

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av juni 2014.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS C VÅREN 2004

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E". <i>Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.</i> Del II: Miniräknare och "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E".
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. <i>Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.</i>
Provet	Provet består av totalt 16 uppgifter. Del I består av 8 uppgifter och Del II av 8 uppgifter. Till några uppgifter (där det står <i>Endast svar fordras</i>) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 44 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med α , vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 13 poäng. Väl godkänd: 27 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänd: Utöver kraven för Väl godkänd ska du ha visat <i>MVG-kvaliteter i minst två</i> av α -uppgifterna. Du ska dessutom ha minst 14 vg-poäng.

Namn: _____ Skola: _____

Komvux/gymnasieprogram: _____

Del I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.

Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

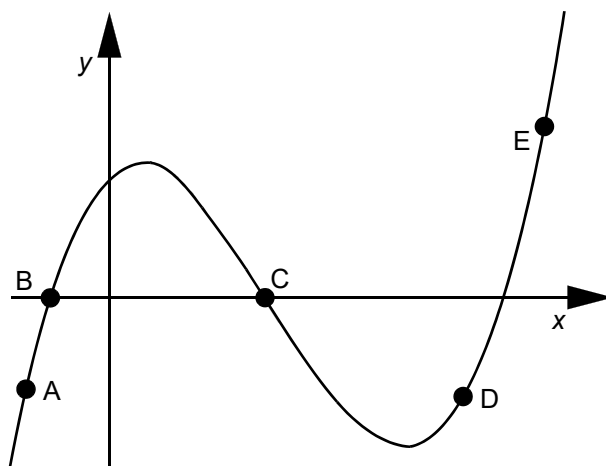
1. Derivera

a) $f(x) = 6x^2 + 9x + 1$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = 60e^{-2x}$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $f(x) = \frac{x+3}{4}$ *Endast svar fordras* (1/0)

2. Lös ekvationen $(x-2)(x+3)(x-5) = 0$ *Endast svar fordras* (1/0)

3. Bilden nedan visar huvuddragen av grafen till funktionen $y = f(x)$.

a) I vilken/vilka av punkterna A, B, C, D och E är derivatan negativ? *Endast svar fordras* (1/0)

b) Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 0$?
Motivera ditt svar utifrån grafens utseende. (1/0)

c) Hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 0$?
Motivera ditt svar utifrån grafens utseende. (1/0)

4. Lös ekvationerna. Svara exakt.

a) $x^9 = 18$ *Endast svar fordras* (1/0)

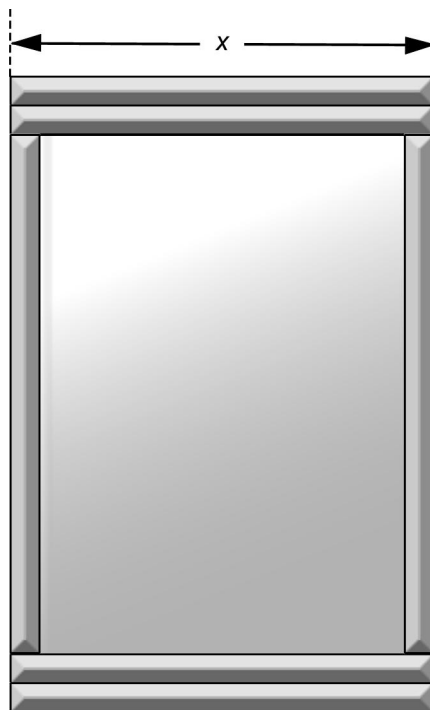
b) $9^x = 18$ *Endast svar fordras* (1/0)

5. Ibland kan det vara fördelaktigt att skriva om en exponentialfunktion med en annan bas.

a) Skriv om funktionen $y = 3^x$ med basen e . *Endast svar fordras* (1/0)

b) Ange en fördel med att använda basen e i exponentialfunktioner jämfört med att använda andra baser. *Endast svar fordras* (1/0)

6. En spegel ska tillverkas av ett rektangulärt spegelglas omgivet av en träram. Ramen ska tillverkas av en 0,5 dm bred trälist. Totalt ska 60 dm trälist användas. Ramen ska ha dubbla lister som över- och understycken, medan sidostyckena ska bestå av enkel list, se figur nedan.



Spegelglasets area A , som funktion av överstyckets längd x dm ges av sambandet $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$.

a) Använd derivata och bestäm för vilket värde på längden x som arean av spegelglasets är maximal. (3/0)

b) Visa att spegelglasets area A kan skrivas $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$, där x är överstyckets längd. (0/2/□)

7. Ordna följande fyra tal i storleksordning, från vänster till höger, med det minsta talet först.

$$\sqrt{10} \quad e \quad \lg 1000 \quad \ln e^2$$

Endast svar fordras (0/1)

8. I uttrycket $\frac{A}{Ax^m + x^{m+1}}$ är m ett heltal.

Bestäm konstanten A så att uttrycket ej är definierat för $x = 2$

(0/2/∞)

Del II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Ge exempel på en fjärdegradsfunktion och ange funktionens derivata. (2/0)

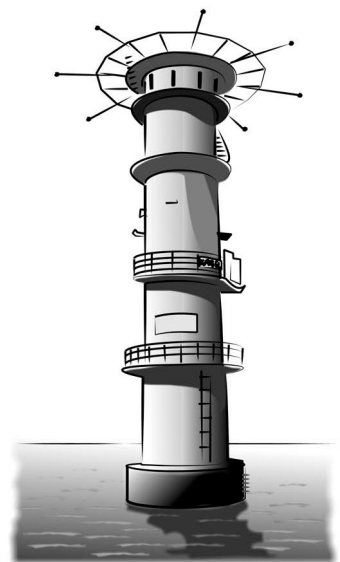
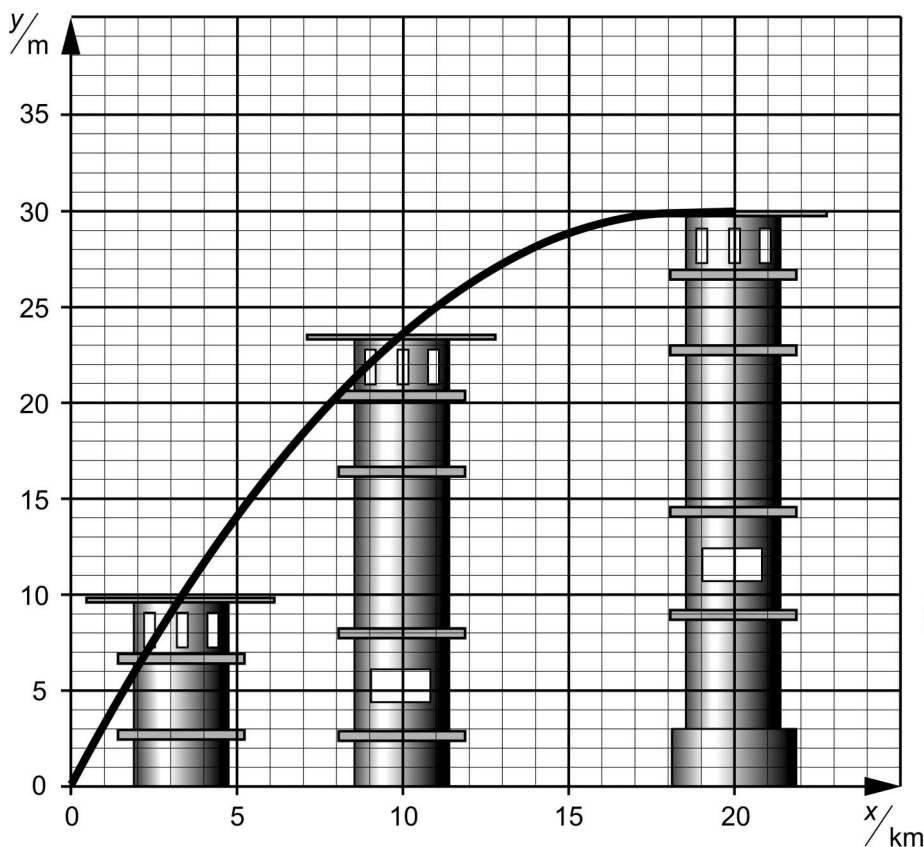
10. I en geometrisk summa är de tre första termerna $2 + 2,6 + 3,38 + \dots$

a) Bestäm den fjärde termen i summan. (1/0)

b) Beräkna summan av de 43 första termerna. (2/0)

11. Utanför Falsterbo i södra Skåne står fyrtornet Falsterborev fast förankrat i sjöbotten. Om man kommer söderifrån med båt ser man fyrtornets topp stiga upp vid horisonten. Kommer man närmare ser man allt mer av fyrtornet.

Låt x km vara den sträcka som man kört sedan man första gången såg en skymt av tornets topp. Låt y m vara höjden av den synliga delen av fyrtornet. Höjden y blir en funktion f av den körda sträckan x . Du ser funktionens graf nedan.



a) Bestäm $f'(10)$ med hjälp av grafen. (2/0)

b) Förklara i ord betydelsen av $f'(10)$ i detta sammanhang. (0/2)

12. Det finns flera funktioner för vilka det gäller att $f(0) = 200$ och $f'(0) = 200$. Bestäm en sådan funktion. (1/1)

13. Vid början av 1900-talet fanns uppskattningsvis 10 000 fjällgäss i Sverige. Därefter minskade populationen dramatiskt, och i början av 1980-talet var fjällgåsen i det närmaste helt utrotad i Sverige.

För att rädda arten startade därför Naturvårdsverket 1981 "Projekt fjällgås", som i korthet gick ut på att ändra fjällgässens flyttningsvägar. Projektet har varit lyckat och 1999 uppskattades den svenska populationen till 50 fåglar. År 2003 uppskattades den ha ökat till 90 fåglar.



© Foto: Lars Göran Lindström

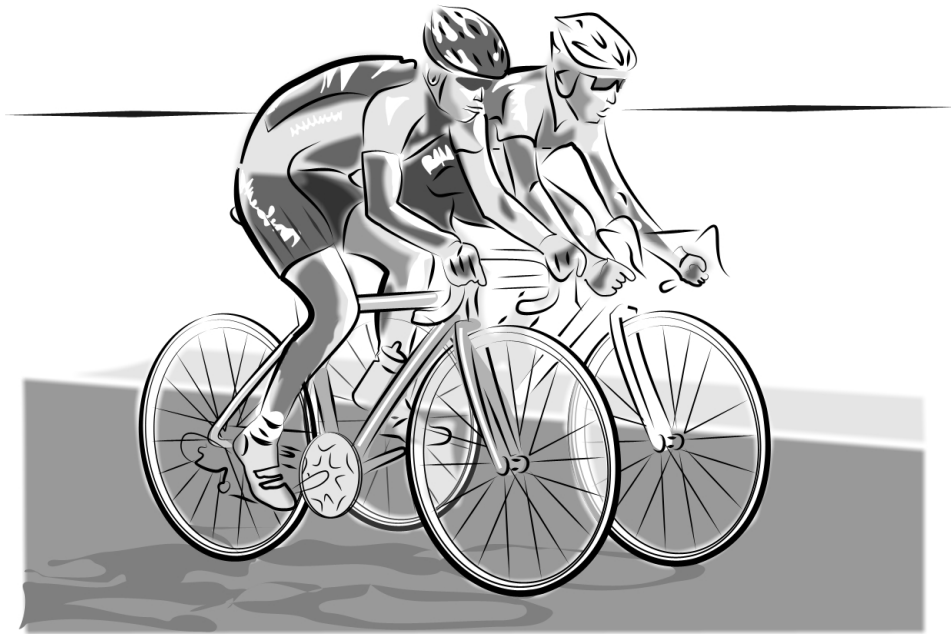
- a) Beräkna den årliga procentuella ökningen av antalet fjällgäss under perioden 1999-2003 om ökningen antas vara exponentiell. (0/2)
- b) Vilket år kommer populationen återigen att uppgå till 10 000 fåglar, om ökningen sker exponentiellt i samma takt som under perioden 1999-2003? (0/2)

14. Skriv uttrycket $\frac{k^4 - 1}{k - 1}$, där $k \neq 1$, som en summa med flera termer. (0/2)

15. Frida och Gisela deltar i samma cykellopp. Loppet är 90 km långt. Frida håller jämn fart hela loppet medan Giselas fart varierar. Man kan förenklat beskriva den sträcka (i km) de har cyklat med funktionerna:

$$f(t) = 30t \quad \text{och} \quad g(t) = t^3 - 6t^2 + 37,8t \quad \text{där } t \text{ är tiden i timmar efter start.}$$

Frida och Gisela startar samtidigt. Frida går i mål efter 3 timmar och Gisela går i mål strax därefter.



Hur lång tid efter start är avståndet mellan Frida och Gisela störst och hur långt är avståndet mellan dem då?

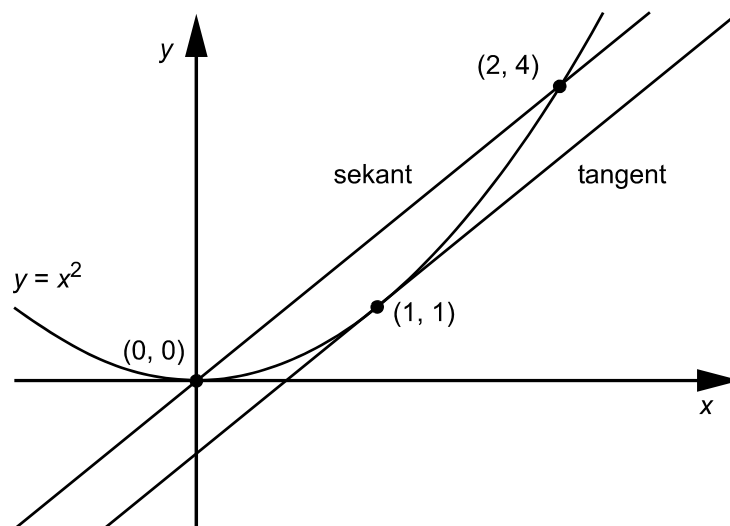
(0/2/∞)

Vid bedömning av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta extra hänsyn till

- Hur generell din lösning är
- Hur väl du motiverar din slutsats
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

16. I denna uppgift ska du undersöka lutningen för tangenter och sekanter till andragrads-kurvor som går genom origo. En sekant är en rät linje som går genom två punkter på kurvan.

- I figuren visas grafen till funktionen $y = x^2$, en tangent som tangerar kurvan i punkten $(1, 1)$ och en sekant som går genom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 4)$ på kurvan.
Visa att riktningskoefficienten för tangenten är lika stor som riktningskoefficienten för sekanten.



Exemplet ovan visar *ett* fall där följande tre villkor är uppfyllda:

- Andragradskurvan går genom origo och kan därmed skrivas på formen $y = ax^2 + bx$
- Sekanten går genom origo och en annan punkt på kurvan.
- Tangeringspunktens x -koordinat ligger mittemellan x -koordinaterna hos de punkter på kurvan som sekanten går genom.

- Studera nu *alla* de fall som uppfyller ovanstående tre villkor och undersök om det *alltid* är så att riktningskoefficienten för sekanten blir lika stor som riktningskoefficienten för tangenten.

(2/4/∞)

Innehåll	Sid nr
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet.....	4
Kravgränser	4
Allmänna riktlinjer för bedömning.....	5
Bedömningsanvisningar del I och del II.....	6
Mål för matematik kurs C - Kursplan 2000.....	18
Betygskriterier 2000	19
Kopieringsunderlag för aspektbedömning.....	20

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 och 8 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i bl a modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 3b, 3c, 5b, 6, 11b och 16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 6b, 8, 14, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 9, 12 och 16 som alla har en högre grad av öppenhet, medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik vt 2004 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde																Betygskriterium														
Uppgift nr	g po-äng	vg po-äng	□	Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd									
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5					
1a	1	0									x					x		x																
1b	1	0									x					x		x																
1c	1	0									x					x		x																
2	1	0										x				x		x																
3a	1	0									x					x		x																
3b	1	0										x				x	x	x																
3c	1	0														x	x	x																
4a	1	0														x		x																
4b	1	0														x		x																
5a	1	0														x		x																
5b	1	0														x		x																
6a	3	0										x					x	x	x															
6b	0	2	□									x								x	x	x	x	x			x							
7	0	1																		x	x	x	x	x										
8	0	2	□										x							x	x	x	x	x			x							
9	2	0										x				x		x																
10a	1	0														x		x																
10b	2	0														x		x																
11a	2	0														x		x																
11b	0	2											x							x		x	x	x										
12	1	1											x					x		x		x	x											
13a	0	2																		x		x	x	x										
13b	0	2																		x		x	x	x										
14	0	2																		x	x	x	x	x										
15	0	2	□										x							x	x	x	x	x			x							
16	2	4	□										x	x	x		x	x	x		x	x	x	x			x							
Σ	24	20			1/0		6/6		4/5				13/9																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 24 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd: 13 poäng.

Väl godkänd: 27 poäng varav minst 7 vg-poäng.

Mycket väl godkänd: Utöver kravet för Väl godkänd ska eleven ha visat *MVG-kvaliteter i minst två* av □-uppgifterna. Eleven ska dessutom ha minst 14 vg-poäng.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng

För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

- 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
- 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

- 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
- 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
- 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
- 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknfel.

6. Aspektbedömning

Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna "Metodval och genomförande", "Matematiskt resonemang" samt "Redovisning och matematiskt språk" som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

- 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
- 7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
- 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
- 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (□) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1 g
med korrekt svar	+ 1 g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av juni 2014.

Bedömningsanvisningar (MaC vt 2004)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		Max 3/0
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 12x + 9$)	+1 g
b)	Korrekt svar ($f'(x) = -120e^{-2x}$)	+1 g
c)	Korrekt svar ($f'(x) = \frac{1}{4}$)	+1 g
2.		Max 1/0
	Korrekt svar ($x_1 = 2$, $x_2 = -3$ och $x_3 = 5$)	+1 g
3.		Max 3/0
a)	Korrekt svar (punkt C)	+1 g
b)	Korrekt svar med godtagbar motivering ("3 lösningar, eftersom kurvan skär x -axeln på tre ställen")	+1 g
c)	Korrekt svar med godtagbar motivering ("2 lösningar, eftersom kurvan har två extrempunkter")	+1 g
4.		Max 2/0
a)	Korrekt svar ($x = 18^{\frac{1}{9}}$)	+1 g
b)	Korrekt svar ($x = \frac{\lg 18}{\lg 9}$)	+1 g

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
5.		Max 2/0
a)	Korrekt svar ($y = e^{(\ln 3) \cdot x}$)	+1 g
b)	Godtagbart svar ("Med basen e fås en exponentialfunktion som är enkel att derivera.")	+1 g

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (0 g)

Derivatam av e är e

Kommentar: Påståendet är felaktigt och det framgår inte vilken fördel som åsyftas.

Elevlösning 2 (1 g)

Derivatam av e^x är e^x

Kommentar: Det framgår inte tydligt i lösningen vilken fördel som åsyftas. Trots detta bedöms kvaliteten i elevlösningen vara precis över gränsen för erhållande av 1 g-poäng.

6.		Max 3/2/□
a)	Godtagbar bestämning av derivatan, $A'(x) = -4x + 32$ med godtagbar bestämning av derivatans nollställe, $x = 8$ med godtagbar verifiering av maximum	+1 g +1 g +1 g
b)	Ett godtagbart bevis innehåller följande, om sidostyckets längd betecknas y : • Eleven tecknar sambandet $4x + 2y = 60$ eller motsvarande • Eleven tecknar sambandet $A = y \cdot (x - 1)$ eller motsvarande • Eleven ger en godtagbar härledning av $A(x) = -2x^2 + 32x - 30$ utifrån kännedom om sambanden $A = y \cdot (x - 1)$ och $4x + 2y = 60$ Eleven redovisar en av ovanstående punkter Eleven redovisar ytterligare en av ovanstående punkter	+ 1 vg + 1 vg
	Elevens redovisar alla tre punkterna. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig dvs. införda beteckningar och uttryck förklaras med figur och/eller ord.	□

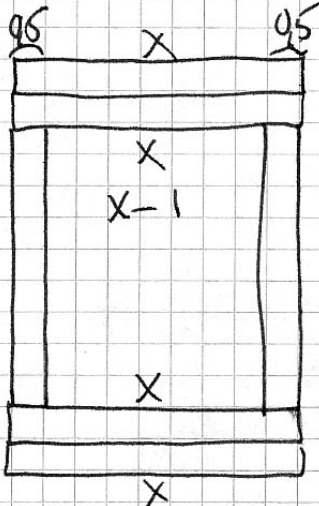
Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$$A(x) = (x-1) \left(\frac{60-4x}{2} \right) = 30x - 2x^2 - 30 + 2x \\ = -2x^2 + 32x - 30$$

Kommentar: Elevens redovisning omfattar alla de tre punkterna, men redovisningen är otydlig eftersom de två faktorerna i uttrycket för arean inte förklaras.

Elevlösning 2 (2 vg och □)



Kvar var delar på 2
 $60 - 4x$

$$A(x) = \left(\frac{60-4x}{2} \right) (x-1) \\ = 30x - 30 - 2x^2 + 2x$$

Arean blir $-2x^2 + 32x - 30$

Kommentar: Eleven har tecknat ett korrekt uttryck för spegelglasets area och utför en korrekt härledning. Eleven förklarar något knapphändert uttrycket för arean. Trots detta bedöms kvaliteten i elevlösningen vara precis över gränsen för erhållande av 2 vg-poäng och □.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****7.****Max 0/1**Korrekt svar ($\ln e^2$, e , $\lg 1000$, $\sqrt{10}$)

+1 vg

8.**Max 0/2/□**

Nedan ges två alternativa bedömningsanvisningar. Elevens val av lösningsmetod styr vilken bedömningsanvisning som ska användas.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer	
	Lägre	Högre
Elevlösning baserad på specialfall	Eleven visar insikt om att nämnaren skall sättas lika noll, t ex genom att teckna $Ax^m + x^{m+1} = 0$ (0/1)	Eleven visar för ett eller flera värden på m att uttrycket ej är definierat för $x = 2$ om $A = -2$ (0/2)
Elevlösning baserad på generell metod	Eleven visar insikt om att nämnaren skall sättas lika noll, t ex genom att teckna $Ax^m + x^{m+1} = 0$ (0/1)	Eleven visar med generell metod att uttrycket ej är definierat för $x = 2$ om $A = -2$ (0/2/□)

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg och □)

$$\frac{A}{Ax^m + x^{m+1}}$$

$$\frac{A}{A \cdot 2^m + 2^{m+1}}$$

$$A \cdot 2^m + 2^{m+1} = 0$$

2^{m+1} ger alltid det dubbla av 2^m oberoende av heltalsvärde på m .
 Därför ger vi värdet -2 till konstanten A . A måste vara en negativ konstant så att "ridorna" tar ut varandra

Kommentar: Eleven argumenterar generellt och visar att uttrycket ej är definierat för $x = 2$ om $A = -2$.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****Del II****9.****Max 2/0**

Godtagbart angiven fjärdegradsfunktion
med korrekt derivata

+1 g

+1 g

10.**Max 3/0**

a) Korrekt svar (4,394)

+1 g

b) Redovisad godtagbar lösning (529014)

+1-2 g

11.**Max 2/2**

a) Redovisad godtagbar ändringskvot, t ex $\frac{32-12}{16-2}$
med godtagbart svar (t ex 1,4)

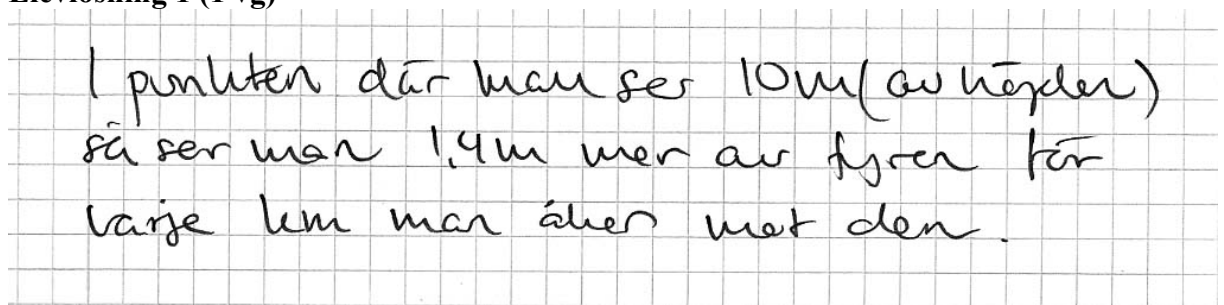
+1 g

+1 g

b) Godtagbar förklaring, t ex "När man åkt ytterligare 10 km närmare,
så ökar den synliga delen av fyren med 1,4 m per km"

+1-2 vg

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)


I punkten där man ser 10m (av höjden)
så ser man 1,4m mer av fyren för
varje km man åker mot den.

Kommentar: Elevens förklaring är felaktig när det gäller tolkningen av 10 i $f'(10)$. Eleven visar viss förståelse för ändringskvotens betydelse genom formuleringen "... så ser man 1,4 meter mer av fyren för varje km man åker mot den." Formuleringen klargör dock inte om eleven är medveten om att det rör sig om en *momentan* förändring, men eftersom det talas om "I punkten ..." i förklaringens inledning, kan man anse att eleven troligen är medveten om detta. Sammantaget bedöms kvaliteten i elevlösningen vara precis över gränsen för erhållande av 1 vg-poäng.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****Elevlösning 2 (2 vg)**

Vid 10 km från fyren (eller kört 10 km sen man ser fyren första gången) är momentanhastigheten för hur många meter man ser per km svaret i a)

Kommentar: Elevens förklaring är korrekt när det gäller tolkningen av ändringskvotens betydelse och tolkningen av 10 i $f'(10)$. Förklaringen är visserligen något otydligt framställd men dess kvalitet bedöms trots detta vara just över gränsen för erhållande av 2 vg-poäng.

12.**Max 1/1**

Svaret uppfyller ett av villkoren

+1 g

Svaret uppfyller ytterligare ett villkor (t ex $f(x) = 200e^x$)

+1 vg

13.**Max 0/4**

a) Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $90 = 50 \cdot a^4$
med godtagbart svar (16%)

+1 vg

+1 vg

b) Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $10000 = 90 \cdot 1,16^t$
med godtagbart svar (År 2035)

+1 vg

+1 vg

14.**Max 0/2**

Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknar $\frac{(k^2 - 1)(k^2 + 1)}{k - 1}$

+1 vg

med redovisad godtagbar lösning $(k^3 + k^2 + k + 1)$

+1 vg

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****Elevlösning 1 (1 vg)**

$$\frac{k^4-1}{k-1} \text{ "är en geometrisk summa med 5 termer och } a=1$$

svare: Då blir det $k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$

Kommentar: Eleven ser att uttrycket går att tolka som en geometrisk summa med kvoten k och med en första term vars värde är 1, vilket är en godtagbar ansats. Antalet termer är dock felaktigt.

Elevlösning 2 (2 vg)

$$\frac{k^4-1}{k-1} = 1 \cdot \frac{(k^4-1)}{k-1} = 1 + k + k^2 + k^3$$

Kommentar: Eleven antyder, genom införandet av faktorn 1, att uttrycket kan tolkas som en geometrisk summa. Trots den knappa redovisningen bedöms kvaliteten i elevlösningen vara precis just över gränsen för erhållande av 2 vg-poäng.

15.**Max 0/2/□**

Redovisad godtagbar ansats, t ex bildar funktionen $h(t) = t^3 - 6t^2 + 7,8t$ +1 vg

med korrekt bestämning av funktionsvärdet vid någon av extrempunkterna eller vid ändpunkten +1 vg

Eleven visar att det största avståndet är 3,6 km och att det inträffar just då Frida går i mål. Redovisningen är tydlig och välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt. □

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16**Elevlösning 1 (1 g)**

$$k\text{-värde för tangent (1,1) (0,-1)}$$

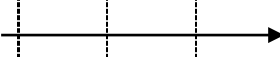
$$\frac{-1-1}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$k\text{-värde för sekant (0,0) (2,4)}$$

$$\frac{4-0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

svar: $k=2$ i båda fallen

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		1/0	En godtagbar bestämning av sekantens riktningskoefficient.
Matematiskt resonemang		0/0	Tangentberäkningen grundar sig på ett avläst värde i figuren och inte på derivatan. Att riktningskoefficienterna är lika stora är därmed inte tillräckligt styrkt.
Redovisning och matematiskt språk		0/0	För liten del av uppgiften är behandlad för att redovisning och matematiskt språk ska kunna bedömas.
Summa		1/0	

Elevlösning 2 (2 g och 2 vg)

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

(1,1) är punkten där tangenten rör

$y' = 2$, alltså k i tangenten $= 2$

(0,0) = (2,4) är sekantens punkter

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$

Tangentens k = sekantens k = 2

Är $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

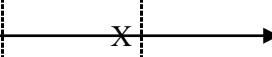
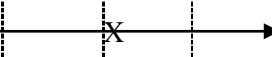
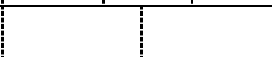
Test: (0,0) = (4,16)
(2,4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16}{4} = 4 \quad y' = 2x = 4$$

Test: (-3,4) = (0,0)
(-1,1)

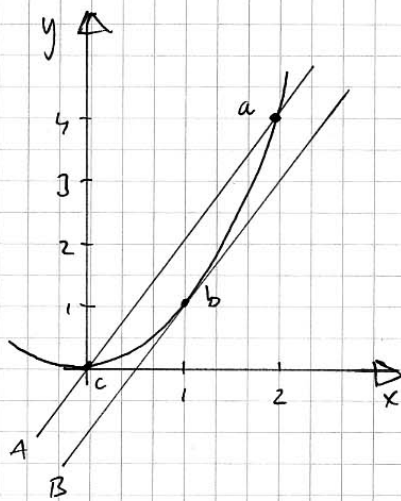
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{-2} = -2 \quad y' = 2x = -2 \quad \text{stämmer!}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		1/0	En godtagbar bestämning av de två riktningskoefficienterna.
Matematiskt resonemang		1/1	Undersöker det minsta möjliga antalet, 2 st, specialfall på samma kurva.
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Redovisningen är lätt att följa och förstå, även om det kunde framgå mer tydligt vad som är sekant- och vad som är tangentberäkningar i elevens egen undersökning. Det matematiska språket är acceptabelt trots att eleven sätter likhetstecken mellan y' och $y'(2)$.
Summa		2/2	

Kommentar: Kvaliteten i elevens lösning vad gäller de två aspekterna *matematiskt resonemang* samt *redovisning och matematiskt språk* bedöms vara precis över gränsen för att erhålla vg-poäng.

Elevlösning 3 (2 g och 4 vg och □)



Uppgift: visa att linjerna A och B har samma lutning

1. Linje B är tangent i punkten ~~a~~ b

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$x = 1 \Rightarrow y' = 2 \cdot 1 = 2$$

Lutningen på tangenten till punkten b är $k=2$

2. Lutningen på linjen A

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

Lutningen på linjen A är $k=2$

• Svar: Båda linjerna har samma lutning då $k = y'(1) = \frac{4}{2} = 2$

• Enligt villkoren ska punkten b's x-värde ligga mellan x-värdena på punkterna a och c. c ska alltid ligga i origo

$$y = ax^2 + bx \quad x\text{-värdet i punkten b} = \frac{x\text{-värdet för punkten a}}{2}$$

Sehantens lutning: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{y_2}{x_2}$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx}{x} = ax + b$$

Tangentens lutning $y' = 2ax_b + b = k$

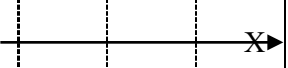
$$x_b = \frac{x_a}{2} \Rightarrow k = 2a \frac{x_a}{2} + b = ax_a + b$$

Svar: Tangentens lutning = sehantens lutning

$$ax + b = ax + b$$

gäller vid de villkor som ges.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		1/1	
Matematiskt resonemang		1/2	Eleven bevisar att sekanten och tangenten har lika stor riktningskoefficient under de givna villkoren.
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Se kommentar nedan.
Summa		2/4	

Kommentar: Elevens lösning uppvisar $\square$ -kvalitet.

Redovisningen är mycket välstrukturerad och tydlig. De brister som framträder i det matematiska språket är användandet av symbolen y' där $y'(x_b)$ varit mer korrekt samt att eleven sätter likhetstecken mellan ett allmänt uttryck för sekantens riktningskoefficient och ett uttryck för en specifik sekants riktningskoefficient.

Eleven visar insikt om att speciella beteckningar för godtyckliga koordinater bör användas, samt hur de kan användas. Det hade varit tydligare om inte så många olika beteckningar använts, men sammanfattningsvis bedöms det matematiska språket ändå som lämpligt och i huvudsak korrekt.

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)

R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)

A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)

D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt(Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

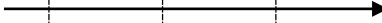
- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiskt resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			