NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D HÖSTEN 2003

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 16 uppgifter. **Del I** består av 7 uppgifter och **Del II** av 9 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 42 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	11 poäng.
Väl godkänd:	25 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	25 poäng varav minst 12 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i en* av ¤-uppgifterna.

Namn: ______________________________ Skola: ______________________________

Komvux/gymnasieprogram: ____

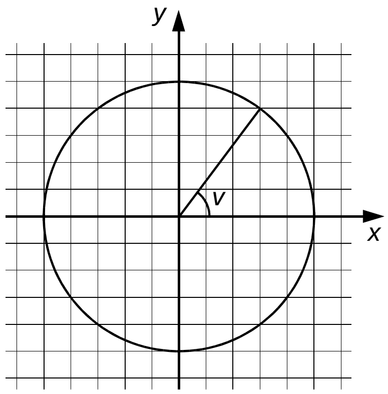
Del I

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Hur många grader motsvarar $\frac{\pi}{5}$ radianer? *Endast svar fordras* (1/0)

2. Beräkna integralen $\int_0^2 (3x^2 + 2)\mathrm{d}x$ (2/0)

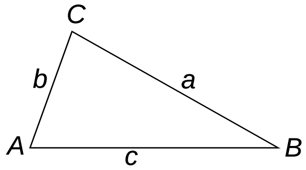
3. Figuren visar en enhetscirkel.



a) Bestäm $\cos v$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) Bestäm $\cos(\pi - v)$ *Endast svar fordras* (1/0)

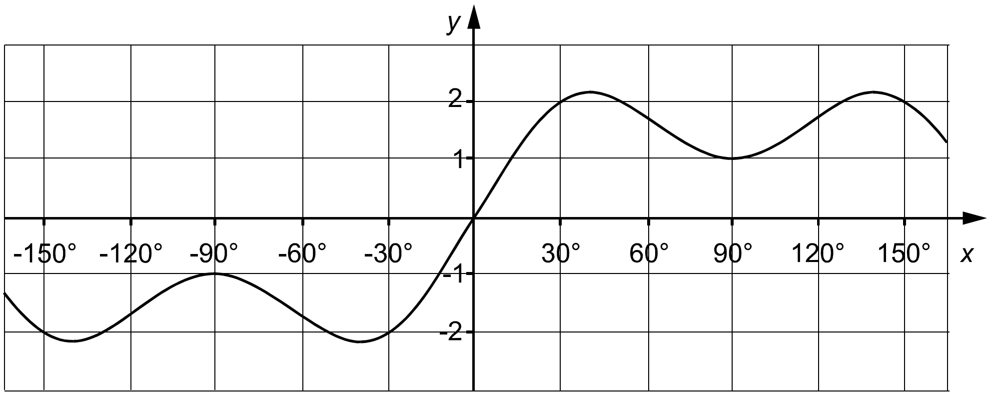
4. Bestäm möjliga värden på vinkeln C om arean av triangeln ABC är $\frac{ab}{4}$



(3/0)

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = 2\sin x + \sin ax$
där *a* är *ett* heltal i intervallet $1 \le a \le 10$

Bestäm detta värde på *a*. (1/1)



6. En funktion f har andraderivatan $f''(x) = \cos 2x$. Funktionen har en extrempunkt med koordinaterna $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

a) Avgör om den givna extrempunkten är en maximi- eller minimipunkt. (1/0)

b) Bestäm funktionen f. (0/2)

7. Kurvan $y = (2x + a)e^x$ har en tangent parallell med *x*-axeln i den punkt där kurvan skär *y*-axeln. Bestäm konstanten *a*. (0/2)

Del II

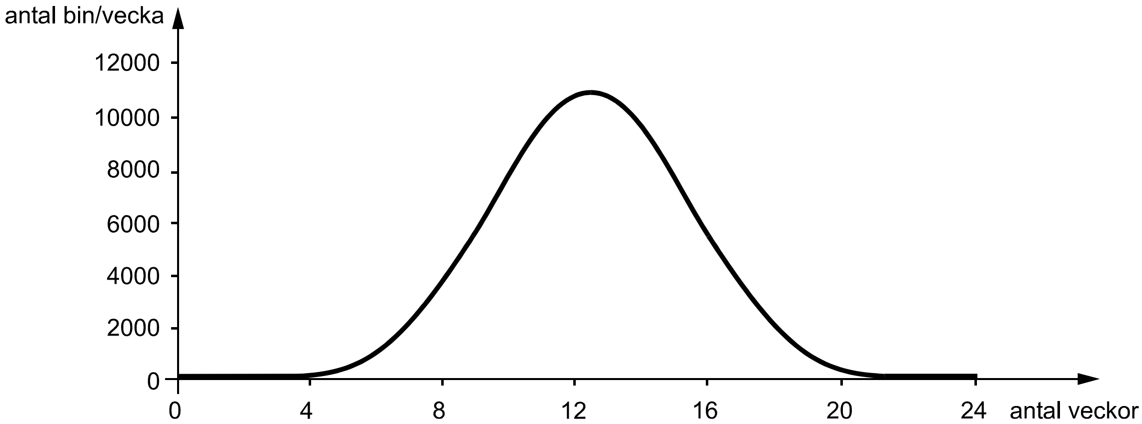
Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

8. Ange den primitiva funktion F till $f(x) = 6x^2 - 7$ som uppfyller villkoret $F(2) = 4$ (2/0)

9. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $f(x) = 3x^2 - 3x$ och $g(x) = 9x - 3x^2$ (3/0)

10. Den hastighet som antalet bin i ett bisamhälle ökar med per vecka framgår av figuren. Arean under grafen kan beräknas med en integral.

Tolka innebörden av integralens värde. (0/2)



11.

Avsvalningen hos keramikugnen på Bessemergymnasiet kan beskrivas med differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 0{,}12y = 2{,}4$
där y är temperaturen i grader Celsius och t är tiden i timmar.

a) Visa att $y = 900 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot t} + 20$ är en lösning till $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 0{,}12y = 2{,}4$ (2/0)

Ugnens temperatur var 920 °C när den stängdes av klockan 16.00. När temperaturen sjunkit till ungefär 100 °C kan man ta ut keramikgodset ur ugnen.

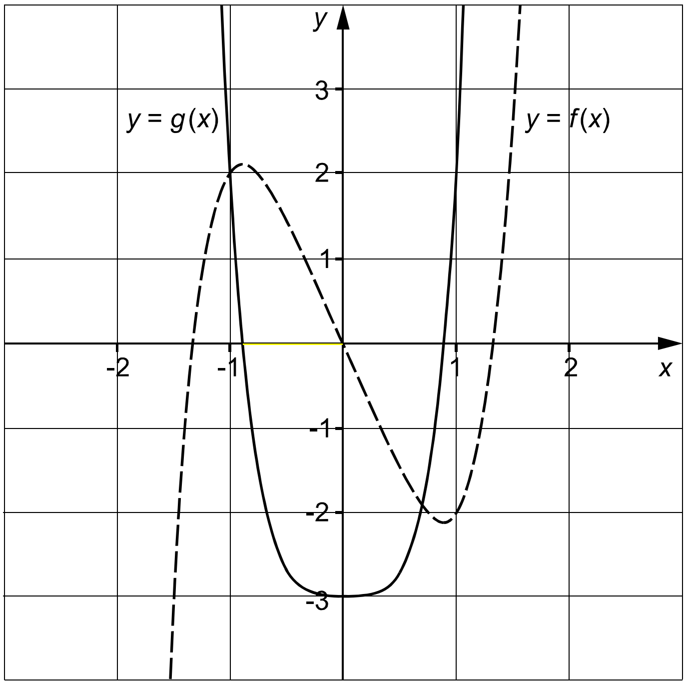
b) Efter hur lång tid har temperaturen i ugnen sjunkit till 100 °C? (2/0)

12. Sätt $p = \cos x + \sin x$ och $q = \cos x - \sin x$

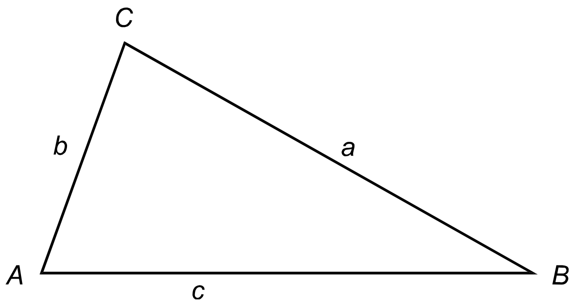
Visa att värdet av uttrycket $(p+q)^2 + (p-q)^2$ är oberoende av värdet på x. (0/2)

13. I bilden nedan återges grafen till en funktion och dess derivata.

Beräkna $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ (0/2)

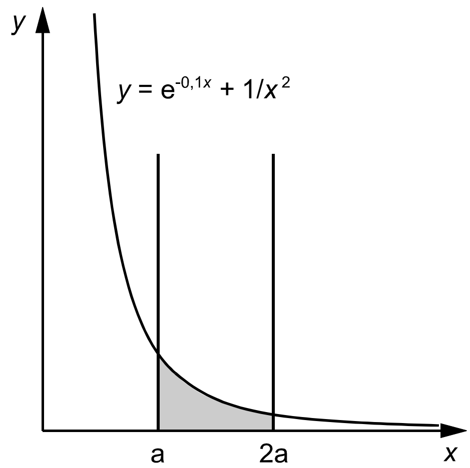


14. I triangeln *ABC* är vinklarna *A* och *B* spetsiga.



Visa, utan att använda sinussatsen, att $b\sin A = a\sin B$ (0/2/¤)

15.



Det markerade området i figuren begränsas av kurvan

$y = \mathrm{e}^{-0{,}1x} + \dfrac{1}{x^2}$, x-axeln samt linjerna $x = a$ och $x = 2a$, $a > 0$

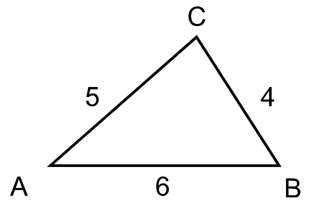
Bestäm för vilket värde på a som områdets area har ett lokalt maximum.
Svara med två värdesiffror. (1/2)

Vid bedömning av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur väl du redovisar ditt arbete
- hur systematisk du är i din undersökning
- hur väl du motiverar dina resultat
- hur väl du använder det matematiska språket

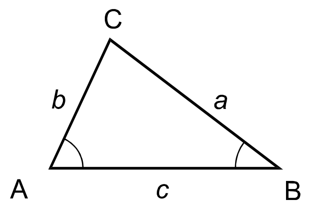
16. Att *solvera* en triangel innebär att bestämma alla vinklar och sidor i triangeln. För att kunna solvera en triangel måste man ha tillräcklig information om triangelns sidor och vinklar.

- I triangeln nedan är alla sidorna kända. Solvera triangeln.



- I en annan triangel är vinklarna A och B kända.

Vad måste man veta ytterligare för att kunna solvera triangeln?
Beskriv med ord hur du skulle göra för att solvera triangeln.



- I första fallet känner du till alla sidorna och kan då solvera triangeln. I andra fallet känner du till två vinklar och kan genom att lägga till information solvera triangeln.

Vilka andra fall kan förekomma?
Beskriv hur du kan solvera triangeln i dessa fall. (3/4/¤)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 5, 7, 10, 11b och 12-16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 6, 7, 9, 11, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 5, 9, 12, 14 och 15 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 4, 6, 7, 13, 15 och 16 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2003 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Kunskapsområde: Övr 1	Övr 4	Övr 5	Trigonometri 1	Trigonometri 2	Trigonometri 3	Trigonometri 4	Diff & integral 5	Diff & integral 6	Diff & integral 7	Diff & integral 8	Diff & integral 9	Diff & integral 10	Diff & integral 11	Betygskriterium: Godkänd 1	Godkänd 2	Godkänd 3	Godkänd 4	Väl godkänd 1	Väl godkänd 2	Väl godkänd 3	Väl godkänd 4	Väl godkänd 5	Väl godkänd 6	Mycket väl godkänd 1	Mycket väl godkänd 2	Mycket väl godkänd 3	Mycket väl godkänd 4	Mycket väl godkänd 5
1	1	0					x											x														
2	2	0														x		x		x												
3a	1	0					x											x														
3b	1	0					x											x														
4	3	0								x								x	x	x												
5	1	1						x	x									x	x	x		x		x								
6a	1	0					x				x	x						x	x	x												
6b	0	2					x				x	x										x			x							
7	0	2			x						x											x	x		x	x						
8	2	0													x			x		x												
9	3	0													x			x	x	x												
10	0	2														x						x	x	x								
11a	2	0													x			x		x												
11b	2	0			x													x		x												
12	0	2			x				x													x			x	x						
13	0	2													x	x						x	x	x	x	x						
14	0	2	¤						x	x												x	x		x	x		x		x		
15	1	2														x	x					x	x		x	x						
16	3	4	¤							x								x	x	x		x	x	x	x	x		x	x		x	
Σ	23	19		2/2			11/8				10/9																					

Kravgränser
Detta prov kan ge maximalt 42 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	11 poäng.
Väl godkänd:	25 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	25 poäng varav minst 12 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i en* av ¤-uppgifterna.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt

   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning

   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng

   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning

   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2003)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
Del I			
1.			**Max 1/0**
		Korrekt svar ($36°$)	+1 g
2.			**Max 2/0**
		Korrekt primitiv funktion	+1 g
		med korrekt svar (12)	+1 g
3.			**Max 2/0**
	a)	Korrekt svar (0,6)	+1 g
	b)	Korrekt svar ($-0,6$)	+1 g
4.			**Max 3/0**
		Korrekt ansats, t ex tecknat ekvationen $\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ab}{4}$	+1 g
		med en vinkel korrekt bestämd	+1 g
		med ytterligare en vinkel korrekt bestämd (30°, 150°)	+1 g
5.			**Max 1/1**
		Godtagbar ansats, t ex tar en punkt från kurvan och sätter in i funktionen	+1 g
		Fullföljer metoden på godtagbart sätt med korrekt värde på a (3)	+1 vg
6.			**Max 1/2**
	a)	Godtagbart visat extrempunktens karaktär (maximipunkt)	+1 g
	b)	Redovisad godtagbar lösning $\left(f(x)=-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{5}{4}\right)$	+1-2 vg
7.			**Max 0/2**
		Korrekt bestämning av y'	+1 vg
		i övrigt redovisad godtagbar lösning (-2)	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
8.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar lösning ($F(x) = 2x^3 - 7x + 2$)	+1-2 g
9.		**Max 3/0**
	Redovisad godtagbar ansats, t ex bestämt integrationsgränserna med grafräknare.	+1 g
	med korrekt tecknad integral	+1 g
	med korrekt svar (8 a.e.)	+1 g
10.		**Max 0/2**
	Redovisad godtagbar förklaring, t ex integralens värde anger den totala ökningen av antalet bin under 24 veckor	+1-2 vg
	Exempel på bedömd elevlösning redovisas nedan:	
	Värdet anger antalet bin som finns i bisamhället. (1 vg)	
	Kommentar: Elevens tolkning innefattar antalet bin, vilket kan anses räcka för att erhålla en poäng.	
11.		**Max 4/0**
a)	Korrekt deriverad funktion ($y' = -108 \cdot e^{-0,12t}$)	+1 g
	Visat att funktionen satisfierar differentialekvationen	+1 g
b)	Redovisad godtagbar metod	+1 g
	med godtagbart svar (20 h)	+1 g
12.		**Max 0/2**
	Redovisad godtagbar metod där ”trigonometriska ettan” används	+1 vg
	med i övrigt redovisad korrekt lösning	+1 vg
13.		**Max 0/2**
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\left(f(1) \text{ och } f(0)\right)$	+1 vg
	Godtagbar metod med korrekt svar (– 2)	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
14.		**Max 0/2/¤**
	En godtagbar ansats, t ex använder areasatsen på två vinklar	+1 vg
	med godtagbart slutfört bevis	+1 vg
	Eleven genomför beviset korrekt och använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk.	¤
15.		**Max 1/2**
	Godtagbar ansats, t ex tecknat integralen	+1 g
	Tecknat arean som funktion av a ($A(a) = 10(\mathrm{e}^{-0,1a} - \mathrm{e}^{-0,2a}) + \frac{1}{2a}$)	+1 vg
	med redovisad godtagbar bestämning av a (6,7)	+1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

16. **Max 3/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständig och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Bestämt en vinkel godtagbart. Bestämt alla tre vinklarna godtagbart $(A = 41{,}4^\circ, B = 55{,}8^\circ$ $C = 82{,}8^\circ)$ **1-2 g**	Bestämt alla tre vinklarna godtagbart i punkt ett. Redovisat en möjlig metod för hur övriga sidor och vinklar ska beräknas i fall två. **2 g och 1 vg**		**2/1**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Talat om att man måste känna till en sida i triangeln i fall två. **1 g**	Talat om att man måste känna till en sida i triangeln i punkt två. Beskrivit ett fall som kan förekomma i punkt tre och redovisat hur triangeln kan solveras. **1 g och 1 vg**	Talat om att man måste känna till en sida i triangeln i punkt två. I punkt tre beskrivit två fall som kan förekomma och redovisat hur triangeln kan solveras. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är välstrukturerad, och tydlig. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	**0/1**
Summa				**3/4**

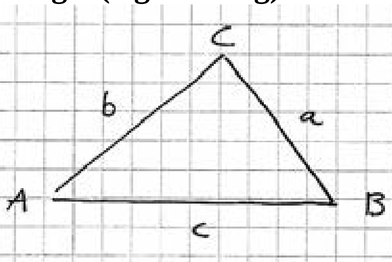
Ytterligare fall:

1. två sidor och mellanliggande vinkel är kända
2. två sidor och den vinkel som står mot den mindre av de kända sidorna (ger två lösningar)
3. två sidor och den vinkel som står mot den större av de kända sidorna

Eleven har behandlat andra punkten och dessutom behandlat minst två fall i punkt tre. Lösningen redovisas med klar tankegång där det matematiska språket i huvudsak är korrekt. ¤

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

- 

$a = 4{,}0 \quad b = 5{,}0 \quad c = 6{,}0$

$A = 36{,}6°$

cosinussatsen ger:

$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos A$

$16 = 25 + 36 - 60 \cos A$

$16 = 61 - \cos A$

$76 = 61 \cdot \cos A$

$A \approx 36{,}6°, \quad B \approx 55{,}0, \quad C \approx 88{,}4$

SVAR: $A = 36{,}6° \quad B = 55{,}0° \quad C = 88{,}4°$

- SVAR: Jag måste veta nån av sidorna a eller b för att kunna lösa triangeln. Den metod som jag skulle använda är att jag skulle räkna fram de andra sidorna med hjälp av sinussatsen

• SVAR: Om man, till exempel, endast får vinkeln A och sidan a i en triangel så kan man räkna ut de övriga sidorna och vinklarna med hjälp av sinussatsen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

man kan även få ut sidorna i en triangel om man vet t.ex. sidan a och b och vinkeln C, detta med hjälp av cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				0/1	Solveringen av triangeln i punkt 1 är ej godtagbar. Redovisningen av hur triangeln i punkt 2 kan solveras är godtagbar.
Matematiska resonemang	X			1/0	
Redovisning och matematiskt språk				0/0	
Summa				**1/1**	

Elevlösning 2 (3 g och 4 vg)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos C$$

$$C = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ba}\right) \Rightarrow C = \arccos\left(\frac{6{,}0^2 - 5{,}0^2 - 4{,}0^2}{-2 \cdot 5{,}0 \cdot 4{,}0}\right)$$

$$= \pm\ 1{,}445 \text{ rad}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin(1{,}445)}{6{,}0} = \frac{\sin A}{4{,}0}$$

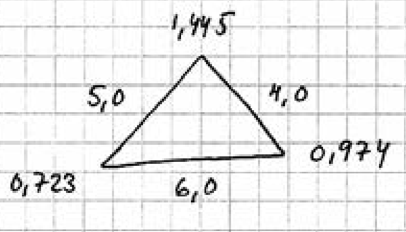
$$A_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\pm 1{,}445) \cdot 4{,}0}{6{,}0}\right) = \pm\ 0{,}723$$

$$\left(A_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\sin(\pm 1{,}445) \cdot 4{,}0}{6{,}0}\right) = \pm\ 2{,}42\right)$$ A skall vara minst

$$B = \pi - 0{,}723 - 1{,}445 = 0{,}974$$

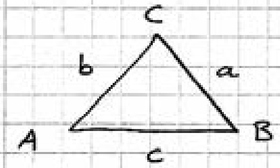
C = störst $\quad B$ = mellerst $\quad A$ = minst

$C = 1{,}445$ rad $\quad B = 0{,}974$ rad $\quad A = 0{,}723$ rad

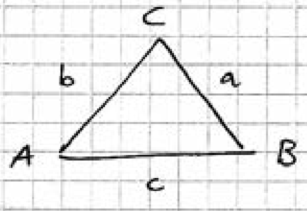


I en triangel ABC där vinkeln A och B
är kända behövs en av sidorna a, b eller c
kännas till för att solvering skall vara möjlig.
Vinkeln C kan räknas ut med tanke på att
en triangel alltid har vinkelsumman π rad.
När man känner till samtliga vinklar och en
sida kan sinussatsen användas för att räkna ut
resterande sidor.

En solvering är möjlig då En vinkel med motsatt sida och en annan vinkel eller sida är känd. dvs. tex. A, a känd och b, B, c eller C är känd. Solvering kan även räknas ut då samtliga sidor är kända utan vinklar, dock är solvering omöjlig (i alla fall med våra kunskaper) då endast vinklar är angivna. Även då vinkel med sina två närliggande sida kända kan solvering genomföras



Om vinkel med motsatt sida är känd tillsammans med en ytterligare antingen vinkel eller sida kan solvering genomföras med sinussatsen.



då tex. A, b, c ; A, b, a ; A, a, c är kända kan solvering utföras med cosinussatsen. då vinkeln A kan bytas ut mot någon av dom andra.

Bedömning

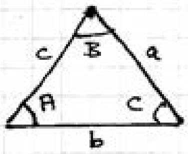
	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X		2/1	
Matematiska resonemang			X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk			X	0/1	
Summa				**3/4**	

I lösningen av punkt tre blandas de redan kända fallen (enligt punkt 1 och 2) med de ytterligare fall som finns på ett sådant sätt att redovisningen visar brister på klarhet i tankegång.

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och ¤)

Punkt 1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow$$



$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \Rightarrow$$

$$A = \pm \arccos\left(\frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right)$$

$$A = \arccos\left(\frac{-4^2 - 5^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}\right) = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow A \simeq \underline{0{,}72 \text{ rad}} \qquad A \simeq \underline{41{,}4^\circ}$$

$$B = \arccos\left(\frac{-5^2 - 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) = \arccos\left(\frac{9}{16}\right)$$

$$\Rightarrow B \approx \underline{0{,}97 \text{rad}} \qquad B \simeq \underline{55{,}8^\circ}$$

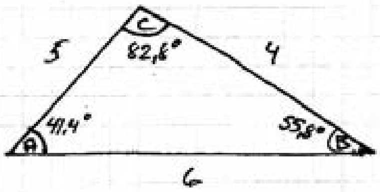
$$C = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow C \approx \underline{1{,}45 \text{rad}} \qquad C \simeq \underline{82{,}8^\circ}$$

// Kontroll //

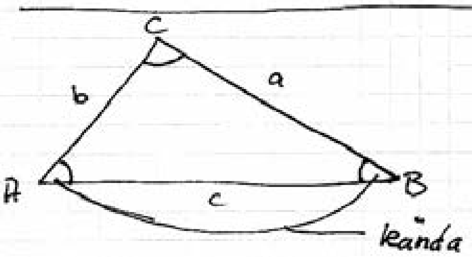
$$0{,}72 + 0{,}97 + 1{,}45 = 3{,}14$$

$$41{,}4 + 55{,}8 + 82{,}8 = 180$$

Svar:



Punkt 2



$\Rightarrow \angle C = 180° - A - B$

Vi har nu alla vinklar, men behöver en sida för att veta hur stor triangeln ska vara.
Med sinussatsen kan vi lösa ut resterande sidor:

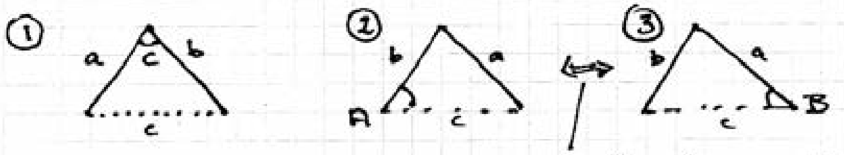
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Om en sida x är känd med motstående vinkel X
o = okänd sida O = okänd sidas motstående vinkel

$$o = x \cdot \frac{\sin O}{\sin X}$$

Punkt 3, del I

Det finns 6 data att veta, man kan räkna ut alla om man har tre av dem kända (3 vinklar som undantag)
Jag har visat för 3 sidor; 2 vinklar + 1 sida. Det som är kvar är alltså 2 vinklar + 1 vinkel



samma fall, fast spegelvänd

(2) = (3))

Punkt 3 , del II

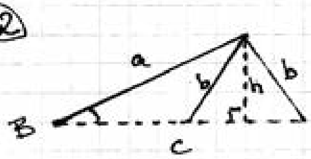
① cosinussatsen : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow$

$$c = \pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}$$

Nu vet vi alla sidor och räknar ut vinklarna enligt uppg. 1

① ger 1 lösning

②



$h > b \Rightarrow c$ har ingen reel lösning

$h = b \Rightarrow c$ har 1 lösning

$h < b \Rightarrow c$ har 2 lösningar

Enligt mig är cos-satsen den lättaste vägen. Vi räknar ut vad c blir och räknar sedan som i uppg 1, med det/den svar vi får

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 - (2a\cos B)c + (a^2 - b^2) = 0$$

$$c = a\cos B \pm \sqrt{a^2\cos^2 B - a^2 + b^2}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X		2/1	
Matematiska resonemang			X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk		X		0/1	
Summa				**3/4/¤**	

Lösningen redovisas med klar tankegång och det matematiska språket är i huvudsak korrekt. ¤

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					