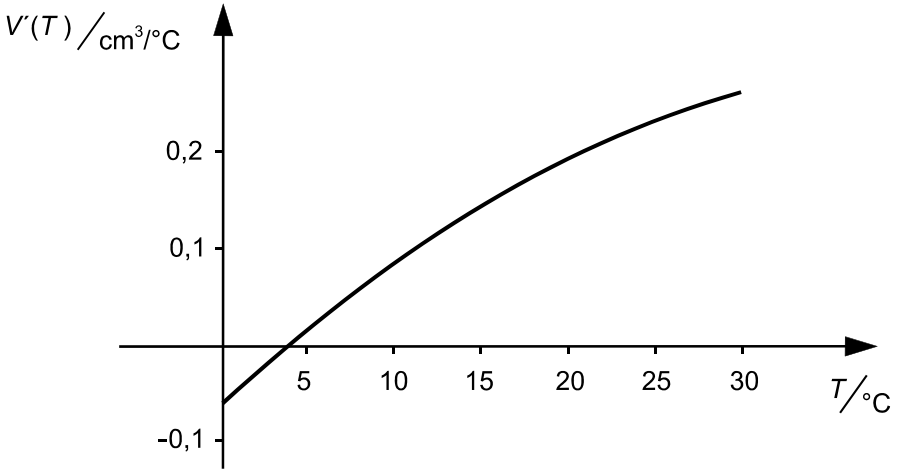
a) En film som kan vara lämplig att använda i dagsljus har ljuskänsligheten 24 DIN. Beräkna hur många ASA detta motsvarar. (1/0)

b) En film tillverkad för extremt dåliga ljusförhållanden har ljuskänsligheten 6400 ASA. Beräkna hur många DIN detta motsvarar. (1/1)

13. Förenkla uttrycket $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{(x+h) - x}$ så långt som möjligt. (1/1)

14. I ett löneavtal garanterades arbetstagarna en löneökning på minst 20 % under en femårsperiod. Vilken genomsnittlig årlig procentuell löneökning krävs för att uppfylla avtalet? (0/2)

15. När man värmer en viss vätska så beror dess volym V av temperaturen T. Aron, Bert och Carl har hittat ett diagram som visar grafen till *derivatan* $V'(T)$ i temperaturintervallet $0^\circ\text{C} \le T \le 30^\circ\text{C}$, se figur 1.



Figur 1

De har olika uppfattning om på vilket sätt volymen förändras då temperaturen ökar, se figur 2. Avgör med hjälp av grafen ovan vem av de tre som har rätt. Motivera ditt svar.

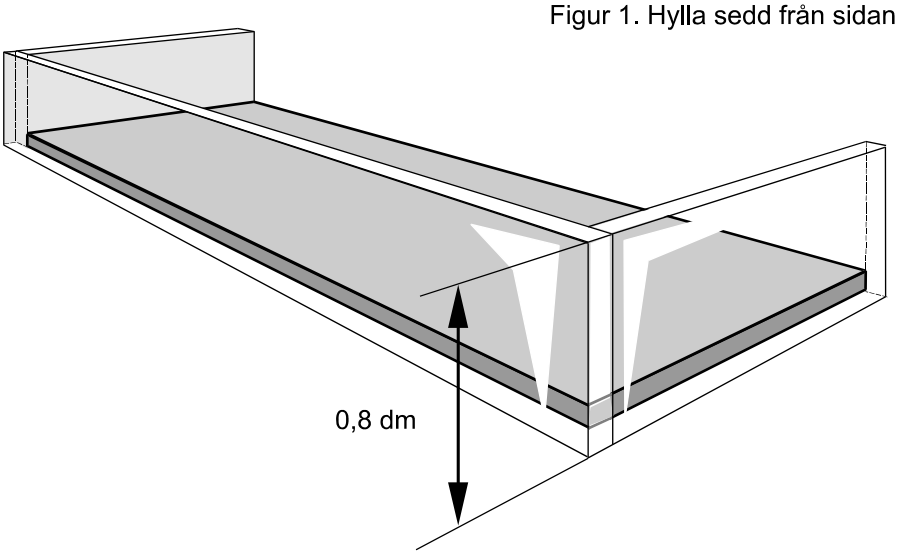
Figur 2 (0/2)

16. Per och Stina har fått en beställning på hyllor från en butikskedja. Kravet är att de rektangulära hyllplanen ska ha en area av 20 dm^2 och vara försedda med tre kanter av glas. Glaset ska ha tjockleken 0,06 dm och höjden 0,8 dm. Den längre glasskivan ska täcka kanterna på de två kortare glasskivorna. Se figurerna nedan.

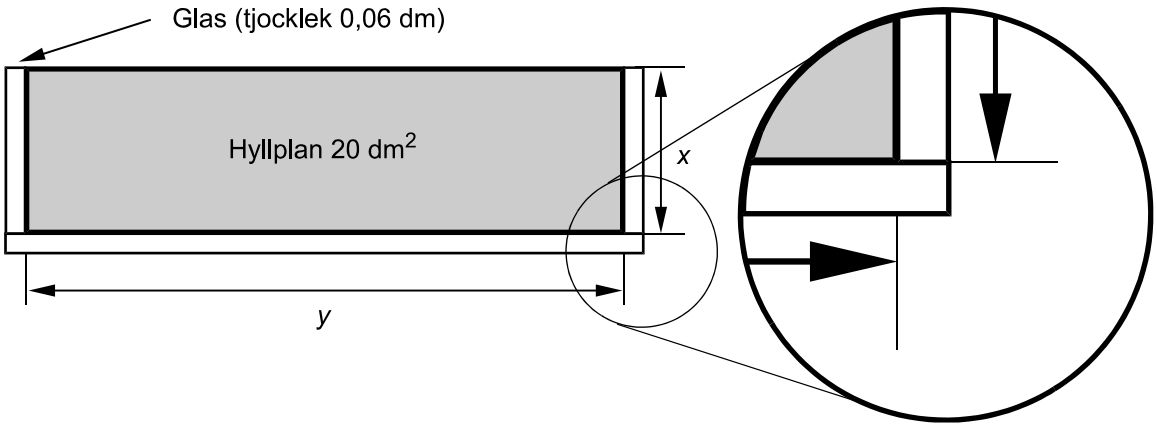
Per och Stina vill använda så lite glas som möjligt till de tre glaskanterna eftersom glaset är dyrt.

Bestäm bredden x och längden y hos hyllplanen så att arean för glaset minimeras.

Figur 1. Hylla sedd från sidan



Figur 2. Hylla sedd uppifrån



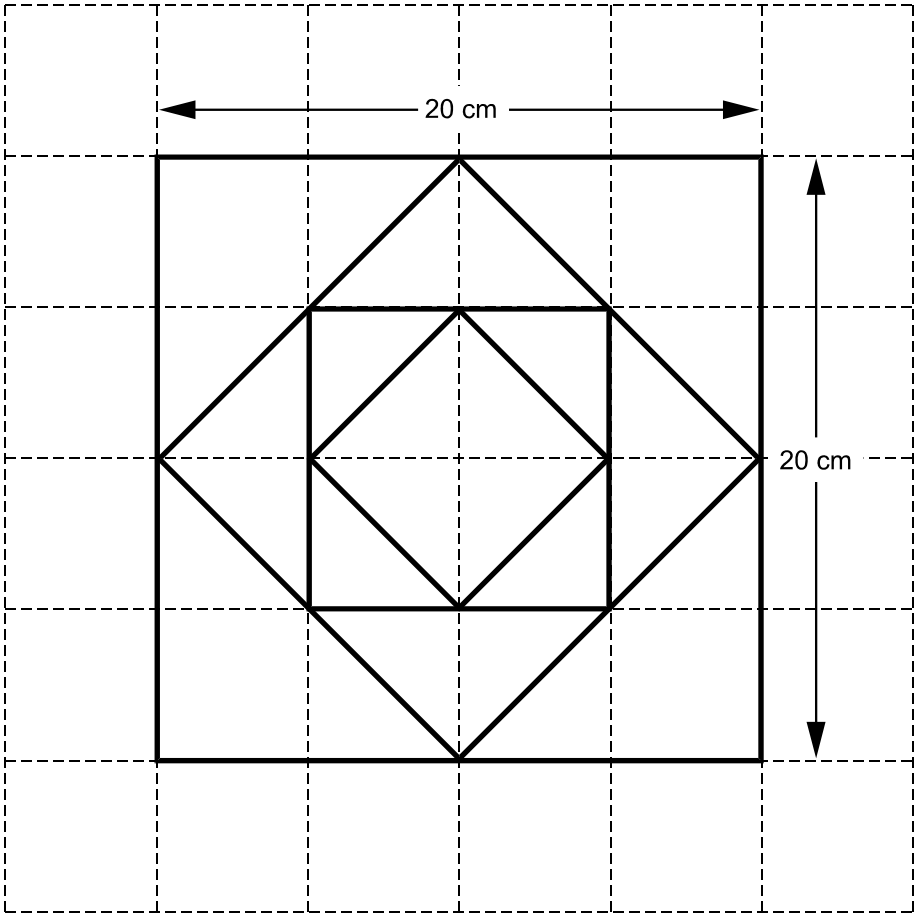
(Figurerna är ej skalenliga)

(0/4/¤)

Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur systematisk du är i din undersökning
- Hur väl du motiverar och argumenterar för dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

17.



I rutnätet visas fyra kvadrater. Den största kvadraten har sidan 20 cm. Mönstret av kvadrater är uppbyggt enligt principen att en mindre kvadrat alltid har sina hörn placerade mitt på sidorna hos den kvadrat som närmast omsluter den mindre kvadraten.

- Bestäm omkretsen hos var och en av de fyra kvadraterna.

- Visa att de fyra omkretsarna bildar en geometrisk talföljd.

- Antag att vi inför fler och fler allt mindre kvadrater enligt principen ovan. Undersök och beskriv så fullständigt och utförligt som möjligt vad som då händer med värdet av summan av alla kvadraternas omkretsar. Motivera dina slutsatser. (4/3/¤)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 och 8 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 3, 12, 14, 16 och 17 som avser indikera elevens kunskaper i bl a modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 3, 6, 7b, 8, 15, 16 och 17. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 7b, 8, 14, 15, 16 och 17 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 6, 8, 9 och 17 som alla har en högre grad av öppenhet, medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik vt 2003 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde												Betygskriterium															
Upp-	**g**	**vg**	¤																							Mycket väl				
gift	po-	po-		Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						godkänd				
nr	äng	äng		1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1a	1	0			x										x		x												
1b	1	0									x	x			x		x												
2	1	0				x									x														
3	2	0									x	x	x		x	x	x												
4	2	0								x							x												
5a	1	0							x						x		x												
5b	0	1							x										x			x	x						
6	1	1									x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x						
7a	0	1									x								x			x	x						
7b	0	2									x	x							x	x	x	x	x						
8	0	2	¤						x		x	x	x						x	x	x	x	x		x		x	x	
9	2	0							x		x	x			x		x												
10	2	0									x				x		x												
11	2	0			x				x		x	x					x												
12a	1	0				x	x								x		x												
12b	1	1				x	x										x		x			x	x						
13	1	1							x	x							x		x			x	x						
14	0	2				x	x												x		x	x	x						
15	0	2									x	x	x						x	x	x	x	x						
16	0	4	¤				x		x		x	x	x						x	x	x	x	x		x	x		x	
17	4	3	¤		x	x	x								x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	
Σ	22	20		2/0		6/6		5/3			9/11																		

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 42 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	12 poäng.
Väl godkänd:	25 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd	25 poäng varav minst 12 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i minst en* av ¤-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)
   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp
   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]
   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg
   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av juni 2013.

Bedömningsanvisningar (MaC vt 2003)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		**Max 2/0**
	a) Korrekt svar (71)	+1 g
	b) Korrekt svar (18)	+1 g
2.		**Max 1/0**
	Korrekt svar (Alternativ D; $x = \lg 5$)	+1 g
3.		**Max 2/0**
	Godtagbar bestämning av maximipunktens x-koordinat, $x = 0{,}5$	+1 g
	med godtagbar bestämning av maximal hopphöjd (1 m)	+1 g
4.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar metod som leder till två korrekta rötter	+1 g
	med ytterligare en korrekt rot funnen ($x_1 = -3$; $x_2 = 0$ och $x_3 = 3$)	+1 g
5.		**Max 1/1**
	a) Korrekt svar $\left(3(x-1)^m\right)$	+1 g
	b) Korrekt svar $\left(10(x-1)^{2m}\right)$	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

6. **Max 1/1**

Godtagbar ansats, t ex sätter $3x^2 + 0{,}3 = 0$ +1 g
med godtagbar motivering till varför funktionen saknar extrempunkter. +1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

$f(x) = x^3 + 0{,}3x$
$f'(x) = 3x^2 + 0{,}3$
$f'(x) = 0$ eftersom lutning där är noll
$3x^2 + 0{,}3 = 0$
$3x^2 = -0{,}3$
$x^2 = -\frac{0{,}3}{3}$ $x = \sqrt{-0{,}1}$ = går inte
Nej, denna funktion har ingen max eller minimi punkt. Det ser vi eftersom vi inte får något värde på x när vi satt lutning som 0

Kommentar: Motiveringen, ” $x = \sqrt{-0{,}1}$ = går inte” gör att kvaliteten i elevens lösning bedöms ligga just precis över gränsen för erhållande av 1 vg-poäng för motivering.

7. **Max 0/3**

a) Godtagbart tecknad riktningskoefficient, t ex $\dfrac{e^h - e^0}{h - 0}$ +1 vg

b) Godtagbar ansats, visar insikt om att tangentens riktningskoefficient motsvaras av $f'(0)$ +1 vg
med korrekt svar (1) och godtagbar motivering, ” Eftersom $f'(0) = e^0 = 1$” +1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
8.		**Max 0/2/¤**
	Redovisad godtagbar slutförd lösning	+1 vg
	Redovisad lösning eller ansats till lösning där eleven visar insikt i varför en andragradsfunktion på den generella formen $f(x) = ax^2 + c$ ska användas, och/eller använder godtyckliga x-koordinater, p respektive $0{,}5p$	+1 vg
	Eleven ger ett korrekt och slutfört bevis som helt baseras på det generella fallet. Redovisningen är tydlig och välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.	¤

Exempel på olika elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

antag t.ex att $f(x)=-x^2+4$ då skulle $f'(x)=-2x$
och om man sätter in ett värde på x
t.ex. $f'(4)=-8$
och sedan sätter man in halva det värdet
$f'(2)=-4$
Ett ex. till : $f'(10)=-20$ och $f'(5)=-10$
Svar: Vad du än väljer för värde på p
så blir $f'(0{,}5p)$ hälften så stor som $f'(p)$

Kommentar: Eleven ger ett godtagbart och slutfört bevis. Beviset är helt baserat på specialfall.

Elevlösning 2 (1 vg)

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ $\quad f'(x) = 2Ax + B$

$f'(0) = 0$ pga max punkt så B måste va noll

$f(x) = Ax^2 + C$

$f(p) = Ap^2 + C$?

$f(0{,}5p) = 0{,}25Ap^2 + C$

Kommentar: Eleven ger en generell ansats som bygger på användande av en andragradsfunktion på formen $f(x) = ax^2 + c$, men slutför inte beviset.

Elevlösning 3 (2 vg)

Om $f(x) = 7 - 2x^2$ så blir $f'(x) = -4x$
och $f'(p) = -4p = k$ och $f'(0{,}5p) = -4 \cdot 0{,}5p = -2p$
Om $-4p = k$ så måste $-2p = 0{,}5k$
alltså hälften så stort

Kommentar: Eleven ger ett godtagbart och slutfört bevis. Eleven använder godtyckliga *x*-koordinater *p* respektive 0,5*p*.

Elevlösning 4 (2 vg och ¤)

Vet att $f'(p) = k$
Visa att $f'(0{,}5p) = 0{,}5k$
Nollställen $(-p, 0)$ och $(p, 0)$
$f(x) = c(x+p)(x-p) = c(x^2 - p^2) = cx^2 - cp^2$
konjugatregel

Derivatan $f'(x) = 2cx - 0$
$f'(p) = 2cp = k$
$f'(0{,}5p) = 2c \cdot 0{,}5p = cp = \frac{k}{2p} \cdot p = \frac{k}{2} = 0{,}5k$
$c = \frac{k}{2p}$
alltså är $f'(0{,}5p) = 0{,}5k$

Kommentar: Eleven ger ett godtagbart och slutfört generellt bevis. Redovisningen är tydlig och välstrukturerad och det matematiska språket är korrekt.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

Del II

9. **Max 2/0**

Godtagbart angiven fjärdegradsfunktion	+1 g
med korrekt derivata	+1 g

10. **Max 2/0**

Redovisad godtagbar lösning (-3851 elever/år)	+1-2 g

11. **Max 2/0**

Godtagbar metod, t ex ritat en rät linje med riktningskoefficienten 1 som går genom punkten $(3,7)$	+1 g
med korrekt svar ($y = x + 4$)	+1 g

12. **Max 2/1**

a)	Redovisad godtagbar lösning (200)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex tecknat ekvationen $6400 = 25 \cdot 2^{\frac{d-15}{3}}$	+1 g
	med godtagbart svar (39)	+1 vg

13. **Max 1/1**

Korrekt utveckling av $(x+h)^3$	+1 g
med korrekt svar $(3x^2 + 3xh + h^2)$	+1 vg

14. **Max 0/2**

Godtagbar ansats, t ex tecknat en ekvation av typen $20000x^5 = 1{,}20 \cdot 20000$	+ 1 vg
med godtagbart svar (3,7 %)	+ 1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
15.		**Max 0/2**
	Eleven anger korrekt svar (Bert har rätt) med en motivering som visar insikt om betydelsen av derivatans tecken för volymändringen, t ex genom att ge en motivering som visar insikt om att negativ derivata innebär att volymen minskar	+1 vg
	med klar och tydlig motivering	+ 1 vg

Exempel på olika elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

bert har rätt eftersom linjen börjar på minus. när det är minus i en derivata så blir det mindre och mindre tills den kommer till 0. då ökar den.

Kommentar: Eleven visar insikt om att negativ derivata innebär att volymen minskar (om ”det” syftar på volymen). Användandet av ”det” och ”den” gör att motiveringen inte är tydlig.
Kvaliteten i elevens lösning bedöms ligga precis just över gränsen för erhållande av 1 vg-poäng.

Elevlösning 2 (2 vg)

När $V'(T)<0$ minskar volymen. När $V'(T)>0$ ökar volymen
BERT har rätt, eftersom först är derivatan negativ tills ungefär 4°C sedan ökar volymen då derivatan är positiv

Kommentar: Eleven ger en relativt tydlig motivering. Eftersom det aldrig nämns *varför* t ex negativ derivata innebär att volymen minskar bedöms kvaliteten i elevens lösning ligga precis just över gränsen för erhållande av 2 vg-poäng.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
16.		**Max 0/4/¤**
	Godtagbart tecknad funktion i en variabel, t ex areafunktionen	
	$A(x) = 1{,}6x + \frac{16}{x} + 0{,}096$	+1-2 vg
	med godtagbar bestämning av derivatans nollställe	+1 vg
	med godtagbart svar (bredd 3,2 dm och längd 6,3 dm)	+1 vg
	Eleven verifierar minimum algebraiskt eller genom att behandla funktionen grafiskt på räknaren. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig och eleven använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt språk.	¤

Uppg. Bedömningsanvisningar Poäng

17. **4/3/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** → **Högre**		**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven beräknar, i punkt 1, godtagbart de fyra omkretsarna. (80 cm, 57 cm, 40 cm och 28 cm) och använder, i punkt 3, godtagbart formeln $\frac{a(k^n-1)}{k-1}$ i sin undersökning. **2/0**		**2/0**
Matematiskt resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven *antyder*, i punkt 2, att talföljden är geometrisk genom att t ex beräkna kvoten mellan en term och den närmast föregående minst två gånger. **1/0**	Eleven *argumenterar*, i punkt 2, för att talföljden är geometrisk t ex genom att *uttrycka* att en geometrisk talföljd kännetecknas av att kvoten mellan en term och den närmast föregående är konstant för att därefter visa att det förhåller sig så i detta fall. **1/1**	**1/1**
	Eleven formulerar, i punkt 3 någon slutsats om summans värde t ex ”Summan ökar i minskande takt när man inför fler kvadrater”. Slutsatsen baseras på egna valda fall. **1/0**	Eleven formulerar, i punkt 3, någon slutsats som rör summans värde i förlängningen t ex ”Summan blir 273”. Slutsatsen baseras på en undersökning av egna, väl valda specialfall, grafisk behandling på räknaren eller algebraiska metoder **1/1**	**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt. **0/1**	**0/1**
Summa			**4/3**

Eleven beräknar omkretsarna samt visar och argumenterar för att talföljden är geometrisk. Eleven väljer en generell metod i punkt 3 genom att teckna summans värde för *n* termer. Eleven formulerar en godtagbar slutsats som rör summans gränsvärde, t ex ”Summan kan högst bli 273”. Slutsatsen baseras på en godtagbar argumentation för vad som händer med k^n när *n* går mot oändligheten. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17

Elevlösning 1 (3 g och 1 vg)

1: $20 \cdot 20 = 400\,cm^2$

2: $\sqrt{10^2+10^2} \cdot \sqrt{10^2+10^2} = 200\,cm^2$

3: $10 \cdot 10 = 100\,cm^2$

4: $\sqrt{5^2+5^2} \cdot \sqrt{5^2+5^2} = 50\,cm^2$

$a_1 = 400\,cm^2 \quad k = 0{,}5$

$S_{10} = \frac{400\,(0{,}5^{10}-1)}{0{,}5-1} \approx 800\,cm^2$

$S_3 = \frac{400\,(0{,}5^{3}-1)}{0{,}5-1} = 700\,cm^2$

$400 + 200 + 100 = 700\,cm^2$

$700 = 700!$ $\quad (0{,}5^{20} = 9 \cdot 10^{-7} \approx 0)$

Parantesen i täljaren kommer närma sig mer och mer −1 när den gör det så kommer den tillslut att bli $\frac{-400}{-0{,}5} = 800$

Större area är så kan man inte få!

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/0	Beräknar *areor* istället för omkretsar, men kan behandla summaformeln godtagbart.
Matematiska resonemang	X	1/0	Tydlig argumentation för att talföljden är geometrisk saknas.
	X	1/1	Finner och styrker att summan närmar sig ett gränsvärde.
Redovisning och matematiskt språk	X	0	Redovisningen är inte lätt att följa och förstå eftersom den är alltför kortfattad.
Summa		**3/1**	

Elevlösning 2 (4 g och 1 vg)

Uppgift punkt 1

Kvadrat A: 80 cm
$20+20+20+20=80$

Kvadrat B: 56cm
En ruta = 2cm = 5cm enligt pappret
$\frac{5}{2}=2,5$
En ruta på smedden = 2,8
$2,8 \cdot 2,5 = 7$
En ruta på pappret = 7cm
En sida = 14
$14+14+14+14=56$

Kvadrat C: 40 cm
Hälften så stor som "kvadrat A"
$10+10+10+10=40$

Kvadrat D: 28cm
Hälften så stor som B!
$7+7+7+7=28$

Uppgift punkt 2

$\frac{D}{C}=\frac{28}{40}=0,7$ $\quad \frac{C}{B}=\frac{40}{56}\approx 0,714=0,7$ $\quad \frac{B}{A}=\frac{56}{80}=0,7$

Uppgift punkt 3

$a=80cm \quad k=0,7 \quad$ ex $n=1000$

$$S_n=\frac{80\cdot 0,7^{1000}-1}{0,7-1}$$

$$\frac{80\cdot 0-1}{-0,3}$$

$$\frac{80\cdot -1}{-0,3}$$

$$S_{1000}=80\cdot 3,333333333=266,6666667$$

fortsättning...

$a = 80\,cm \quad k = 0{,}7 \qquad ex: 2000$

$$S_n = \frac{a k^n - 1}{k - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0{,}7^{2000} - 1}{0{,}7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0 - 1}{-0{,}3}$$

$$80 \cdot 3{,}333\,333\,333 = 266{,}666\,6667$$

$a = 80\,cm \quad k = 0{,}7 \qquad ex\ n = 640$

$$S_n = \frac{a k^n - 1}{k - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0{,}7^{640} - 1}{0{,}7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0{,}7^{640} - 1}{0{,}7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0 - 1}{-0{,}3}$$

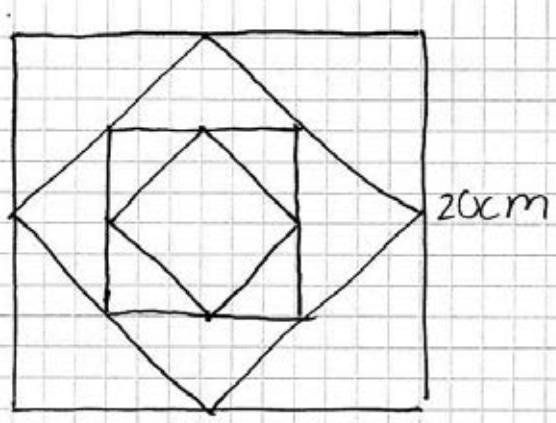
$$80 \cdot 3{,}333\,333\,333 = 266{,}666\,6667$$

När n är väldigt stort ex $n = 1000 = 266$,
$n = 2000 = 266$
Alltså när n är stort förändras inte svaret. Inte ens om $n = 1000000$ förändras inte svaret

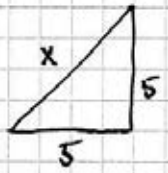
Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/0	Antyder att talföljden är geometrisk, men argumenterar ej för detta.
	X	1/1	Specialfallen får anses vara tillräckligt väl valda utifrån frågeställningen. Finner och styrker att ”När *n* är stort förändras inte svaret”.
Redovisning och matematiskt språk	X	0	Den matematiska terminologin undviks i lösningens första del vilket gör den delen av lösningen svår att förstå. Parenteser , = och ≈ används ej där det behövs. = missbrukas.
Summa		**4/1**	

Elevlösning 3 (4 g och 3 vg)



Den första har en omkrets på 80 cm
Därefter blir hypotenusan av en av kvadraterna halva ena sidan.



Varje ruta är 5 cm $5^2+5^2=x^2$

$x=\sqrt{50}\approx 7{,}071$

2x per sida
Andra omkretsen är $14{,}142\cdot 4\text{cm}\approx 56{,}5685\text{cm}$
Tredje omkretsen $10\cdot 4\text{cm}=40\text{cm}$
Fjärde där x är samma $\approx 7{,}071\text{cm}$
$7{,}071\cdot 4\text{cm}\approx 28{,}2843\text{cm}$

Totala omkretsen för de fyra är
$80+56{,}5685+40+28{,}2843\approx 204{,}8528$

Svar: Totala omkretsen är 204,85 cm

$a_1=80\text{cm}$ $\quad a_2/a_1\approx 0{,}7071$
$a_2=56{,}568\text{cm}$ $\quad a_3/a_2\approx 0{,}70711$ $\quad k=0{,}7071$
$a_3=40\text{cm}$ $\quad a_4/a_3\approx 0{,}7071$
$a_4=28{,}284\text{cm}$

Geometrisk talföljd betyder att det ska bli samma värde, men det blev lite annat värde för avrundningen

Geometrisk summa : $S_n = a_1 \left(\frac{k^n - 1}{k-1}\right)$

Geometrisk summa av figurerna där k är kvoten för två på varandra följande kvadrater

$a_1 = 80$ cm

$S_7 \approx 80 \left(\frac{0{,}7^7 - 1}{0{,}7 - 1}\right) \approx 244{,}70552$

$S_9 \approx 80 \left(\frac{0{,}7^9 - 1}{0{,}7 - 1}\right) \approx 255{,}9057048$

$S_{20} \approx 80 \left(\frac{0{,}7^{20} - 1}{0{,}7 - 1}\right) \approx 266{,}4538873$

$S_{30} \approx 80 \left(\frac{0{,}7^{30} - 1}{-0{,}3}\right) \approx 266{,}6606562$

$S_{40} \approx 80 \left(\frac{0{,}7^{40} - 1}{-0{,}3}\right) \approx 266{,}6664969$

$S_{50} \approx 80 \left(\frac{0{,}7^{50} - 1}{-0{,}3}\right) \approx 266{,}6666619$

$S_{100} \approx 80 \left(\frac{0{,}7^{100} - 1}{-0{,}3}\right) \approx 266{,}6666667$

Du ser kvadrater det blir så ändras det inte så mycket. Det kommer till en punkt där omkretsen förblir konstant. Vid S_{30} blir det hela tiden 266,66

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/1	Argumenterar för att talföljden är geometrisk.
	X	1/1	Väl valda specialfall. Finner och styrker att summan av omkretsarna ”Kommer till en punkt där omkretsen förblir konstant”.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Tydlig redovisning samt uppvisar inga brister i eller undvikande av matematisk terminologi.
Summa		**4/3**	

Elevlösning 4 (4 g och 3 vg och ¤)

Längden mellan två linjer är 5 cm $\left(\frac{20}{4}\right)=5$

* - Den största kvadraten har omkretsen: $O_1 = 20 \cdot 4 = 80$ cm

- nästa kvadrat har sidan, s_2. Den är hypotenusa av en triangel med sidorna 10 cm

$s_2^2 = 10^2 + 10^2 \qquad s_2 = \sqrt{100+100} = 14{,}14213562$ cm

$O_2 = s_2 \cdot 4 = 56{,}56854249$ cm ≈ 57 cm

- nästa kvadrat har sidorna 10 cm långa, längden mellan två strecken

$O_3 = 10 \cdot 4 = 40$ cm

- den minsta kvadraten har sidan s_4. den är hypotenusa av en triangel med sidorna 5 cm.

$s_4^2 = 5^2 + 5^2 \qquad s = \sqrt{25+25} = 7{,}071067812$ cm

$O_4 = s_4 \cdot 4 = 28{,}28427125$ cm ≈ 28 cm

* $k = \frac{O_2}{O_1} = \frac{56{,}56854249}{80} = 0{,}707106781 \approx 0{,}707$

$k = \frac{O_3}{O_2} = \frac{40}{56{,}56854249} = 0{,}707106781 \approx 0{,}707$

$k = \frac{O_4}{O_3} = \frac{28{,}28427125}{40} = 0{,}707106781 \approx 0{,}707$

kvoten är ungefär densamma, dvs det är en geometrisk talföljd

av den fås en geometrisk summa

$S_4 = \frac{80(0{,}707^4 - 1)}{0{,}707 - 1} = 204{,}8193794 \approx 205$ cm är

summan av kvadraterna

$S = 80 + 57 + 40 + 28 = 205$ cm

Summan av omkretserna fås ur en geometrisk summa eftersom kvoten mellan två närliggande tal är samma

$\left(S_n = a_1\left(\frac{k^n - 1}{k-1}\right)\right)$

Ju fler kvadrater man har desto mindre blir omkretsen för de nya kvadraterna, ju mindre de blir, desto mindre ändras summan av alla omkretsar för i sammandel $S_n = 80\left(\frac{0{,}707^n - 1}{0{,}707 - 1}\right)$

så blir $(0{,}707^n - 1) = -1$ när n är tillräckligt stort

Svaret blir alltid $\frac{80 \cdot (-1)}{0{,}707 - 1} \approx 273$ cm

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/1	Eleven argumenterar inledningsvis för att tal-följden är geometrisk genom kvotberäkningar.
	X	1/1	Argumenterar för att ” Svaret blir alltid $\frac{80 \cdot (-1)}{0{,}707 - 1} \approx 273$ cm ” på ett godtagbart sätt.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**4/3**/¤	

Kommentar: Elevlösningen uppvisar ¤-kvalitet eftersom eleven tecknar summans värde för *n* termer och godtagbart redogör för vad som händer med $0{,}707^n$ när *n* går mot oändlighet-en, samt slutligen finner att ”svaret blir alltid 273 cm” Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)
R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)
A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)
D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				