NATIONAL TEST IN MATHEMATICS COURSE C
SPRING 2003

Directions

Test time	240 minutes for Part I and Part II together. We recommend that you spend no more than 60 minutes on Part I.
Resources	**Part I:** ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C, D and E.” *Please note calculators are not allowed in this part.* **Part II:** Calculators, and ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C, D and E”.
Test material	The test material should be handed in together with your solutions. Write your name, the name of your education programme / adult education on all sheets of paper you hand in. *Solutions to Part I should be handed in before you retrieve your calculator. You should therefore present your work on Part I on a separate sheet of paper. Please note that you may start your work on Part II without a calculator.*
The test	The test consists of a total of 17 problems. **Part I** consists of 8 problems and **Part II** consists of 9 problems. To some problems (where it says *Only answer is required*) it is enough to give short answers. For the other problems short answers are not enough. They require that you write down what you do, that you explain your train of thought, that you, when necessary, draw figures. When you solve problems graphically/numerically please indicate how you have used your resources. Problem 17 is a larger problem which may take up to an hour to solve completely. It is important that you try to solve this problem. A description of what your teacher will consider when evaluating your work, is attached to the problem. Try all of the problems. It can be relatively easy, even towards the end of the test, to receive some points for partial solutions. A positive evaluation can be given even for unfinished solutions.
Score and mark levels	The maximum score is 42 points. The maximum number of points you can receive for each solution is indicated after each problem. If a problem can give 2 ”Pass”-points and 1 ”Pass with distinction”-point this is written (2/1). Some problems are marked with ¤, which means that they more than other problems offer opportunities to show knowledge that can be related to the criteria for Pass with Special Distinction in Assessment Criteria 2000. Lower limit for the mark on the test Pass: 12 points Pass with distinction: 25 points of which at least 6 ”Pass with distinction points”. Pass with special distinction: The requirements for Pass with distinction must be well satisfied. Your teacher will also consider how well you solve the ¤-problems.

Name: ______________________________ School: _________________________

Education programme/adult education: ____

Part I

This part consists of 8 problems that should be solved without the aid of a calculator. Your solutions to the problems in this part should be presented on separate sheets of paper that must be handed in before you retrieve your calculator. Please note that you may begin working on Part II without the aid of a calculator.

1. Assume that $f(x) = 3x^2 - 4$

a) Determine $f(5)$ *Only answer is required* (1/0)

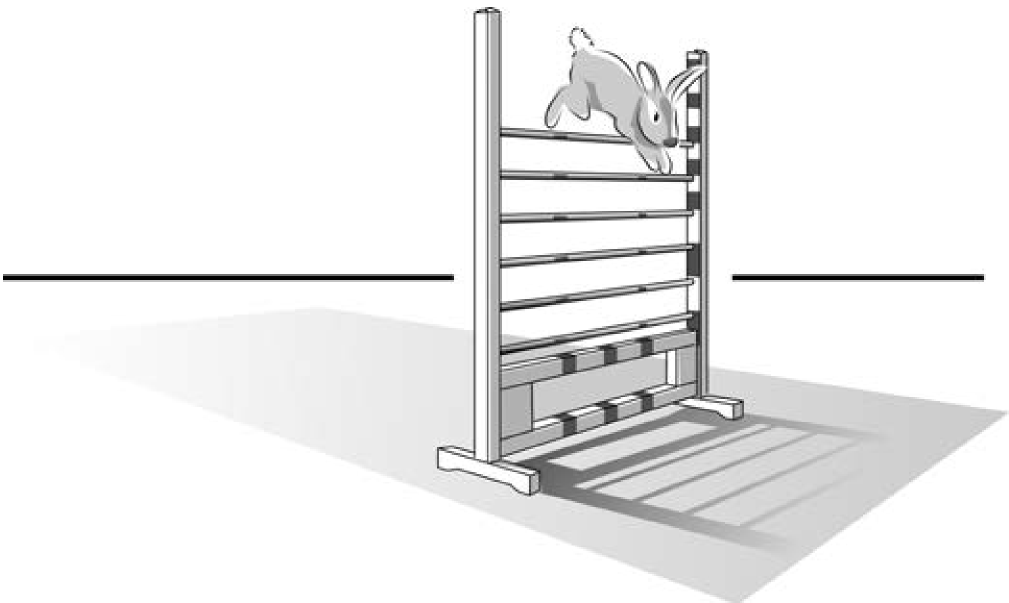
b) Determine $f'(3)$ *Only answer is required* (1/0)

2. Which of the alternatives below is a solution to the equation $10^x = 5$?

A)	B)	C)	D)	E)
$x = \dfrac{\lg 10}{\lg 5}$	$x = \lg 0.5$	$x = \lg 2$	$x = \lg 5$	$x = \dfrac{\lg 5}{10}$

Only answer is required (1/0)

3.



In 1997, the rabbit Tösen from Denmark set a world record in high jump for rabbits. According to one model, Tösen's height during the jump is given by
$h = 4x - 4x^2$
where h is the height in metres above the floor and where x is the distance in metres along the floor from the take-off.
Calculate Tösen's maximum height during the jump by using the derivative. (2/0)

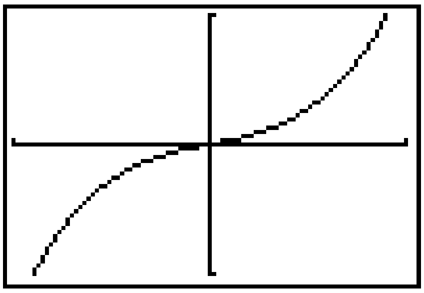
4. Solve the equation $2x^3 - 18x = 0$ (2/0)

5. Simplify the following expressions as far as possible.

a) $5(x-1)^m - 2(x-1)^m$ *Only answer is required* (1/0)

b) $5(x-1)^m \cdot 2(x-1)^m$ *Only answer is required* (0/1)

6. Your class mate Kalle is thinking about the looks of the graph to the function $f(x) = x^3 + 0.3x$. He shows you the graph on his graphic calculator, see figure below.

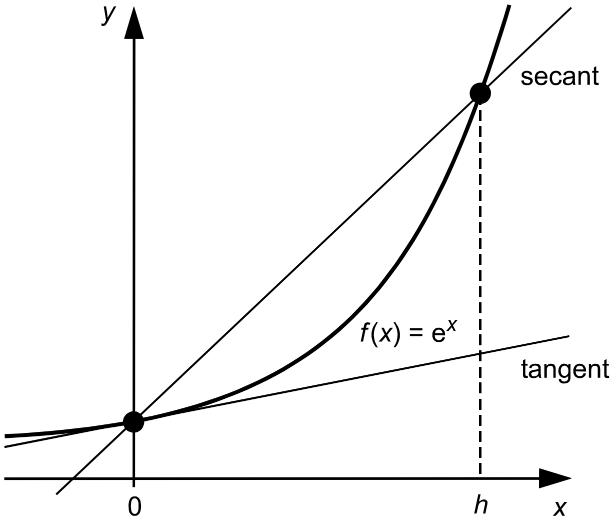


Kalle says: 'It seems as if this function has no maximum or minimum point at all…. At least it doesn't show in the calculator's window. I've tried everything! Can this function still have such points?'

You reply: 'I can show you how to decide whether the function $f(x) = x^3 + 0.3x$ has a maximum or a minimum point *without using* the calculator!'

Show how you do it. (1/1)

7. The figure below shows the graph to the function $f(x) = e^x$ and a tangent to the point on the curve where $x = 0$. In the figure you can also see a straight line that passes through the points on the curve where $x = 0$ and $x = h$. Such a line is called a secant.

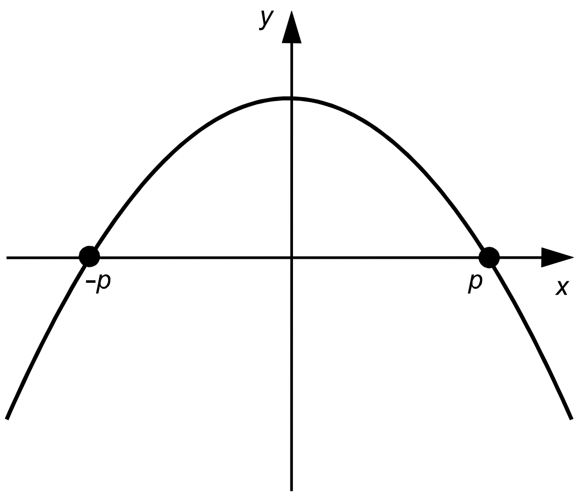


a) Write down an expression for the gradient to the *secant*.

Only answer is required (0/1)

b) Calculate the gradient to the *tangent*. Justify your answer. (0/2)

8.



The figure shows the graph to a quadratic function $y = f(x)$ with zeros $x_1 = -p$ and $x_2 = p$. It also holds that $f'(p) = k$

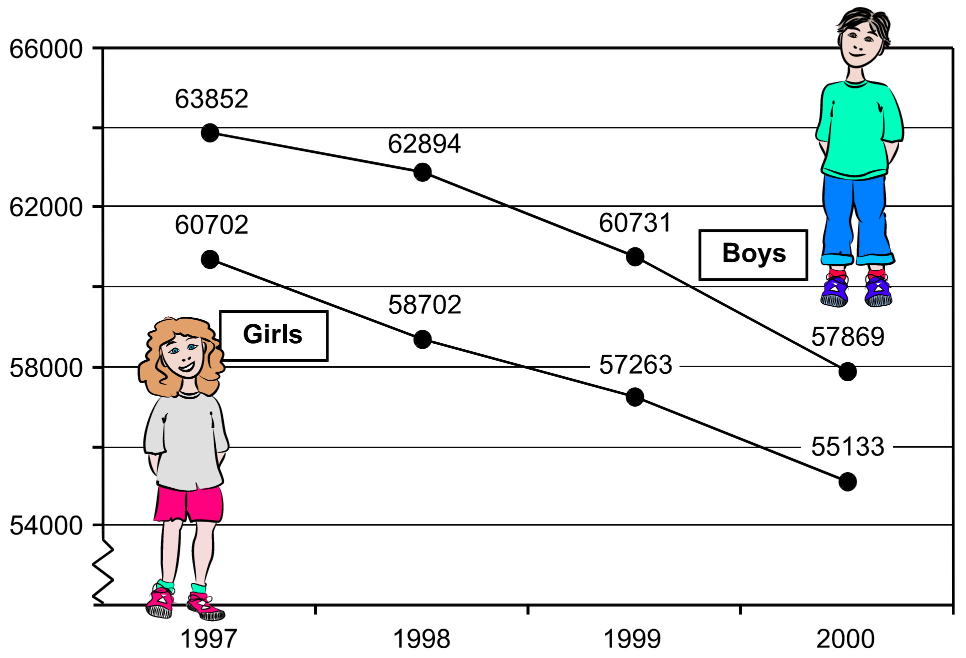
Show that $f'(0.5p) = 0.5k$ (0/2/¤)

Part II

This part consists of 9 problems and you may use a calculator when solving them. Please note that you may begin working on Part II without a calculator.

9. Give an example of a function of the fourth degree and write down the derivative to that function. (2/0)

10. The diagram below shows the number of boys and girls respectively in the first grade in the Swedish compulsory school during the years 1997-2000.



Calculate the average rate of change for the *total* number of pupils in first grade in the Swedish compulsory school during the period 1997-2000. (2/0)

11. For the linear function $y = f(x)$ it holds that $f(3) = 7$ and $f'(3) = 1$
Write down the function on the form $y = kx + m$ (2/0)

12. The photosensitivity of photographic film was earlier given in ASA (*American Standards Association*) or in DIN (*Deutsche Industrie Normen*).

The relation between a ASA and d DIN is given by $a = 25 \cdot 2^{\frac{d-15}{3}}$

a) A film suitable for use in daylight has photosensitivity 24 DIN. Calculate how many ASA this corresponds to. (1/0)

b) A film manufactured for extremely low light conditions has photosensitivity 6400 ASA. Calculate how many DIN this corresponds to. (1/1)

13. Simplify the expression $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{(x+h)-x}$ as far as possible. (1/1)

14. In a wage agreement the workers were guaranteed a wage-increase of at least 20 % during a period of five years. What average yearly percentage increase is necessary to fulfil the agreement? (0/2)

15. When a certain fluid is heated, its volume V depends on the temperature T. Aron, Bert and Carl have found a diagram that shows the graph to the *derivative* $V'(T)$ in the temperature interval $0^\circ\mathrm{C} \le T \le 30^\circ\mathrm{C}$, see figure 1.

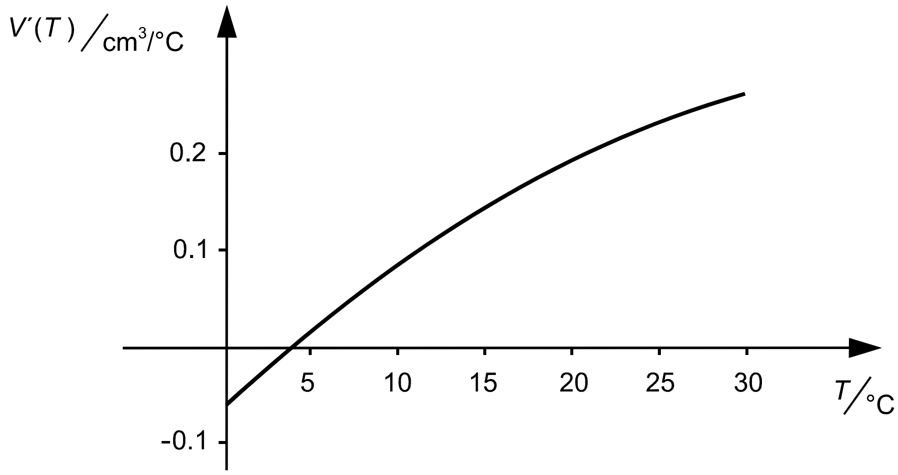


Figure 1

They are of different opinions regarding in which way the volume changes when the temperature increases, see figure 2. Use the graph above to decide who of the three is right. Justify your answer.

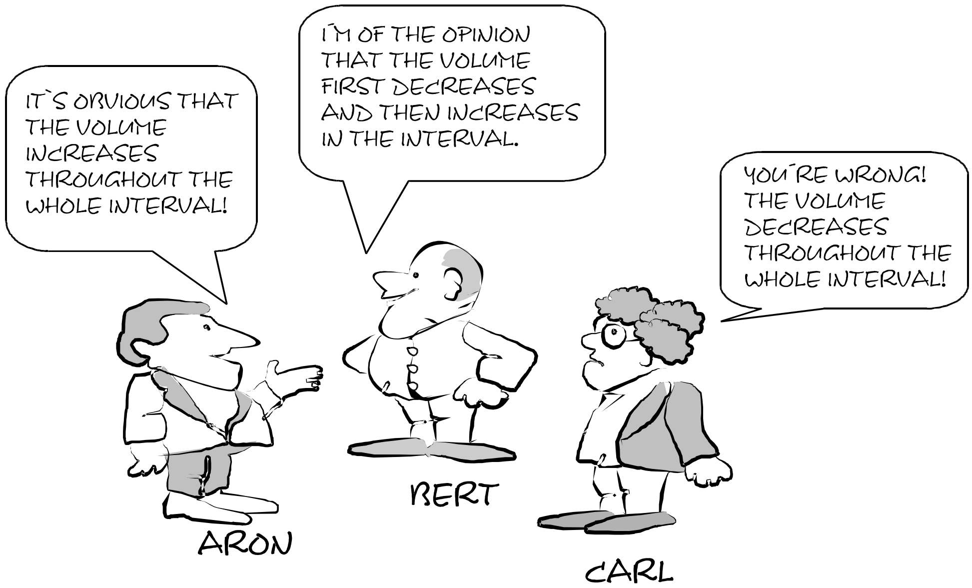


Figure 2

(0/2)

16. Per and Stina have received an order of shelves from a multiple chain store. The rectangular shelves must have an area of 20 dm^2 and have three sides of glass. The glass must be 0.06 dm thick and 0.8 dm high. The longer glass plate must cover the sides of the two shorter glass plates. See figures below.

Per and Stina want to use as little glass as possible to the three sides since the glass is expensive.

Calculate the width x and the length y of the shelves so that the area of the glass is minimized.

Figure 1. Shelf seen from the side

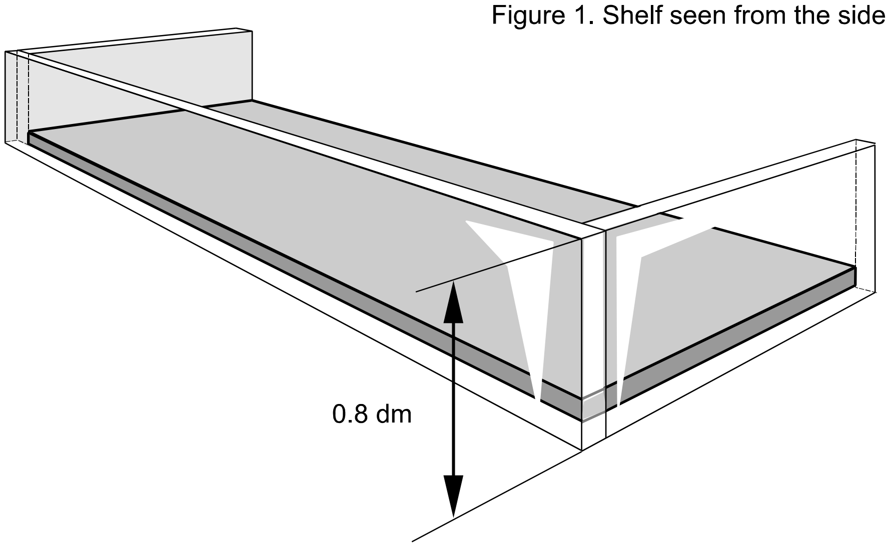
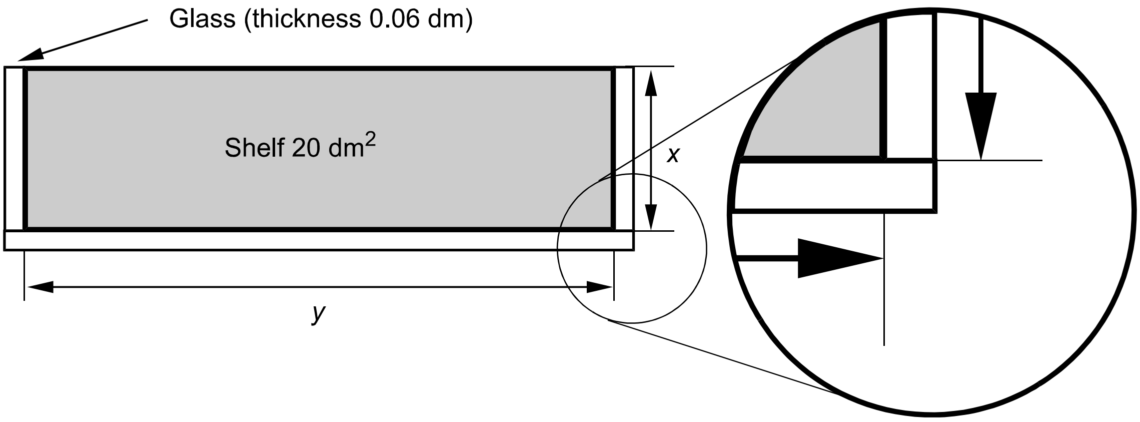


Figure 2. Shelf seen from above



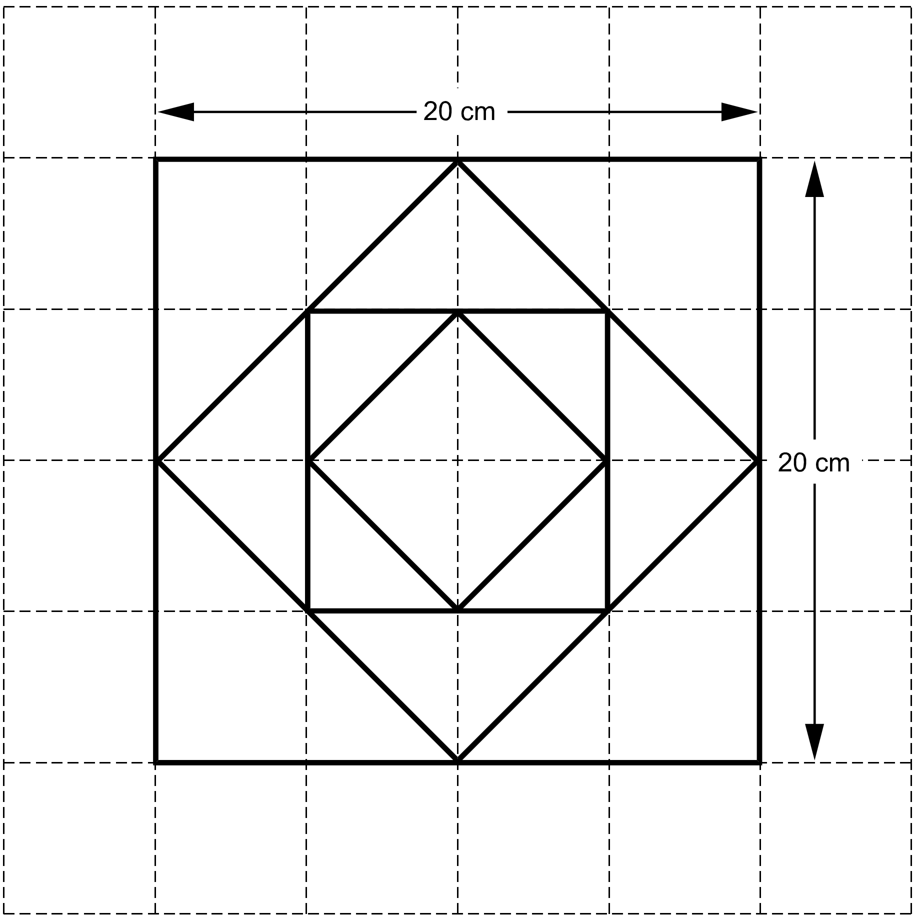
(Figures not drawn to scale)

(0/4/¤)

When assessing your work with the following problem, the teacher will take into consideration:

- How systematic you are in your investigation
- How well you justify and argue for your conclusions
- How well you present your work
- How well you use the mathematical language

17.



In the grid above you can see four squares. The largest square has sides 20 cm. The pattern of squares is built up according to the principle that a smaller square always has its corners placed in the middle of the sides of the square that nearest encloses the smaller square.

- Determine the circumference of each one of the four squares.
- Show that the four circumferences form a geometric progression.
- Assume that we add more and more squares that are smaller and smaller in size according to the principle above. Investigate and describe as completely and as fully as you can what happens with the value of the sum of all the circumferences of the squares. Justify your conclusions. (4/3/¤)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 och 8 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 3, 12, 14, 16 och 17 som avser indikera elevens kunskaper i bl a modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 3, 6, 7b, 8, 15, 16 och 17. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 7b, 8, 14, 15, 16 och 17 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 6, 8, 9 och 17 som alla har en högre grad av öppenhet, medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik vt 2003 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde											Betygskriterium														
Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1a	1	0			x										x		x												
1b	1	0									x	x			x		x												
2	1	0				x									x														
3	2	0									x	x	x		x	x	x												
4	2	0								x							x												
5a	1	0							x						x		x												
5b	0	1							x										x			x	x						
6	1	1									x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x						
7a	0	1									x								x			x	x						
7b	0	2									x	x							x	x	x	x	x						
8	0	2	¤						x		x	x	x						x	x	x	x	x		x		x	x	
9	2	0							x		x	x			x		x												
10	2	0									x				x		x												
11	2	0			x				x		x	x					x												
12a	1	0				x	x								x		x												
12b	1	1				x	x										x		x			x	x						
13	1	1							x	x							x		x			x	x						
14	0	2				x	x												x		x	x	x						
15	0	2									x	x	x						x	x	x	x	x						
16	0	4	¤				x		x		x	x	x						x	x	x	x	x		x	x		x	
17	4	3	¤		x	x	x								x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	
Σ	22	20		2/0		6/6		5/3			9/11																		

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 42 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	12 poäng.
Väl godkänd:	25 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd	25 poäng varav minst 12 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i minst en* av ¤-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)
   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp
   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]
   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg
   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaC vt 2003)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
Del I			
1.			**Max 2/0**
	a)	Korrekt svar (71)	+1 g
	b)	Korrekt svar (18)	+1 g
2.			**Max 1/0**
		Korrekt svar (Alternativ D; $x = \lg 5$)	+1 g
3.			**Max 2/0**
		Godtagbar bestämning av maximipunktens x-koordinat, $x = 0{,}5$	+1 g
		med godtagbar bestämning av maximal hopphöjd (1 m)	+1 g
4.			**Max 2/0**
		Redovisad godtagbar metod som leder till två korrekta rötter	+1 g
		med ytterligare en korrekt rot funnen ($x_1 = -3$; $x_2 = 0$ och $x_3 = 3$)	+1 g
5.			**Max 1/1**
	a)	Korrekt svar $\left(3(x-1)^m\right)$	+1 g
	b)	Korrekt svar $\left(10(x-1)^{2m}\right)$	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
6.		**Max 1/1**
	Godtagbar ansats, t ex sätter $3x^2 + 0{,}3 = 0$	+1 g
	med godtagbar motivering till varför funktionen saknar extrempunkter.	+1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

$f(x) = x^3 + 0{,}3x$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}3$

$f'(x) = 0$ eftersom lutning där är noll

$3x^2 + 0{,}3 = 0$

$3x^2 = -0{,}3$

$x^2 = \frac{-0{,}3}{3}$ $x = \sqrt{-0{,}1}$ = går inte

Nej, denna funktion har ingen max eller minimi punkt. Det ser vi eftersom vi inte får något värde på x när vi satt lutning som 0

Kommentar: Motiveringen, ” $x = \sqrt{-0{,}1} =$ går inte” gör att kvaliteten i elevens lösning bedöms ligga just precis över gränsen för erhållande av 1 vg-poäng för motivering.

7.		**Max 0/3**
a)	Godtagbart tecknad riktningskoefficient, t ex $\frac{e^h - e^0}{h - 0}$	+1 vg
b)	Godtagbar ansats, visar insikt om att tangentens riktningskoefficient motsvaras av $f'(0)$	+1 vg
	med korrekt svar (1) och godtagbar motivering, ” Eftersom $f'(0) = e^0 = 1$”	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
8.		**Max 0/2/¤**

Redovisad godtagbar slutförd lösning +1 vg
Redovisad lösning eller ansats till lösning där eleven visar insikt i varför en andragradsfunktion på den generella formen $f(x) = ax^2 + c$ ska användas, och/eller använder godtyckliga x-koordinater, p respektive $0{,}5p$ +1 vg

Eleven ger ett korrekt och slutfört bevis som helt baseras på det generella fallet. Redovisningen är tydlig och välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt. ¤

Exempel på olika elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

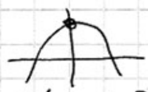
Elevlösning 1 (1 vg)

antag t.ex att $f(x) = -x^2+4$ då skulle $f'(x) = -2x$
och om man sätter in ett värde på x
t.ex. $f'(4) = -8$
och sedan sätter man in hälva det värdet
$f'(2) = -4$
Ett ex. till: $f'(10) = -20$ och $f'(5) = -10$
Svar: Vad du än väljer för värde på p
så blir $f'(0{,}5p)$ hälften så stor som $f'(p)$

Kommentar: Eleven ger ett godtagbart och slutfört bevis. Beviset är helt baserat på specialfall.

Elevlösning 2 (1 vg)

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ $f'(x) = 2Ax + B$



$f'(0) = 0$ pga maxpunkt så B måste va noll
$f(p) = Ap^2 + C$?
$f(0{,}5p) = 0{,}25Ap^2 + C$

Kommentar: Eleven ger en generell ansats som bygger på användande av en andragradsfunktion på formen $f(x) = ax^2 + c$, men slutför inte beviset.

Elevlösning 3 (2 vg)

Om $f(x) = 7 - 2x^2$ så blir $f'(x) = -4x$

och $f'(p) = -4p = k$ och $f'(0,5p) = -4 \cdot 0,5p = -2p$

Om $-4p = k$ så måste $-2p = 0,5k$

alltså hälften så stort

Kommentar: Eleven ger ett godtagbart och slutfört bevis. Eleven använder godtyckliga *x*-koordinater *p* respektive 0,5*p*.

Elevlösning 4 (2 vg och ¤)

Vet att $f'(p) = k$

Visa att $f'(0,5p) = 0,5k$

Nollställen $(-p, 0)$ och $(p, 0)$

$f(x) = \underbrace{c(x+p)(x-p)}_{\text{konjugatregel}} = c(x^2 - p^2) = cx^2 - cp^2$

Derivatan $f'(x) = 2cx - 0$

$f'(p) = 2cp = k$

$f'(0,5p) = 2c \cdot 0,5p = cp = \frac{k}{2p} \cdot p = \frac{k}{2} = 0,5k$

$c = \frac{k}{2p}$

alltså är $f'(0,5p) = 0,5k$

Kommentar: Eleven ger ett godtagbart och slutfört generellt bevis. Redovisningen är tydlig och välstrukturerad och det matematiska språket är korrekt.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

Del II

9.		**Max 2/0**
	Godtagbart angiven fjärdegradsfunktion	+1 g
	med korrekt derivata	+1 g
10.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar lösning (≈ 3851 elever/år)	+1-2 g
11.		**Max 2/0**
	Godtagbar metod, t ex ritat en rät linje med riktningskoefficienten 1 som går genom punkten $(3,7)$	+1 g
	med korrekt svar ($y = x + 4$)	+1 g
12.		**Max 2/1**
	a) Redovisad godtagbar lösning (200)	+1 g
	b) Godtagbar ansats, t ex tecknat ekvationen $6400 = 25 \cdot 2^{\frac{d-15}{3}}$	+1 g
	med godtagbart svar (39)	+1 vg
13.		**Max 1/1**
	Korrekt utveckling av $(x+h)^3$	+1 g
	med korrekt svar $\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)$	+1 vg
14.		**Max 0/2**
	Godtagbar ansats, t ex tecknat en ekvation av typen $20000x^5 = 1{,}20 \cdot 20000$	+ 1 vg
	med godtagbart svar (3,7 %)	+ 1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

15. **Max 0/2**

Eleven anger korrekt svar (Bert har rätt) med en motivering som visar insikt om betydelsen av derivatans tecken för volymändringen, t ex genom att ge en motivering som visar insikt om att negativ derivata innebär att volymen minskar +1 vg
med klar och tydlig motivering + 1 vg

Exempel på olika elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

bert har rätt eftersom linjen börjar på minus. när
det är minus i en derivata så blir det mindre och
mindre tills den kommer till 0. då ökar den.

Kommentar: Eleven visar insikt om att negativ derivata innebär att volymen minskar (om ”det” syftar på volymen). Användandet av ”det” och ”den” gör att motiveringen inte är tydlig.
Kvaliteten i elevens lösning bedöms ligga precis just över gränsen för erhållande av 1 vg-poäng.

Elevlösning 2 (2 vg)

När $V'(T)<0$ minskar volymen. När $V'(T)>0$
ökar volymen
BERT har rätt, eftersom först är derivatan
negativ tills ungefär 4°C sedan ökar volymen
då derivatan är positiv

Kommentar: Eleven ger en relativt tydlig motivering. Eftersom det aldrig nämns *varför* t ex negativ derivata innebär att volymen minskar bedöms kvaliteten i elevens lösning ligga precis just över gränsen för erhållande av 2 vg-poäng.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
16.		**Max 0/4/¤**
	Godtagbart tecknad funktion i en variabel, t ex areafunktionen $A(x) = 1{,}6x + \dfrac{16}{x} + 0{,}096$	+1-2 vg
	med godtagbar bestämning av derivatans nollställe	+1 vg
	med godtagbart svar (bredd 3,2 dm och längd 6,3 dm)	+1 vg
	Eleven verifierar minimum algebraiskt eller genom att behandla funktionen grafiskt på räknaren. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig och eleven använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt språk.	¤

17. **4/3/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre**	**→ Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven beräknar, i punkt 1, godtagbart de fyra omkretsarna. (80 cm, 57 cm, 40 cm och 28 cm) och använder, i punkt 3, godtagbart formeln $\frac{a(k^n-1)}{k-1}$ i sin undersökning. **2/0**		**2/0**
Matematiskt resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven *antyder*, i punkt 2, att talföljden är geometrisk genom att t ex beräkna kvoten mellan en term och den närmast föregående minst två gånger. **1/0**	Eleven *argumenterar*, i punkt 2, för att talföljden är geometrisk t ex genom att *uttrycka* att en geometrisk talföljd kännetecknas av att kvoten mellan en term och den närmast föregående är konstant för att därefter visa att det förhåller sig så i detta fall. **1/1**	**1/1**
	Eleven formulerar, i punkt 3 någon slutsats om summans värde t ex ”Summan ökar i minskande takt när man inför fler kvadrater”. Slutsatsen baseras på egna valda fall. **1/0**	Eleven formulerar, i punkt 3, någon slutsats som rör summans värde i förlängningen t ex ”Summan blir 273”. Slutsatsen baseras på en undersökning av egna, väl valda specialfall, grafisk behandling på räknaren eller algebraiska metoder **1/1**	**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt. **0/1**	**0/1**
Summa			**4/3**

Eleven beräknar omkretsarna samt visar och argumenterar för att talföljden är geometrisk. Eleven väljer en generell metod i punkt 3 genom att teckna summans värde för n termer. Eleven formulerar en godtagbar slutsats som rör summans gränsvärde, t ex ”Summan kan högst bli 273”. Slutsatsen baseras på en godtagbar argumentation för vad som händer med k^n när n går mot oändligheten. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17

Elevlösning 1 (3 g och 1 vg)

1: $20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

2: $\sqrt{10^2+10^2} \cdot \sqrt{10^2+10^2} = 200 \text{ cm}^2$

3: $10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$

4: $\sqrt{5^2+5^2} \cdot \sqrt{5^2+5^2} = 50 \text{ cm}^2$

$a_1 = 400 \text{ cm}^2 \quad k = 0,5$

$S_{10} = \dfrac{400(0,5^{10}-1)}{0,5-1} \approx 800 \text{ cm}^2$

$S_3 = \dfrac{400(0,5^3-1)}{0,5-1} = 700 \text{ cm}^2$

$400 + 200 + 100 = 700 \text{ cm}^2$

$700 = 700!$

$(0,5^{20} = 9 \cdot 10^{-7} \approx 0)$

Parantesen i täljaren kommer närma sig mer och mer -1 när den gör det så kommer den tillslut att bli $\dfrac{-400}{-0,5} = 800$ större area än så kan man inte få!

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X			1/0	Beräknar *areor* istället för omkretsar, men kan behandla summaformeln godtagbart.
Matematiska resonemang	X			1/0	Tydlig argumentation för att talföljden är geometrisk saknas.
		X		1/1	Finner och styrker att summan närmar sig ett gränsvärde.
Redovisning och matematiskt språk	X			0	Redovisningen är inte lätt att följa och förstå eftersom den är alltför kortfattad.
Summa				**3/1**	

Elevlösning 2 (4 g och 1 vg)

Uppgift punkt 1

Kvadrat A : 80 cm
$20+20+20+20=80$

Kvadrat B : 56cm
En ruta = 2cm = 5cm enligt pappret
$\frac{5}{2} = 2,5$
En ruta på snedden = 2,8
$2,8 \cdot 2,5 = 7$
En ruta på pappret = 7cm
En sida = 14
$14+14+14+14=56$

Kvadrat C : 40 cm
Hälften så stor som "kvadrat A"
$10+10+10+10=40$

Kvadrat D : 28cm
Hälften så stor som B!
$7+7+7+7=28$

Uppgift punkt 2

$\frac{D}{C} = \frac{28}{40} = 0,7$ $\frac{C}{B} = \frac{40}{56} \approx 0,714 = 0,7$ $\frac{B}{A} = \frac{56}{80} = 0,7$

Uppgift punkt 3

$a = 80\text{cm}$ $k = 0,7$ ex $n = 1000$

$$S_n = \frac{80 \cdot 0,7^{1000} - 1}{0,7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0 - 1}{-0,3}$$

$$\frac{80 \cdot -1}{-0,3}$$

$S_{1000} = 80 \cdot 3,333333333 = 266,6666667$

fortsättning...

a = 80 cm k = 0,7 ex: 2000

$$S_n = \frac{a k^n - 1}{k-1}$$

$$\frac{80 \cdot 0,7^{2000} - 1}{0,7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0 - 1}{-0,3}$$

$80 \cdot 3,333\ 333333 = 266,666\ 6667$

---

a = 80 cm k = 0,7 ex n = 640

$$S_n = \frac{a k^n - 1}{k-1}$$

$$\frac{80 \cdot 0,7^{640} - 1}{0,7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0,7^{640} - 1}{0,7 - 1}$$

$$\frac{80 \cdot 0 - 1}{-0,3}$$

$80 \cdot 3,333\ 333333 = 266,666\ 6667$

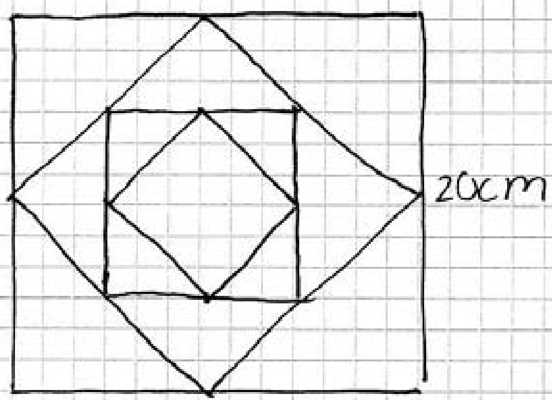
När n är väldigt stort ex n = 1000 = 266,
n = 2000 = 266

Alltså när n är stort förändras inte svaret. Inte ens om n = 1000000 förändras inte svaret

Bedömning

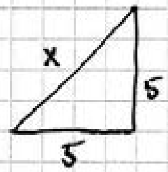
	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X		2/0	
Matematiska resonemang	X		1/0	Antyder att talföljden är geometrisk, men argumenterar ej för detta.
		X	1/1	Specialfallen får anses vara tillräckligt väl valda utifrån frågeställningen. Finner och styrker att ”När *n* är stort förändras inte svaret”.
Redovisning och matematiskt språk	X		0	Den matematiska terminologin undviks i lösningens första del vilket gör den delen av lösningen svår att förstå. Parenteser , = och ≈ används ej där det behövs. = missbrukas.
Summa			**4/1**	

Elevlösning 3 (4 g och 3 vg)



Den första har en omkrets på 80 cm

Därefter blir hypotenusan av en av kvadraterna halva ena sidan.



Varje ruta är 5 cm $\quad 5^2+5^2=x^2$

$x=\sqrt{50}\approx 7{,}071$

2x per sida

Andra omkretsen är $14{,}142\cdot 4\text{cm}=56{,}5685\text{cm}$

Tredje omkretsen $10\cdot 4\text{cm}=40\text{cm}$

Fjärde där x är samma $\approx 7{,}071\text{cm}$

$7{,}071\cdot 4\text{cm}\approx 28{,}2843\text{cm}$

Totala omkretsen för de fyra är

$80+56{,}5685+40+28{,}2843\approx 204{,}8528$

Svar: Totala omkretsen är 204,85 cm

$a_1=80\text{cm}$ $\quad a_2/a_1\approx 0{,}7071$

$a_2=56{,}568\text{ cm}$ $\quad a_3/a_2\approx 0{,}70711$ $\quad k=0{,}7071$

$a_3=40\text{cm}$ $\quad a_4/a_3\approx 0{,}7071$

$a_4=28{,}284\text{ cm}$

Geometrisk talföljd betyder att det ska bli samma värde, men det blev lite annat värde för avrundningen

Geometrisk summa : $S_n = a_1 \left(\frac{k^n - 1}{k-1}\right)$

Geometrisk summa av figurerna där k är kvoten för två på varandra följande kvadrater

$a_1 = 80\,cm$

$S_7 \approx 80 \left(\frac{0,7^7 - 1}{0,7-1}\right) \approx 244,70552$

$S_9 \approx 80 \left(\frac{0,7^9 - 1}{0,7-1}\right) \approx 255,9057048$

$S_{20} \approx 80 \left(\frac{0,7^{20} - 1}{0,7-1}\right) \approx 266,4538873$

$S_{30} \approx 80 \left(\frac{0,7^{30} - 1}{-0,3}\right) \approx 266,6606562$

$S_{40} \approx 80 \left(\frac{0,7^{40} - 1}{-0,3}\right) \approx 266,6664969$

$S_{50} \approx 80 \left(\frac{0,7^{50} - 1}{-0,3}\right) \approx 266,6666619$

$S_{100} \approx 80 \left(\frac{0,7^{100} - 1}{-0,3}\right) \approx 266,6666667$

Ju fler kvadrater det blir så ändras det inte så mycket. Det kommer till en punkt där omkretsen förblir konstant. Vid S_{30} blir det hela tiden 266,66

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/1	Argumenterar för att talföljden är geometrisk.
	X	1/1	Väl valda specialfall. Finner och styrker att summan av omkretsarna ”Kommer till en punkt där omkretsen förblir konstant”.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Tydlig redovisning samt uppvisar inga brister i eller undvikande av matematisk terminologi.
Summa		**4/3**	

Elevlösning 4 (4 g och 3 vg och ¤)

Längden mellan två linjer är 5 cm $\left(\frac{20}{4}\right) = 5$

✱ – Den största kvadraten har omkretsen : $O_1 = 20 \cdot 4 = 80$ cm

– nästa kvadrat har siden, s_2. Den är hypotenusa av en triangel med sidorna 10cm

$s_2^2 = 10^2 + 10^2 \qquad s_2 = \sqrt{100+100} = 14,1421356$ cm

$O_2 = s_2 \cdot 4 = 56,56854249$ cm ≈ 57 cm

– nästa kvadrat har sidorna 10cm långa, Längden mellan två sträcke

$O_3 = 10 \cdot 4 = 40$ cm

– den minsta kvadraten har siden s_4. den är hypotenusa av en triangel med sidorna 5 cm.

$s_4^2 = 5^2 + 5^2 \qquad s = \sqrt{25+25} = 7,071067812$ cm

$O_4 = s_4 \cdot 4 = 28,28427125$ cm ≈ 28 cm

✱ $k = \frac{O_2}{O_1} = \frac{56,5685425}{80} = 0,7071067811 = 0,707$

$k = \frac{O_3}{O_2} = \frac{40}{56,5685425} = 0,7071067812 = 0,707$

$k = \frac{O_4}{O_3} = \frac{28,28427125}{40} = 0,7071067813 = 0,707$

kvoten är ungefär densamma, dvs det är en geometrisk talföljd

av den fås en geometrisk summa

$S_4 = \frac{80(0,707^4 - 1)}{0,707 - 1} = 204,8193794 \approx 205$ cm Sv

summan av kvadraterna

$S = 80 + 57 + 40 + 28 = 205$ cm

Summan av omkretsarna fås ur en geometrisk summa eftersom kvoten mellan två närliggande tal är samma

$\left(S_n = a_1 \frac{(k^n - 1)}{k - 1}\right)$

* Ju fler kvadrater man har desto mindre blir omkretsen för de nya kvadraterna, ju mindre de blir desto mindre ändras summan av alla omkretsar för i samtendel $S_n = 80\frac{(0,707^n - 1)}{0,707 - 1}$

så blir $(0,707^n - 1) = -1$ när n är tillräckligt stort

Svaret blir alltid $\frac{80 \cdot (-1)}{0,707 - 1} \approx 273$ cm

Bedömning

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X		2/0	
Matematiska resonemang		X	1/1	Eleven argumenterar inledningsvis för att talföljden är geometrisk genom kvotberäkningar.
		X	1/1	Argumenterar för att ” Svaret blir alltid $\frac{80 \cdot (-1)}{0,707 - 1} \approx 273$ cm” på ett godtagbart sätt.
Redovisning och matematiskt språk		X	0/1	
Summa			**4/3**/¤	

Kommentar: Elevlösningen uppvisar ¤-kvalitet eftersom eleven tecknar summans värde för n termer och godtagbart redogör för vad som händer med $0,707^n$ när n går mot oändligheten, samt slutligen finner att ”svaret blir alltid 273 cm” Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)
R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)
A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)
D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				
Matematiska resonemang				
Redovisning och matematiskt språk				
Summa				