NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D HÖSTEN 2002

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 17 uppgifter. **Del I** består av 7 uppgifter och **Del II** av 10 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 17 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 43 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 11 poäng. Väl godkänd: 23 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänd: Kraven för Väl godkänd ska vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser ¤-uppgifterna.

Namn: ______________________________ Skola: ______________________________

Komvux/gymnasieprogram: ____

Del I

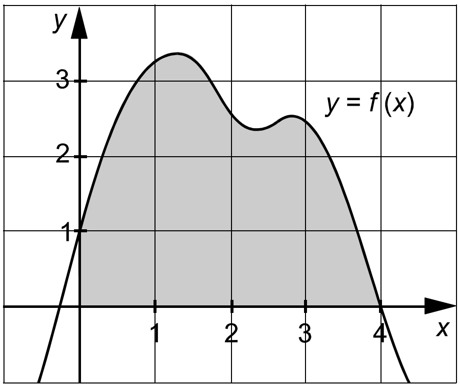
Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Beräkna integralen $\int_0^2 (2x^3 - x)\,dx$ (2/0)

2. Bestäm den primitiva funktionen F till $f(x) = e^x$ så att $F(0) = 2$ (2/0)

3. Lös ekvationen $\tan 3x = 1$
Ange samtliga lösningar till ekvationen. (2/0)

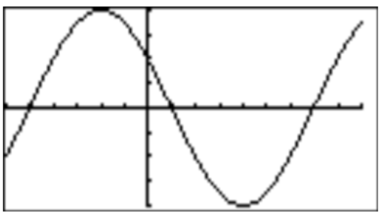
4. Teckna med hjälp av integral ett uttryck för arean av det markerade området under kurvan $y = f(x)$
Endast svar fordras

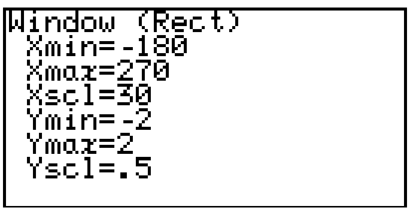


(1/0)

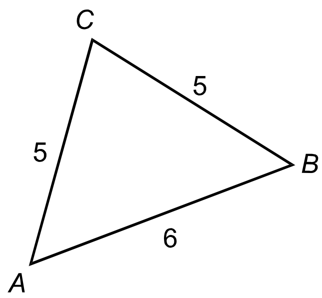
5. Vilken av de nedanstående funktionerna svarar mot den ritade kurvan?
Endast svar fordras (1/0)

A $y = 2\sin(x - 30^\circ)$ B $y = 2\cos(x - 30^\circ)$ C $y = 2\sin(x + 60^\circ)$
D $y = -2\sin(x + 30^\circ)$ E $y = -\sin(x - 30^\circ)$ F $y = 2\cos(x + 60^\circ)$





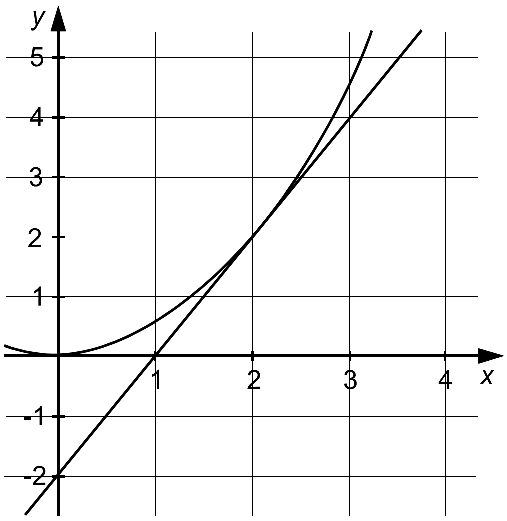
6. Figuren visar en likbent triangel ABC.
Bestäm $\sin A$ och $\sin C$.



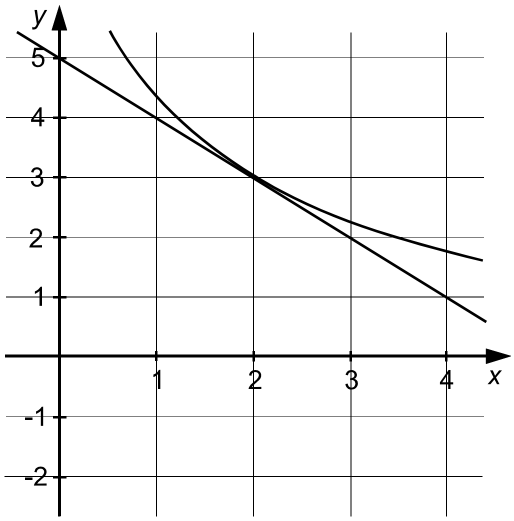
(0/3)

7. Figurerna visar kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ samt tangenterna för $x = 2$
Funktionen h definieras genom $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
Bestäm $h'(2)$ med hjälp av figurerna. (0/3)

$y = f(x)$



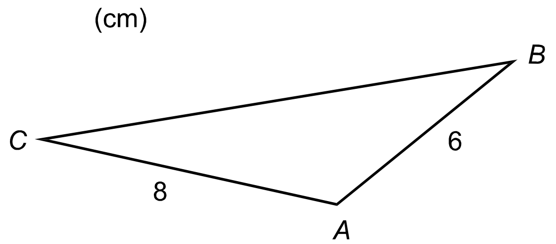
$y = g(x)$



DEL II

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

8.



I triangeln *ABC* ovan är vinkeln *CAB* trubbig. Triangelns area är $12\ \text{cm}^2$.
Beräkna vinkeln *CAB*. (2/0)

9. Ställ upp en trigonometrisk ekvation som har lösningarna 38° och 142°
Endast svar fordras (1/0)

10. Derivera följande funktioner

a) $f(x) = 3\sin 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)

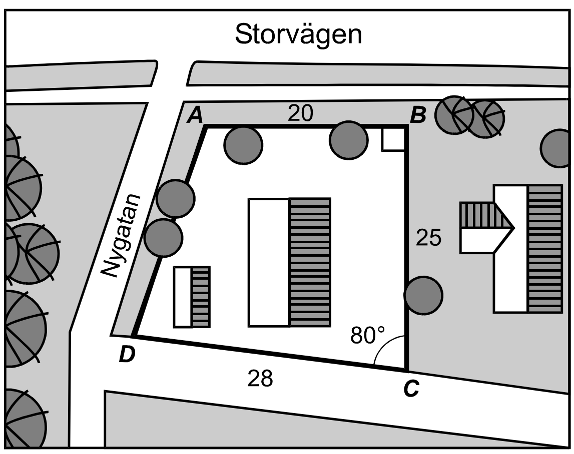
b) $g(x) = x \cdot \cos x$ *Endast svar fordras* (0/1)

c) $h(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$ *Endast svar fordras* (0/1)

11. Uppskatta med hjälp av din räknare värdet av integralen $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

Svara med minst tre decimalers noggrannhet. *Endast svar fordras* (1/0)

12. En villatomt har formen av en fyrhörning *ABCD*. *AB* är 20 m, *BC* är 25 m och *CD* är 28 m. Vinkeln *B* är rät och vinkeln *C* är 80°. Bestäm tomtens area. (3/0)



13.

Antalet starar i Sverige har halverats sedan 1979 (på 23 år). Staren är beroende av öppna gräsmarker, allra helst betesmarker och dessa har minskat.

Situationen kan matematiskt beskrivas med differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = ky$

Differentialekvationen har lösningen $y = C \cdot e^{kt}$ där C är antalet starar 1979, k är en konstant och y är antalet starar vid tiden t, där t är antalet år från 1979.

a) Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen. (0/1)

b) Efter hur lång tid har antalet starar sjunkit till 30 procent av 1979 års nivå om den negativa trenden fortsätter? (0/2)

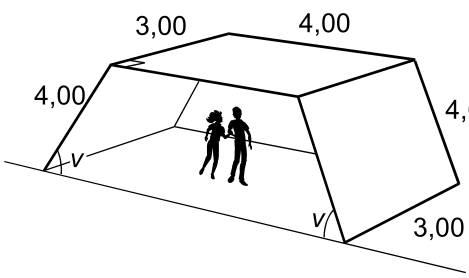
14. Bestäm med hjälp av din räknare det minsta värdet på heltalet A för vilket olikheten

$\lg x \cdot e^{4x-x^2} < A$ gäller för alla $x > 0$ (0/2)

15. En från början tom vattenbehållare fylls på med hastigheten $8e^{-0,2t}$ liter/minut, där t är tiden i minuter efter det att den tomma behållaren börjat fyllas. En läcka gör att vatten samtidigt rinner ut med hastigheten $5e^{-0,1t}$ liter/minut.

Hur lång tid tar det innan behållaren åter är tom? (0/3)

16. En kringresande teatergrupp som spelar *Hamlet* har en monterbar scen med en stomme av stålrör som monteras enligt figuren. Över stålkonstruktionen spänner man upp en tältduk. Stommen kan monteras med större eller mindre lutning på sidorna.

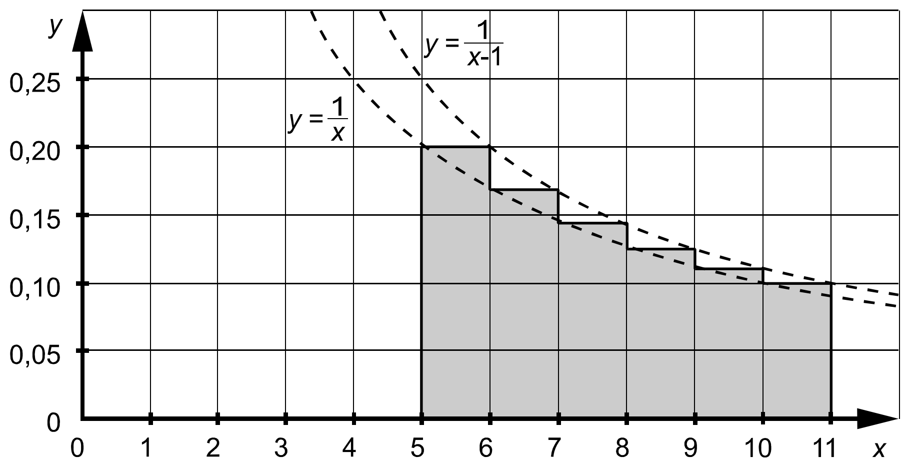


Visa att den spetsiga vinkeln v ska vara $60°$ för att volymen under tältduken ska bli så stor som möjligt. (0/4/¤)

Vid bedömningen av ditt arbete med uppgift nummer 17 kommer läraren att ta extra hänsyn till:
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Om du gjort korrekta beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du lyckas komma
- Hur väl du motiverar din slutsats
- Hur väl du använder det matematiska språket

17. Det kan vara svårt att beräkna en summa med många termer. Ofta kan man finna en formel men när detta inte går är det ibland möjligt att uppskatta summan med hjälp av integraler. I denna uppgift ska du få uppskatta värdet av några olika summor genom att bilda lämpliga integraler.

Summan $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$ illustreras av arean av det skuggade området i figuren nedan. Graferna till funktionerna $y=\frac{1}{x}$ och $y=\frac{1}{x-1}$ är också inritade.



Du ser att $\int_5^{11}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\int_5^{11}\frac{1}{x-1}\,dx$

Summan är alltså instängd mellan integralernas värden.

- Bestäm med hjälp av integralerna ovan mellan vilka värden summan $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$ ligger.

- Använd samma funktioner som ovan för att stänga in summan $\frac{1}{60}+\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+\cdots+\frac{1}{118}+\frac{1}{119}+\frac{1}{120}$ mellan två värden. Beräkna dessa värden.

- Summorna ovan är av formen $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$, där n är ett positivt heltal.
  Undersök på samma sätt dessa summor för stora värden på n.
  Vilken slutsats drar du? (3/4/¤)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmålen 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 2, 4, 7, 9, 13, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 5, 6, 12, 13b, 14, 15 och 16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 6, 12, 13 och 15-17 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 6, 9, 12, 14-17 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 12-17 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2002 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	2	0													x			x		x												
2	2	0													x	x		x		x												
3	2	0					x											x														
4	1	0													x			x														
5	1	0						x										x														
6	0	3								x												x	x	x	x							
7	0	3									x											x		x								
8	2	0								x								x		x												
9	1	0					x											x														
10a	1	0									x							x														
10b	0	1									x											x										
10c	0	1									x											x										
11	1	0															x	x														
12	3	0								x								x	x	x												
13a	0	1												x								x		x								
13b	0	2			x																	x		x	x							
14	0	2											x									x	x	x	x							
15	0	3													x	x						x		x	x							
16	0	4	¤						x	x												x		x	x			x			x	
17	3	4	¤												x	x		x	x	x		x	x	x	x			x	x		x	
Σ	19	24		0/2			9/7				10/15																					

Kravgränser
Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 19 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	11 poäng.
Väl godkänd:	23 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	23 poäng varav minst 14 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i en* av ¤-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)
   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.
5. Uppgifter av långsvarstyp
   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]
   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.
6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg
   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2002)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		**Max 2/0**
	Korrekt primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar (6)	+1 g
2.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar lösning ($F(x) = \mathrm{e}^x + 1$)	+1-2 g
3.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar lösning med en vinkel korrekt	+1 g
	med samtliga vinklar korrekt ($x = 15° + n \cdot 60°$)	+1 g
4.		**Max 1/0**
	Korrekt tecknat integral $\left(\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x \right)$	+1 g
5.		**Max 1/0**
	Korrekt svar (F: $y = 2\cos(x + 60°)$)	+1 g
6.		**Max 0/3**
	Bestämmer sin *A* korrekt $\left(\frac{4}{5} \right)$	+1 vg
	Påbörjar bestämning av sin *C*, t ex genom att använda sinussatsen	+1 vg
	och beräknar sin *C* korrekt $\left(\frac{24}{25} \right)$	+1 vg
7.		**Max 0/3**
	Godtagbar metod för att bestämma $h'(2)$, t ex bestämt närmevärde till $h(2)$ och $h(3)$ och tecknat ändringskvoten	+1-2 vg
	Beräknar $h'(2)$ godtagbart (4,0)	+1 vg

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II			
8.			**Max 2/0**
		Redovisat godtagbar metod	+1 g
		med godtagbart svar ($150°$)	+1 g
9.			**Max 1/0**
		Godtagbar ekvation ($\sin x = 0{,}62$)	+1 g
10.			**Max 1/2**
	a)	Korrekt deriverat ($f'(x) = 9\cos 3x$)	+1 g
	b)	Korrekt deriverat ($g'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$)	+1 vg
	c)	Korrekt deriverat ($h'(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$)	+1 vg
11.			**Max 1/0**
		Godtagbart svar (1,118)	+1 g
12.			**Max 3/0**
		Redovisad godtagbar metod	+1-2 g
		med godtagbart svar ($550\ \mathrm{m}^2$)	+1 g
13.			**Max 0/3**
	a)	Godtagbar förklaring (Ändringshastigheten av antalet starar är proportionell mot antalet starar)	+1 vg
	b)	Redovisat godtagbar metod	+1 vg
		med godtagbart svar (40 år)	+1 vg
14.			**Max 0/2**
		Korrekt svar (19)	+1 vg
		med godtagbar motivering, t ex skissat lämplig graf	+1 vg
15.			**Max 0/3**
		Godtagbar ansats, t ex tecknat ekvationen $\int_0^x 8e^{-0,2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 5e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t$	+1 vg
		Godtagbar lösning med godtagbart svar (14 min)	+1-2 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
16.		Max 0/4/¤
	Godtagbar ansats, t ex infört lämpliga uttryck för relevanta sidor	+1 vg
	Godtagbar funktion för area eller volym som kan leda till bestämning av maximal volym.	+1 vg
	Bestämning av vinkel för maximal volym	+1 vg
	Godtagbar metod för att verifiera största värdet	+1 vg
	Eleven verifierar maximum algebraiskt eller genom att behandla funktionen grafiskt på räknaren. Redovisningen är fullständig och tydlig och eleven använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt språk.	¤

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

17. **Max 3/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** ⟶		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständig och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven beräknar minst en av integralerna i punkt 1 **1 g**	Eleven anger integrationsgränser till integralerna i punkt 2 och beräknat integralerna. Smärre fel i någon av integrationsgränserna kan bortses ifrån. **2 g**	Eleven gör den generella ansatsen $\int_{n}^{2n+1} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x =$ $\left[\ln(x-1)\right]_{n}^{2n+1}$ **2 g och 1 vg**	**2/1**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Eleven anger ett intervall med två gränser, beräknade från punkt 1 **1 g**	Eleven drar slutsats baserat på numeriska beräkningar på minst två stora värden av n. T ex ”Värdet blir 0,69” Smärre fel i någon av integrationsgränserna kan bortses ifrån. **1 g och 1 vg**	Utifrån en generell ansats drar eleven slutsatsen att summan har ett gränsvärde. Smärre fel i någon av integrationsgränserna kan bortses ifrån. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är acceptabelt **1 vg**		**0/1**
Summa				**3/4**

Eleven kommer till gränsvärdet $\ln 2$ för summan genom att utföra generella beräkningar.

Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Eleven använder ett matematiskt språk och gör det på ett i huvudsak korrekt sätt. ¤

Lösningen kan bygga på nedanstående uppskattningar

$$\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{2n+1}{n} = \int_{n}^{2n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n} < \int_{n}^{2n+1} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2n}{n-1} = \ln\left(\frac{2}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

med därpå följande gränsvärdesdiskussion.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17

Elevlösning 1 (3 g och 2 vg)

1) Integralen av kurvan $y=\frac{1}{x}$ (mellan 5 och 11)

$$\int_5^{11} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_5^{11} = \ln 11 - \ln 5 = \ln \frac{11}{5} \approx 0{,}788$$

Integralen av kurvan $y=\frac{1}{x-1}$ (mellan 5 och 11)

$$\int_5^{11} \frac{1}{x-1}\,dx = \left[\ln(x-1)\right]_5^{11} = (\ln(11-1)) - (\ln(5-1)) = \ln \frac{5}{2} \approx 0{,}916$$

Summan $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$ ligger mellan 0,788 och 0,917,

alltså $\boxed{\ln\frac{11}{5} < \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{9}+\frac{1}{10} < \ln\frac{5}{2}}$

2) Integralen av kurvan $y=\frac{1}{x}$ (mellan 60 och 121)

$$\int_{60}^{121} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_{60}^{121} = \ln 121 - \ln 60 = \ln \frac{121}{60} \approx 0{,}701$$

Integralen av kurvan $y=\frac{1}{x-1}$ (mellan 60 och 121)

$$\int_{60}^{121} \frac{1}{x-1}\,dx = \left[\ln(x-1)\right]_{60}^{121} = \ln 120 - \ln 59 = \ln \frac{120}{59} \approx 0{,}710$$

Summan av $\frac{1}{60}+\frac{1}{61}+\ldots+\frac{1}{119}+\frac{1}{120}$ ligger mellan 0,701 och 0,710

alltså $\boxed{\ln\frac{121}{60} < \frac{1}{60}+\frac{1}{61}+\ldots+\frac{1}{119}+\frac{1}{120} < \ln\frac{120}{59}}$

3) $$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} < \int_n^{2n+1} \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\boxed{\ln\frac{2n+1}{n} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{n-1}}$$

Ju större n, desto fler termer och närmare gränser.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			X	2/1	
Matematiska resonemang	X			1/0	
Redovisning och matematiskt språk			X	0/1	
Summa				**3/2**	

Elevlösning 2 (3 g och 2 vg)

$\boxed{y = \frac{1}{x}}$ $\int_5^{11} \frac{1}{x} = \left[\ln x \right]_5^{11} = \ln 11 - \ln 5 \approx 0{,}79$

$\boxed{y = \frac{1}{x-1}}$ $\int_5^{11} \frac{1}{x-1} = \left[\ln (x-1) \right]_5^{11} = \ln 10 - \ln 4 \approx 0{,}92$

Värdet på
Summan ligger mellan 0,79 ae och 0,92 ae

$0{,}8 < \sum < 0{,}9$

$\int_{60}^{121} \frac{1}{x} = \left[\ln x \right]_{60}^{121} = \ln 121 - \ln 60 \approx 0{,}70$

$\int_{60}^{121} \frac{1}{x-1} = \left[\ln (x-1) \right]_{60}^{121} = \ln 120 - \ln 59 \approx 0{,}71$

Värdet på summan ligger mellan 0,70 och 0,71

$\boxed{n = 100}$

$\int_n^{(2n+1)} \frac{1}{x} = \int_{100}^{201} \frac{1}{x} = \left[\ln x \right]_{100}^{201} = \ln 201 - \ln 100 \approx 0{,}6981$

$\int_{100}^{201} \frac{1}{x-1} = \left[\ln (x-1) \right]_{100}^{201} = \ln 200 - \ln 99 \approx 0{,}7032$

$\boxed{n = 200}$

$$\int_n^{(2n+1)} \frac{1}{x} = \int_{200}^{401} \frac{1}{x} = \Big[\ln x\Big]_{200}^{401} = \ln 401 - \ln 200 \approx 0{,}6956$$

$$\int_{200}^{401} \frac{1}{x-1} = \Big[\ln(x-1)\Big]_{200}^{401} = \ln 400 - \ln 199 = 0{,}6982$$

$\boxed{n = 500}$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} = \int_{500}^{1001} \frac{1}{x} = \Big[\ln x\Big]_{500}^{1001} = \ln 1001 - \ln 500 \approx 0{,}6941$$

$$\int_{500}^{1001} \frac{1}{x-1} = \Big[\ln(x-1)\Big]_{500}^{1001} = \ln 1000 - \ln 499 \approx 0{,}6951$$

$\boxed{n = 1000}$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} = \int_{1000}^{2001} \frac{1}{x} = \Big[\ln x\Big]_{1000}^{2001} = \ln 2001 - \ln 1000 \approx 0{,}6936$$

$$\int_{1000}^{2001} \frac{1}{x-1} = \Big[\ln(x-1)\Big]_{1000}^{2001} = \ln 2000 - \ln 999 \approx 0{,}6941$$

$A = 0{,}69385$

För $\boxed{n = 100}$ blir $A = \dfrac{0{,}6981 + 0{,}7032}{2} \approx 0{,}70065$ ae

$\boxed{n = 200} \Rightarrow A = \dfrac{0{,}6956 + 0{,}6982}{2} \approx 0{,}6969$ ae

$\boxed{n = 500} \Rightarrow A = \dfrac{0{,}6941 + 0{,}6951}{2} \approx 0{,}6946$ ae

$\boxed{n = 1000} \Rightarrow A = \dfrac{0{,}6936 + 0{,}6941}{2} \approx 0{,}69385$ ae

Slutsats: Ju större värde på n, ju mindre blir arean.
Kurvorna ligger närmre varandra när x blir större vilket påverkas av värdet på n

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X		2/0	
Matematiska resonemang		X		1/1	
Redovisning och matematiskt språk			X	0/1	
Summa				**3/2**	

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och ¤)

$$\int_5^{11} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_5^{11} = \ln 11 - \ln 5 \approx 0{,}788$$

$$\int_5^{11} \frac{1}{x-1}\,dx = [\ln(x-1)]_5^{11} = \ln(11-1) - (\ln(5-1)) =$$

$$= \ln 10 - \ln 4 \approx 0{,}916$$

$\ln 11 - \ln 5 (\approx 0{,}7884)$ är det undre värdet $\left(\sum_{k=5}^{k=10} \frac{1}{k}\right)$

$\ln 10 - \ln 4 (\approx 0{,}9163)$ är det övre värdet $\left(\sum_{k=5}^{k=10} \frac{1}{x-1}\right)$

- $$\int_{60}^{121} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{60}^{121} = \ln 121 - \ln 60 \approx 0{,}7014$$

$$\int_{60}^{121} \frac{1}{x-1}\,dx = [\ln(x-1)]_{60}^{121} = \ln 120 - \ln 59 \approx 0{,}710$$

$\ln 121 - \ln 60 (\approx 0{,}7014)$ är det undre värdet $\left(\sum_{k=60}^{k=120} \frac{1}{k}\right)$

$\ln 120 - \ln 59 (\approx 0{,}710)$ är det övre värdet $\left(\sum_{k=60}^{k=120} \frac{1}{x-1}\right)$

- väljer ett värde för n:

$n = 500$

$\Sigma: \frac{1}{500} + \frac{1}{501} + \ldots + \frac{1}{1000}$

undersöker gränsvärdena med $y = \frac{1}{x}$ & $y = \frac{1}{x-1}$

undre: $\int_{500}^{1001} \frac{1}{x}\,dx = \ln 1001 - \ln 500 \approx 0{,}6941$

övre: $\int_{500}^{1001} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln 1000 - \ln 499 \approx 0{,}6952$

väljer återigen ett värde på n:

$n = 1000$

$\Sigma: \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \ldots + \frac{1}{2000}$

undre $\int_{1000}^{2001} \frac{1}{x}\,dx = \ln 2001 - \ln 1000 \approx 0,6936$

övre $\int_{1000}^{2001} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln 2000 - \ln 999 \approx 0,6942$

$n = 10\ 000$

$\Sigma \frac{1}{10\ 000} + \frac{1}{10\ 001} + \ldots \frac{1}{20\ 000}$

undre $\int_{10\ 000}^{20\ 001} \frac{1}{x}\,dx = \ln 20\ 001 - \ln 10\ 000 \approx 0,6931$

övre $\int_{10\ 000}^{20\ 001} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln 20\ 000 - \ln 9999 \approx 0,6933$

$n = 100\ 000$

$\Sigma: \frac{1}{100\ 000} + \frac{1}{100\ 001} + \ldots \frac{1}{200\ 000}$

$\int_{100\ 000}^{200\ 001} \frac{1}{x}\,dx = \ln 200\ 001 - \ln 100\ 000 \approx 0,6931$

$\int_{100\ 000}^{200\ 001} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln 200\ 000 - \ln 99\ 999 \approx 0,6931$

sätter gränsvärden till n

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_n^{2n+1} = \underline{\ln(2n+1) - \ln(n)}$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x-1}\,dx = \Big[\ln(x-1)\Big]_n^{2n+1} = \ln((2n+1)-1) - \ln(n-1) =$$

$$= \underline{\ln(2n) - \ln(n-1)}$$

om värderna blir mer och mer lika...
provar med

$\ln(2n+1) - \ln(n) \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \Rightarrow$

$\ln\left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ (för stora n)

$\underline{\underline{\ln(2)}}$

$\ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) \Rightarrow$ (för väldigt stora n)

$\underline{\underline{\ln(2)}}$

slutsats! (Algebraisk)
för stora n så blir det tillslut i princip lika stora. De termer som skiljer blir så obetydliga för stora n så de kan bortses

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/1	
Matematiska resonemang	X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**3/4/¤**	

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			