

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till och med 30 juni 2013.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS C VÅREN 2007

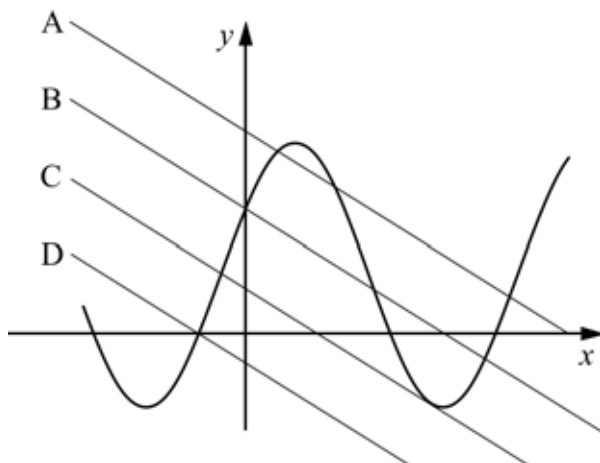
Anvisningar

- Provtid** 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
- Hjälpmedel** **Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C och D”.
Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.
Del II: Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C och D”.
- Provmaterialet** Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.
Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.
*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren.
Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
- Provet** Provet består av totalt 16 uppgifter. **Del I** består av 8 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter.
Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.
Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.
Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
- Poäng och betygsgränser** Provet ger maximalt 42 poäng.
Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med \square , vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.
Undre gräns för provbetyget
Godkänd: 12 poäng.
Väl godkänd: 24 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd: 24 poäng varav minst 13 vg-poäng.
Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de \square -märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Vilken av linjerna A-D är en tangent till kurvan? *Endast svar fordras* (1/0)



2. Låt $f(x) = 4x^3 - 16x$
- a) Bestäm $f'(x)$ *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Bestäm $f'(1)$ *Endast svar fordras* (1/0)

3. Lös ekvationerna. Svara exakt.

- a) $x^5 = 11$ *Endast svar fordras* (1/0)
- b) $5^x = 11$ *Endast svar fordras* (1/0)

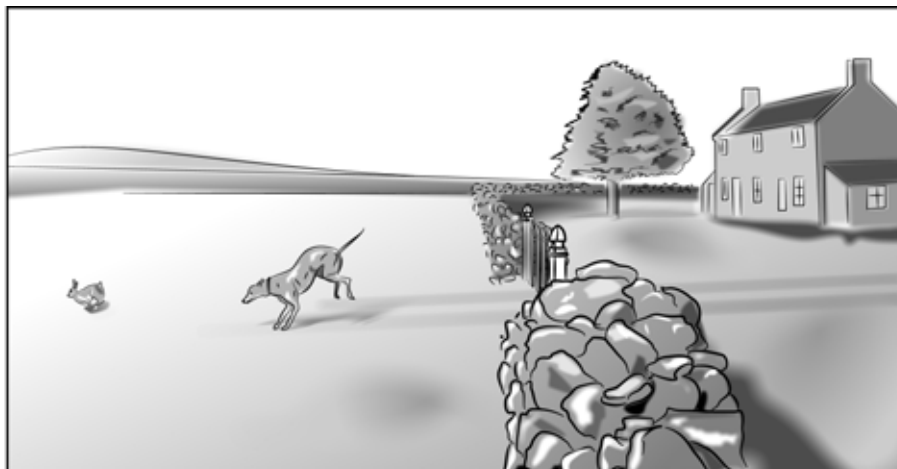
4. På ett sjukhus vill man undersöka om nyfödda barn följer en normal viktutveckling. Man har därför samlat in uppgifter om hur barnens vikt varierar de första dygnen. Dessa data har sedan använts för att ställa upp sambandet:

$$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$$

där V är medelvikten i gram och t är tiden i dygn efter födseln. Sambandet gäller under de sex första dygnen efter födseln.

- Hur många dygn efter födseln är medelvikten lägst? (3/0)

5. Ett av de längsta hopp som noterats för en hund utfördes av greyhunden Bang år 1849 i England. Vid detta tillfälle hoppade hunden över en grind när den jagade en hare.



En förenklad modell av hoppet är:

$$h(x) = 0,405x - 0,005x^3$$

där $h(x)$ beskriver hundens höjd (i meter) över marken och x avståndet (i meter) längs marken från avstampet.

Hur långt hoppade hunden Bang vid detta tillfälle? (3/0)

6. För vilket värde på x är uttrycket $\frac{3+x}{6+x}$ inte definierat?

Endast svar fordras (1/0)

7. Lovisa vill beräkna
 $12345678 \cdot 12345678 \cdot 12345678 - 12345678 \cdot 12345677 \cdot 12345679$

Hon använder sin räknare och får svaret 0. Lovisa är säker på att räknaren har gett fel svar och tror att det istället går att använda algebra för att bestämma det korrekta svaret. Hjälp Lovisa att bestämma det korrekta svaret. (0/2)

8. För $f(x) = e^{2x}$ gäller att $f(1,1) \approx 9$
 Använd att $f(1,1) \approx 9$ och bestäm ett närmevärde till

a) $f'(1,1)$ (1/1)

b) $f'(3,3)$ (0/1/□)

Del II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. En geometrisk summa har 36 termer. Den första termen är 4 och kvoten är 1,2
Beräkna summan. (2/0)

10. Om man häller mjölk i kaffe ökar pH-värdet. Kaffet blir då mindre surt eftersom koncentrationen av vätejoner sjunker.



pH-värdet beräknas med formeln

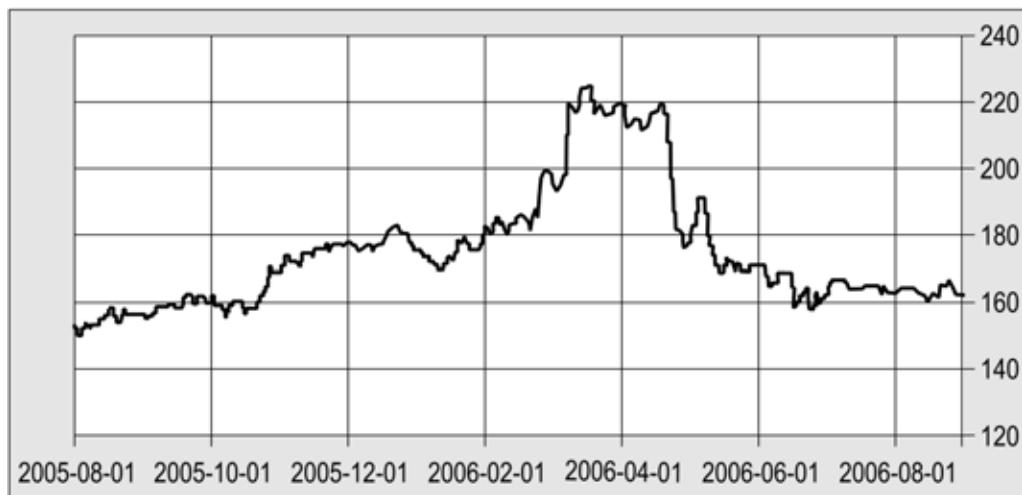
$$pH = -\lg C$$

där C är koncentrationen av vätejoner (i mol/dm^3).

I en kopp med svart kaffe var pH-värdet 4,9. Lite mjölk hälldes i kaffet och koncentrationen av vätejoner blev då $1,2 \cdot 10^{-6}$ (mol/dm^3).

Vilket pH-värde har kaffet med mjölk? (1/0)

11. Bilden visar kursutvecklingen (i kr) för en Beijeraktie under ett år. (Källa: OMX)



- a) Beräkna aktiens genomsnittliga värdeminskning i kronor per månad under perioden 1 april 2006 till 1 augusti 2006. (2/0)
- b) Antag att den procentuella minskningen har varit lika stor varje månad. Beräkna aktiens procentuella värdeminskning per månad under perioden 1 april 2006 till 1 augusti 2006. (0/2)

12. Ge ett exempel på en funktion f som har egenskapen $f'(0) = 2$
Endast svar fordras (0/1)

13. Sommaren 1930 planterade man sjögull som prydnadsväxt i sjön Väringen. Idag konkurrerar den ut andra sjöväxter och ställer till med stora problem för både sjöfart och fiske.

Plantan som sattes ut i Väringen sommaren 1930 spred sig snabbt över den $1,9 \cdot 10^7 \text{ m}^2$ stora sjöytan. Sommaren 1975 täcktes ett $4,5 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ stort område av Väringens yta av sjögull.



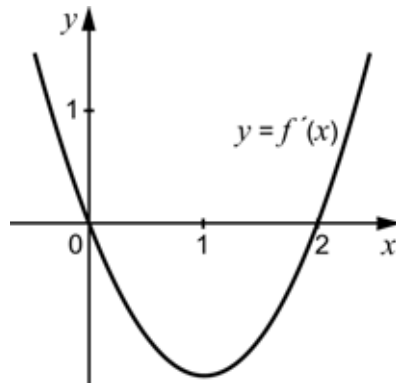
Den första sjögullplantan täckte en area på $0,01 \text{ m}^2$. Sambandet

$$A(x) = 0,01 \cdot 1,48^x$$

kan användas som modell för sjögullens utbredning i Väringen, där $A(x) \text{ m}^2$ är den area som täcks av sjögull x år efter 1930.

- a) Hur stor yta av sjön täcktes av sjögull sommaren 1950? (1/0)
- b) Visa hur man kommer fram till ändringsfaktorn 1,48. (0/1)
- c) Vilka begränsningar i tid har modellen? (0/2)
- d) Hur många gånger större var tillväxthastigheten för utbredningen av sjögull 1975 jämfört med 1950? (0/2)
14. Grafen till funktionen f där $f(x) = x^2$ har en tangent vars riktningskoefficient är 3. Var skär tangenten y -axeln?
- a) Lös uppgiften grafiskt. (0/1)
- b) Lös uppgiften algebraiskt. (0/2)

15. I bilden visas grafen till **derivatan** $y = f'(x)$. Derivatan är ett polynom av andra graden.



Det finns flera funktioner som har en derivata vars graf ser ut som den i bilden.

Skissa några av graferna till dessa funktioner i ett och samma koordinatsystem.
Motivera varför dina grafer har detta utseende.

(0/2/□)

Vid bedömning av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta extra hänsyn till

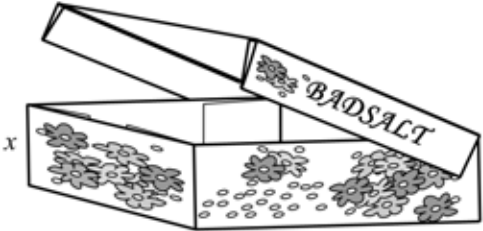
- Hur långt mot en lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

16. Agnes har startat ett företag inom "Ung Företagsamhet" (UF). Hon har fått en stor mängd badsalt av en konkursförvaltare och tänker nu sälja badsaltet i fina förpackningar som hon själv tillverkar. Agnes vill veta hur förpackningens utformning påverkar det ekonomiska resultatet.

Hon funderar en stund och bestämmer sedan följande:

MIN FÖRETAGSIDÉ:
Försäljning av badsalt i lådor som jag tillverkar själv.

SKISS:



	40 cm	
x		x
20 cm		

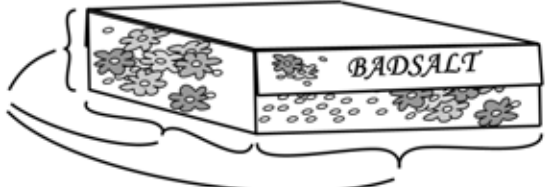
DETTA SKA GÄLLA FÖR FÖRPACKNINGARNA:

FORM: Lådan ska bestå av botten, fyra sidostycken som viks upp, fyra hörnbitar som viks in och ett lock. Locket har två flikar som ska vikas ner över lådan.

MATERIAL: Jag ska använda ett pappersark med måtten $20\text{ cm} \times 40\text{ cm}$.

KRAV: Alla sidorna på lådan måste vara minst 2 cm . Annars ser lådan konstig ut.

Minst 2 cm !



EKONOMI:

INTÄKT: Jag kan sälja badsaltet för $0,03\text{ kr/cm}^3$.

KOSTNAD: Jag får betala 12 kr för varje pappersark.

AGNES
SP 3A

Agnes konstruerar först en låda där hon låter x vara 6 cm, se figur.

- Vilken volym får denna låda?

Kostnaden för en låda är konstant, 12 kr, men intäkten beror av lådans utformning. Agnes tecknar kostnaden K och intäkten I som funktion av x :

$$I(x) = 12x - 1,8x^2 + 0,06x^3 \quad \text{och} \quad K(x) = 12$$

- Visa hur Agnes kom fram till att intäkten per låda kan skrivas

$$I(x) = 12x - 1,8x^2 + 0,06x^3$$

Det ekonomiska resultatet är differensen mellan intäkten och kostnaden.

- Hjälp Agnes att undersöka, så utförligt som möjligt, mellan vilka värden det ekonomiska resultatet för en låda kan variera.

(3/3/□)

Innehåll	Sid nr
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet.....	4
Kravgränser	5
Allmänna riktlinjer för bedömning.....	6
Bedömningsanvisningar del I och del II.....	7
Mål för matematik kurs C - Kursplan 2000.....	21
Betygskriterier 2000	22
Kopieringsunderlag för aspektbedömning.....	23
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter	24
Insamling av provresultat våren 2007	25

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbyggnad samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfinas och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 7, 8b, 11, 13c, 14, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 7, 8, 13c, 15 och 16. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 4, 5, 7, 8, 14, 15 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 11b, 13b, 13c och 16.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i C-kursprovet i Matematik vt 2007 i förhållande till betygs-kriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

Uppgift nr	g po-äng	vg po-äng	□	Kunskapsområde										Betygskriterium																							
				Övr		aRitm		Algebra			Dif & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd												
				1	4	2	3	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5								
1	1	0									x					x																					
2a	1	0									x	x				x																					
2b	1	0									x	x				x																					
3a	1	0				x										x																					
3b	1	0				x										x																					
4	3	0						x			x		x			x	x	x																			
5	3	0						x	x							x	x	x																			
6	1	0								x						x																					
7	0	2						x	x											x	x	x	x	x													
8a	1	1				x					x					x		x			x	x		x	x												
8b	0	1	□			x														x	x		x	x				x	x	x							
9	2	0						x										x																			
10	1	0				x	x									x		x																			
11a	2	0									x							x																			
11b	0	2				x	x													x		x	x	x													
12	0	1									x	x								x					x												
13a	1	0				x	x									x		x																			
13b	0	1				x	x													x	x	x	x	x													
13c	0	2				x	x													x	x	x	x	x													
13d	0	2									x	x	x							x		x	x	x													
14a	0	1									x		x							x				x	x												
14b	0	2									x		x							x				x	x												
15	0	2	□								x	x	x							x	x	x	x	x				x	x	x							
16	3	3	□		x						x	x	x							x	x	x	x	x				x	x	x	x						
Σ	22	20			1/0	6/7	5/3				10/10																										

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 42 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd: 12 poäng.

Väl godkänd: 24 poäng varav minst 6 vg-poäng.

Mycket väl godkänd: 24 poäng varav minst 13 vg-poäng.

Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De □-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

MVG-kvalitet	Uppgift		
	8b	15	16
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		○	○
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	○		○
Värderar och jämför metoder/modeller			○
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	○	○	○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng

För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

- 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
- 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

- 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
- 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
- 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
- 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning

Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

- 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
- 7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
- 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
- 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (⊠) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett.ex.empel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till och med 30 juni 2013.

Bedömningsanvisningar (MaC vt 2007)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		Max 1/0
	Korrekt svar (C)	+1 g
2.		Max 2/0
	a) Korrekt svar ($f'(x) = 12x^2 - 16$)	+1 g
	b) Korrekt svar (-4)	+1 g
3.		Max 2/0
	a) Korrekt svar $\left(x = 11^{\frac{1}{5}}\right)$	+1 g
	b) Korrekt svar $\left(x = \frac{\lg 11}{\lg 5}\right)$	+1 g
4.		Max 3/0
	Korrekt bestämd derivata, $V'(t) = 15t^2 - 135$	+1 g
	med korrekt bestämning av derivatans nollställen, $t = \pm 3$	+1 g
	Godtagbar verifiering av när medelvikten har sitt minsta värde (3)	+1 g

Uppg. Bedömningsanvisningar	Poäng
5.	Max 3/0
Redovisad godtagbar ansats, sätter $h(x) = 0$	+1 g
med korrekt löst ekvation ($x_1 = 0$, $x_2 = -9$ och $x_3 = 9$)	+1 g
Korrekt svar (9 m)	+1 g

Ett exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 g)

$$0,405x - 0,005x^3 = 0$$

$$x(0,405 - 0,005x^2) = 0$$

$$0,405 - 0,005x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0,405}{0,005}$$

$$x = 9$$

Svar: Bang hoppade 9m

Kommentar: Eleven ställer upp ekvationen korrekt men anger bara en lösning. Elevlösningen ges två g-poäng, en för tecknandet av ekvationen och en för korrekt svar, 9 m.

6.	Max 1/0
Korrekt svar ($x = -6$)	+1g
7.	Max 0/2
Redovisad godtagbar ansats, t.ex. skriver uttrycket som $a^3 - a(a-1)(a+1)$	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning och korrekt svar (12345678)	+1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****8.****Max 1/2/□**

- a) Korrekt derivering, $f'(x) = 2e^{2x}$ +1 g
 med korrekt svar ($f'(1,1) \approx 18$) +1 vg
- b) Redovisad godtagbar ansats, t.ex. använder $f'(3,3) = f'(3 \cdot 1,1)$ +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	utnyttja att $f(1,1) \approx 9$ och visa att $f'(3,3) \approx 2 \cdot 9^3$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Ett exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 2 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & f(x) = e^{2x} \quad f'(x) = 2e^{2x} \quad f(1,1) \approx 9 \\
 & f'(1,1) \approx 9 \cdot 2 = \underline{\underline{18}} \\
 \text{b)} \quad & f'(3,3) = 2e^{2 \cdot 3,3} = \\
 & 2e^{2,2} = 18 \quad 2e^{3,2 \cdot 3} = 2 \cdot (9)^3 = 2 \cdot 720 = \underline{\underline{1440}}
 \end{aligned}$$

Kommentar: Eleven visar att $f'(3,3) \approx 2 \cdot 9^3$ på ett godtagbart sätt och uppvisar därmed MVG-kvalitet. Däremot är lösningen svår att följa då eleven mitt i sin omskrivning av uttrycket har infogat $2e^{2,2} = 18$. Lösningen kan därför inte anses vara välstrukturerad och tydlig. Den ensamma parentesen nederst i lösningen är onödig och svaret i b är felaktigt.

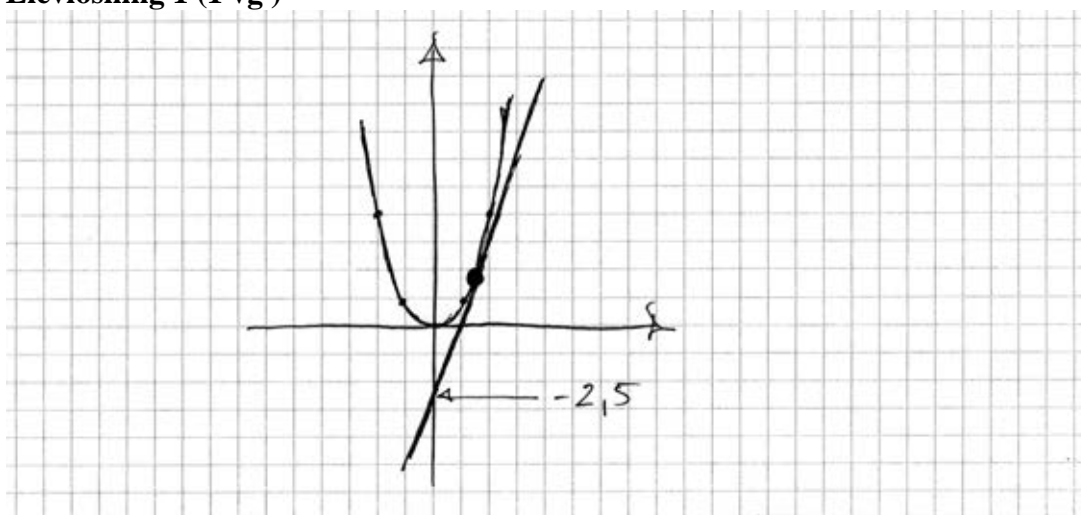
Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
9.		Max 2/0
	Redovisad godtagbar ansats, sätter in värden i formeln för geometrisk summa med godtagbart svar (14156)	+1 g +1 g
10.		Max 1/0
	Redovisad godtagbar lösning (5,9)	+1 g
11.		Max 2/2
a)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar en ändringskvot med godtagbart svar (14)	+1 g +1 g
b)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $165 = 220 \cdot a^4$ med godtagbart svar (7 %)	+1 vg +1 vg
12.		Max 0/1
	Korrekt svar (t.ex. $f(x) = x^2 + 2x$)	+1 vg
13.		Max 1/5
a)	Redovisad godtagbar lösning (25 m ²)	+1 g
b)	Redovisad godtagbar lösning	+1 vg
c)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $1,9 \cdot 10^7 = 0,01 \cdot 1,48^x$ med godtagbart svar (Modellen gäller i 54 år)	+1 vg +1 vg
d)	Redovisad godtagbar ansats, t.ex. korrekt derivering, $A'(x) = 0,01 \cdot \ln 1,48 \cdot 1,48^x$ med godtagbart svar (18000 gånger större)	+1 vg +1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****14.****Max 0/3**

- a) Redovisad godtagbar lösning
- $(-2,25)$

+1 vg

Ett exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

Kommentar: Kvaliteten i eleven skiss uppfyller nått och jämnt kravet för att en vg-poäng ska erhållas. Skissen innehåller brister t.ex. tangenten har inte samma lutning för alla x och axlarna är inte graderade, men av punkterna på kurvan kan skalan sägas framgå indirekt.

- b) Redovisad godtagbar beräkning av tangeringspunktens
- x
- koordinat,
- $x = 1,5$

+1 vg

med korrekt bestämning av skärningen med y -axeln $(-2,25)$

+1 vg

15.**Max 0/2/□**

En godtagbar beskrivning innehåller:

- en godtagbar redogörelse för varför grafen till funktionen f har en maximipunkt där $x = 0$ och en minimipunkt där $x = 2$
- en godtagbar skiss av minst en möjlig kurva
- en godtagbar redogörelse för varför de tänkbara graferna ser likadana ut men är förskjutna i y -led

Beskrivningen innehåller en av ovanstående punkter.

+1 vg

Beskrivningen innehåller ytterligare en av ovanstående punkter.

+1 vg

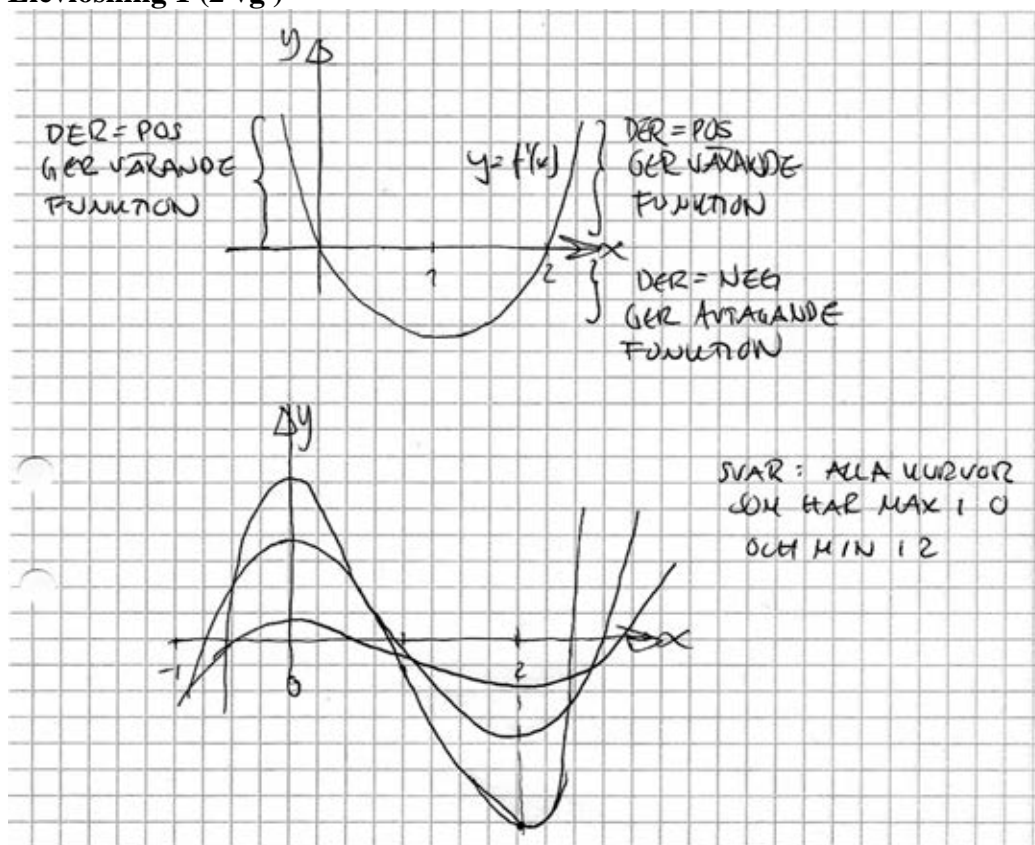
Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	ge en redogörelse som innehåller all den information som beskrivs i de tre ovanstående punkterna.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

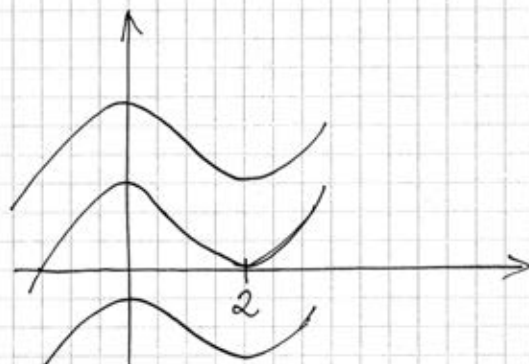


Kommentar: Elevens lösning innehåller den information som beskrivs i de två första punkterna. Skissen innehåller tre kurvor som inte kan gälla samtidigt, men var och en av dessa är en möjlig kurva.

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

Elevlösning 2 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)



Den har sina max och minpunkter vid $x=0$ och $x=2$. Då $x=0$ har funktionen sitt max och då $x=2$ sitt min. Det kan man säga för att derivatans graf går från plus till minus sträng $x=0$ och tvärtom för $x=2$. Derivatan är alltid samma därför är alla kurvorna lika (kan alltså flyttas uppåt eller neråt i y-led).

Kommentar: Elevens lösning innehåller den information som beskrivs i alla tre punkterna och uppvisar därmed MVG-kvalitet. Lösningen bedöms nätt och jämnt visa på den MVG-kvalitet som rör språk och redovisning. Den är visserligen välstrukturerad men uppvisar språkliga otydligheter såsom "derivatans graf går från plus till minus..."

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

16.

Max 3/3/□

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		Total poäng
	Lägre	Högre	
Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i>	Eleven beräknar godtagbart volymen för lådan då x är 6 cm (672 cm^3). 1 g		1/0
Matematiskt resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i>	Eleven drar någon enkel godtagbar slutsats om $I(x)$, t.ex. ” $I(x)$ är priset gånger volymen” eller tecknar en av lådans sidor, t.ex. $20 - 2x$ 1 g	Eleven påbörjar en härledning av $I(x)$, t.ex. genom att ställa upp ett korrekt uttryck för lådans volym $V(x) = (20 - 2x) \left(\frac{40 - 2x}{2} \right) x$ eller motsvarande. 1g och 1 vg	1/1
	Eleven drar, genom användandet av derivata eller annan likvärdig metod, någon relevant slutsats, t.ex. ”maximala intäkten fås då $x = 4,23 \text{ cm}$ ”. 1 g	Eleven drar, genom användandet av derivata eller annan likvärdig metod, slutsatsen ”Den största vinsten är 11 kr/låda.” och kommenterar dessutom godtagbart varför $x = 15,77 \text{ cm}$ måste förkastas, t.ex. genom att påstå att ” $x = 15,77$ är inte möjlig eftersom en sida bara är 20 cm”. 1 g och 1 vg	
Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i>		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. 1 vg	0/1
Summa			3/3

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problemet, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	[Hatched pattern]
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med insikt om definitionsmängden $2 \leq x \leq 9$, styrka och dra slutsatsen att resultatet kan variera mellan en förlust på 6,06 kr upp till en vinst på 11,09 kr.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	korrekt härleda $I(x)$
Värderar och jämför metoder/modeller	värdera modellen genom att korrekt förklara varför $x \leq 9$
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16.

Elevlösning 1 (3 g och 1 vg)

• Höjden 6 cm Volym?

$$x=6$$

$$V=B \cdot b \cdot h$$

$$V=(20-2 \cdot 6)(40-2 \cdot 6) \cdot 6 = 8 \cdot 14 \cdot 6 = 672 \text{ cm}^3$$

om x dvs höjden är 6 cm blir volymen 672 cm³

• Intärdet är 0,03 kr/cm³

om man gräskar 0,03 med volymen i för
man intärdet

$$V=(20-2x)\left(\frac{40-2x}{2}\right) \cdot x = (20-2x)(40-x)x$$

$$= 800x - 20x^2 - 80x^2 + 2x^3$$

$$I = 0,03(800x - 100x^2 + 2x^3) =$$

$$24x - 3x^2 + 0,06x^3 \quad \text{Fel!}$$

$$I = 12x - 1,5x^2 + 0,06x^3$$

minsta $x=2$ (angivet i beskrivning) $\square \square \square x$

$$\text{Största } x = \frac{20-1}{2} = \frac{19}{2} = 9,5 \approx 9 \text{ cm}$$

$$I \ x=2 \text{ cm} \quad 12 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2^2 + 0,06 \cdot 2^3 = 17,28 \text{ kr}$$

$$I \ x=6 \text{ cm} \quad 20,16 \text{ kr}$$

$$I \ x=9 \text{ cm} \quad 3,79 \text{ kr}$$

$$I'(x) = 12 - 36x + 0,18x^2$$

$$I'(x) = 0,18x^2 - 36x + 12$$

$$I'(x) = x^2 - 20x + 66,666$$

$$x^2 + px + q$$

$$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 = 15,0 \quad x_2 = 4,2$$

x	0	
$f'(x)$	+ 4,2	- maximipunkt
$f(x)$	↗	↘

höjden x | Intäclet i kr

2	17,28
4	23,04
4,2	23,07
5	22,5
6	20,16
8	5,76

Om x sätts till 4,2 dvs höjden för läran blir 4,2 om för den största intäclet

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	→	1/0	
Matematiskt resonemang		X →	1/1	
	X	→	1/0	
Redovisning och matematiskt språk	X	→	0/0	
Summa			3/1	

Kommentar: Eleven gör ett algebraiskt fel i sitt uttryck för volymen i härledningen av $I(x)$. Detta bedöms vara likvärdigt med att eleven tecknar volymen korrekt men inte slutför härledningen. Eleven har funnit definitionsmängden på felaktiga grunder. Det matematiska språket är inte av sådan kvalitet att vg-poäng kan erhållas.

Elevlösning 2 (3 g och 2 vg)

$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$l = 14 \text{ cm} \quad b = 8 \text{ cm} \quad h = 6 \text{ cm}$$

$$V = 14 \cdot 8 \cdot 6 = 672 \text{ cm}^3$$

Intäkter varierar beroende på volym,
des höjder x cm

$$I = 0,03 \cdot V \quad \text{pris / cm}^3 \text{ multiplic. med cm}^3$$

$$I(x) = 12x - 1,8x^2 + 0,06x^3$$

$$I'(x) = 12 - 3,6x + 0,18x^2$$

$$I'(x) = 0$$

$$0,18x^2 - 3,6x + 12 = 0$$

$$x^2 - 20x + 67 = 0$$

$$x = 10 \pm \sqrt{100 - 67}$$

$$x_1 = 15,7$$

$$x_2 = 4,3$$

x	1	4,3	10	15,7	20
I'(x)	+	0	-	0	+
I(x)	↗	Max	↘	Min	↗

Vid $x = 4,3$ finns ett max. Då är intäkten
som störst : $12 \cdot 4,3 - 1,8 \cdot 4,3^2 + 0,06 \cdot 4,3^3 = 23,10$
Ekonomiskt resultat $23,10 - 12 = 11,1 = 11 \text{ kr}$

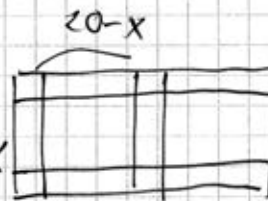
	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/0	
Matematiskt resonemang	X	1/0	
	X	1/1	Avrundning mitt i lösning.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		3/2	

Kommentar: Eleven behandlar punkt 1, men bara delar av punkt 2 och 3. Matematiskt språk och redovisning går nått och jämnt att bedöma, då elevens lösning endast omfattar delar av problemet. Lösningen är lätt att följa och förstå, men kunde ha varit tydligare om t.ex. beräkningen av derivatans värde i teckenschemat redovisats. Det matematiska språket är acceptabelt. Sammantaget bedöms redovisningen och det matematiska språket vara av sådan kvalitet att det nått och jämnt motsvarar 1 vg-poäng.

Elevlösning 3 (3 g och 3 vg och fyra av MVG-kvaliteterna)

När $x = 6$ cm blir volymen

$$(20-12)(20-6)6 = 672 \text{ cm}^3$$



Lädans volym blir $(20-2x)(20-x)x$

$$(20-2x)(20-x)x = (400 - 20x - 40x + 2x^3)x$$

$$= 400x - 60x^2 + 2x^3$$

Detta är alltså lädans volym uttryckt på ett annat sätt. Om vi nu ska göra en funktion för intäkten måste vi multiplicera priset för bordskittet

$$I(x) = 0,03(400x - 60x^2 + 2x^3) = 12x - 1,8x^2 + 0,06x^3$$

Samma som Agnes

Vi kan skriva det ekon. resultatet för en låda som $I(x) - 12$. Om $x = 2$ blir vinsten 5,28 kr/låda

Sidan måste vara minst 2 cm. Bredden den kortare ~~sidan~~ sidan på lådan måste ju vara minst 2 cm lång

$$20 - 2x = 2$$

$$20 = 2 + 2x$$

$$18 = 2x$$

$$x = 9$$

x får inte bli större än 9

för då blir bredden för

kort $x \leq 9$

$$E(x) = 12x - 1,8x^2 + 0,06x^3 - 12$$

$$E'(x) = 12 - 3,6x + 0,18x^2$$

$$12 - 3,6x + 0,18x^2 = 0$$

$$x^2 - 20x + 66,67 = 0$$

$$x = 10 \pm \sqrt{10^2 - 66,67}$$

$$x_1 = 4,2$$

$$x_2 = 15,7$$

utavför intervallet
 $2 \leq x \leq 9$

$$E''(x) = -3,6 + 0,36x$$

$$E''(4,2) = -2,078 < 0 \quad \text{MAX!}$$

Ekonomiska resultatet

$$E(4,2) = 11,09 \text{ kr}$$

Bäst

$$E(2) = 5,28 \text{ kr}$$

Halvbra

$$E(9) = -606 \text{ kr}$$

Minus! Sämst

Svar: Agnes ska göra en låda med höjden 4,2cm, då ger hon mest på plus.

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	\xrightarrow{x}	1/0	
Matematiskt resonemang	\xrightarrow{x}	1/1	
	\xrightarrow{x}	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	\xrightarrow{x}	0/1	
Summa		3/3	

Kommentar: Elevlösningen bedöms uppvisa MVG-kvalitet i alla avseenden även om den MVG-kvalitet som rör matematiskt språk och redovisning inte är självklar. Det hade varit önskvärt att eleven använt olikhetstecken i sin bestämning av den övre gränsen för definitionsmängden, redovisat beräkningar av det ekonomiska resultatet samt varit tydligare med hur det ekonomiska resultatet kan variera.

Mål för matematik kurs C

Kursplan 2000

Aritmetik (R)

R2. kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,

R3. kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,

Algebra och funktionslära (A)

A6. känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,

A7. kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,

A8. kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Differentialkalkyl (D)

D1. kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

D2. kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

D3. kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

D4. kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,

Övrigt (Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	→	→		
Matematiskt resonemang	→	→		
	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	→	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	→	→		
Matematiskt resonemang	→	→		
	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	→	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	→	→		
Matematiskt resonemang	→	→		
	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	→	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	→	→		
Matematiskt resonemang	→	→		
	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	→	→		
Summa				

	Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	→	→		
Matematiskt resonemang	→	→		
	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	→	→		
Summa				

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (☒-märkt)			Övriga uppgifter
	8b	15	16	
MVG-kvalitet				
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Elevens namn:	Uppgift (☒-märkt)			Övriga uppgifter
	8b	15	16	
MVG-kvalitet				
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Elevens namn:	Uppgift (☒-märkt)			Övriga uppgifter
	8b	15	16	
MVG-kvalitet				
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Insamling av provresultat

Vårterminen 2007 kommer resultat från alla skolor att samlas in. Denna insamling av **resultat sker på uppgiftsnivå för elever födda vissa datum**. Dessutom ombeds läraren att besvara en enkät och skicka in bedömda elevlösningar. Dessa resultat skickas till provinstitutionen.

Förutom ovan nämnda resultatinsamling ska vissa skolor, de som ingår i Skolverkets urval, även lämna **uppgift om endast kurs- och provbetyg för alla elever** för varje undervisningsgrupp. Denna insamling sker via SCB:s hemsida. Separat information och anvisningar rörande denna insamling skickas direkt till de skolor som ingår i urvalet.

För matematik kurs C gäller följande:

Elevresultat rapporteras **för elever födda den 8:e, 10:e, 17:e och 26:e varje månad** på en webbplats som nås via <http://www.umu.se/edmeas/np>. I samband med resultatredovisningen fyller varje lärare i en **lärarenkät** som finns på samma webbplats.

Bedömda elevlösningar till proven skickas in per post för **elever födda den 8:e i varje månad**.

De bedömda elevlösningarna skickas till:

**Umeå universitet
Institutionen för beteendevetenskapliga
mätningar
Nationella prov
901 87 Umeå**

Mer information om insamlingen av resultat, lärarenkäter och elevlösningar medföljer provmaterialet. Där delges bland annat det lösenord som behövs för att kunna logga in på webbsidan för resultatredovisning.

För mer information kontakta:

Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet
Monika Kriström, tel: 090-786 59 22, e-post: monika.kristrom@edmeas.umu.se

