

Concerning test material in general, the Swedish Board of Education refers to the Official Secrets Act, the regulation about secrecy, 4th chapter 3rd paragraph. For this material, the secrecy is valid until the expiration of December 2013.

NATIONAL TEST IN MATHEMATICS COURSE D AUTUMN 2003

Directions

- Test time** 240 minutes for Part I and Part II together. We recommend that you spend no more than 60 minutes on Part I.
- Resources** **Part I:** "Formulas for the National Test in Mathematics Courses C, D and E." *Please note that calculators are not allowed in this part.*
Part II: Calculators, and "Formulas for the National Test in Mathematics Courses C, D and E".
- Test material** The test material should be handed in together with your solutions.
Write your name, the name of your education programme / adult education on all sheets of paper you hand in.
Solutions to Part I should be handed in before you retrieve your calculator. You should therefore present your work on Part I on a separate sheet of paper. Please note that you may start your work on Part II without a calculator.
- The test** The test consists of a total of 16 problems. **Part I** consists of 7 problems and **Part II** consists of 9 problems.
To some problems (where it says *Only answer is required*) it is enough to give short answers. For the other problems short answers are not enough. They require that you write down what you do, that you explain your train of thought, that you, when necessary, draw figures. When you solve problems graphically/numerically please indicate how you have used your resources.
Problem 16 is a larger problem which may take up to an hour to solve completely. It is important that you try to solve this problem. A description of what your teacher will consider when evaluating your work is attached to the problem.
Try all of the problems. It can be relatively easy, even towards the end of the test, to receive some points for partial solutions. A positive evaluation can be given even for unfinished solutions.
- Score and mark levels** The maximum score is 42 points.
The maximum number of points you can receive for each solution is indicated after each problem. If a problem can give 2 "Pass"-points and 1 "Pass with distinction"-point this is written (2/1). Some problems are marked with \square , which means that they more than other problems offer opportunities to show knowledge that can be related to the criteria for "Pass with Special Distinction" in Assessment Criteria 2000.
Lower limit for the mark on the test
Pass: 11 points
Pass with distinction: 25 points of which at least 7 "Pass with distinction"-points.
Pass with special distinction: 25 points of which at least 12 "Pass with distinction points". You also have to show "Pass with special distinction" qualities in at least one of the \square -problems.

Name: _____ School: _____

Education programme/adult education: _____

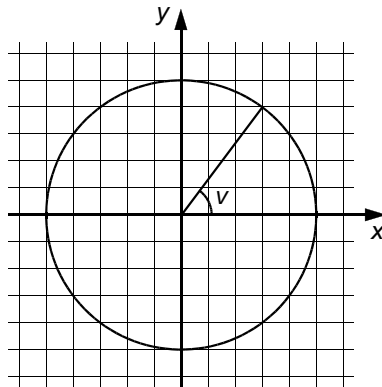
Part I

This part consists of 7 problems that should be solved without the aid of a calculator. Your solutions to the problems in this part should be presented on separate sheets of paper that must be handed in before you retrieve your calculator. Please note that you may begin working on Part II without the aid of a calculator.

1. How many degrees correspond to $\frac{\pi}{5}$ radians? *Only answer is required* (1/0)

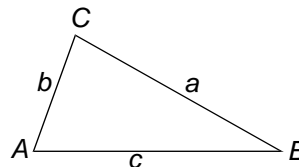
2. Evaluate the integral $\int_0^2 (3x^2 + 2)dx$ (2/0)

3. The figure shows a unit circle.



- a) Find $\cos v$ *Only answer is required* (1/0)
- b) Find $\cos(\pi - v)$ *Only answer is required* (1/0)

4. Find possible values of angle C
if the area of triangle ABC is $\frac{ab}{4}$

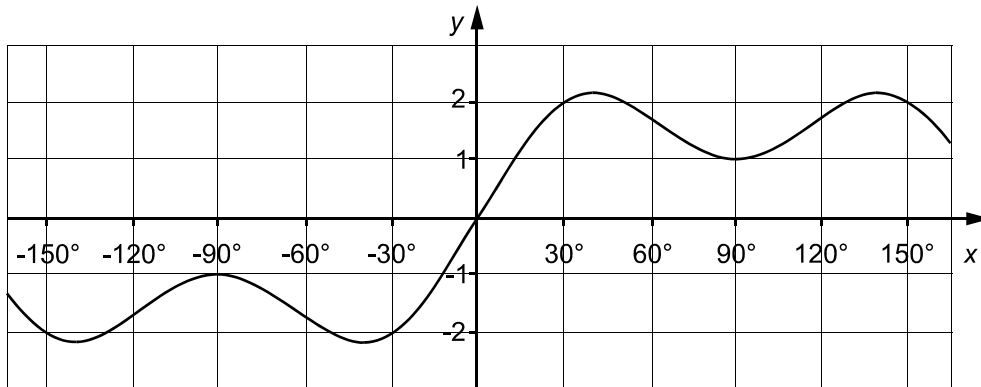


(3/0)

5. The figure shows a graph of the function $y = 2\sin x + \sin ax$ where a is a whole number in the interval $1 \leq a \leq 10$

Find this value of a .

(1/1)



6. A function f has the second derivative $f''(x) = \cos 2x$. The function has an extreme point with the coordinates $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

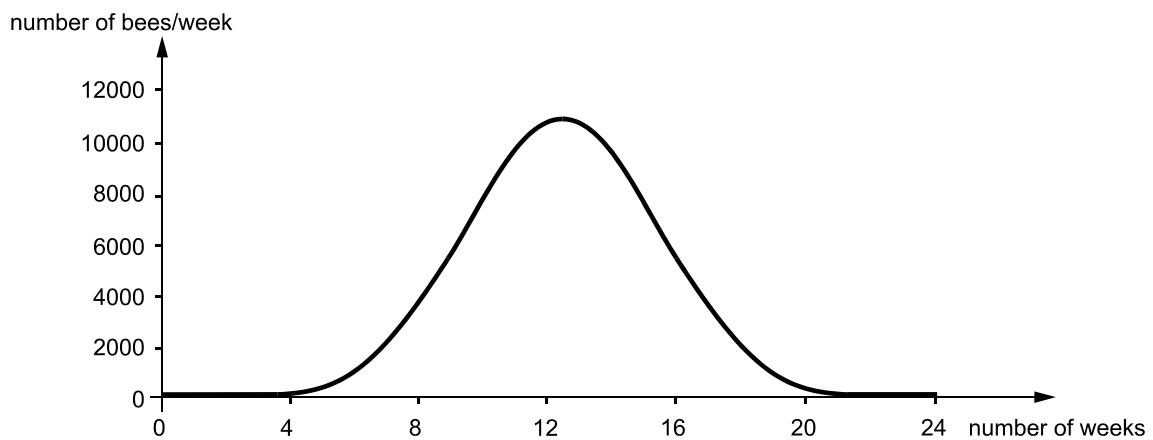
- a) Determine if the stated extreme point is a maximum or a minimum point. (1/0)
- b) Find the function f . (0/2)

7. The curve $y = (2x + a)e^x$ has a tangent parallel with the x -axis at the point where the curve crosses the y -axis. Find the constant a . (0/2)

Part II

This part consists of 9 problems and you may use a calculator when solving them. Please note that you may begin working on Part II without a calculator.

8. Give the primitive function F to $f(x) = 6x^2 - 7$ which fulfils the condition $F(2) = 4$ (2/0)
9. Calculate the area of the region that is bounded by the curves $f(x) = 3x^2 - 3x$ and $g(x) = 9x - 3x^2$ (3/0)
10. The rate at which the number of bees in a bee colony increase per week is shown in the figure. The area under the graph can be calculated with an integral. Interpret the significance of the value of the integral. (0/2)



11.



The cooling down in the kiln at Bessemer secondary school can be represented by the differential equation $\frac{dy}{dt} + 0.12y = 2.4$

where y is the temperature in degrees Celsius and t is the time in hours.

- a) Show that $y = 900 \cdot e^{-0.12t} + 20$ is a solution to $\frac{dy}{dt} + 0.12y = 2.4$ (2/0)

The temperature of the kiln was 920°C when it was turned off at 4:00 pm. One can remove the pottery from the kiln when the temperature has decreased to about 100°C .

- b) How long does it take for the temperature in the kiln to decrease to 100°C ? (2/0)

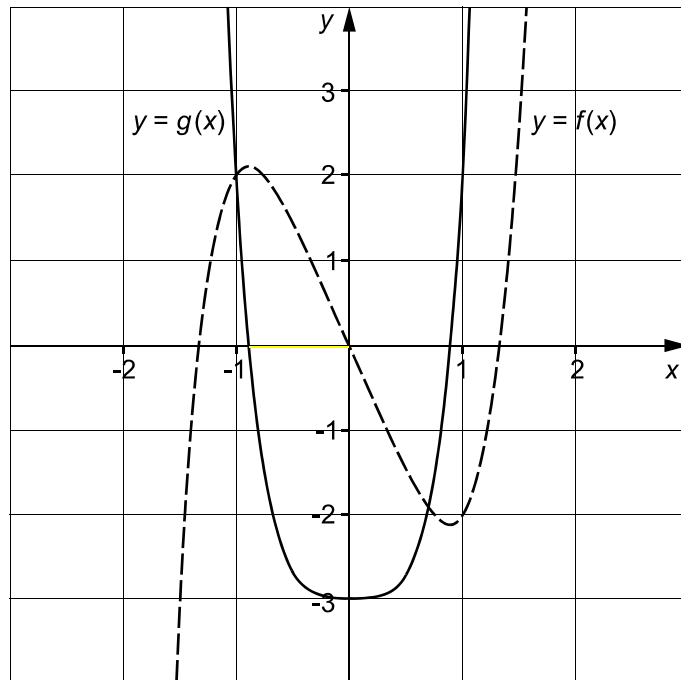
12. Let $p = \cos x + \sin x$ and $q = \cos x - \sin x$

Show that the value of the expression $(p+q)^2 + (p-q)^2$ is independent of the value of x . (0/2)

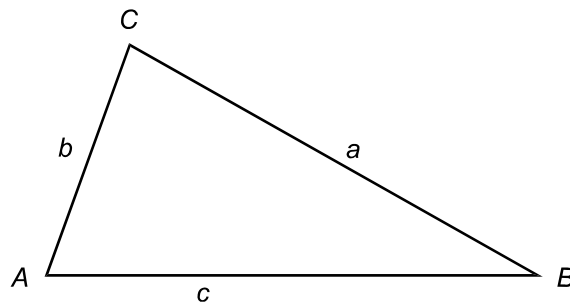
13. The graph of a function and its derivative are represented in the figure below.

Evaluate $\int_0^1 g(x) dx$

(0/2)



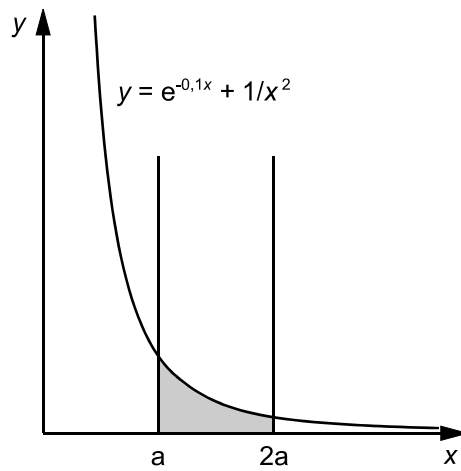
14. The angles A and B are acute in the triangle ABC .



Show, without using the Law of Sines, that $b \sin A = a \sin B$

(0/2/□)

15.



The shaded region in the figure is bounded by the curve

$y = e^{-0.1x} + \frac{1}{x^2}$ and the x -axis as well as the lines $x = a$ and $x = 2a$, where $a > 0$

Determine at which value of a the area of the region has a local maximum.
Answer to two significant figures.

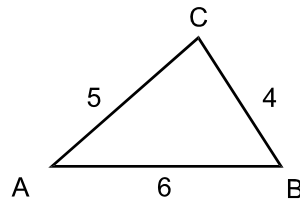
(1/2)

When assessing your work with this problem the teacher will consider the following:

- How well you account your work
- How systematic you are in your investigation
- How well you support your results
- How well you use mathematical language

16. *Solving* a triangle means finding all the angles and sides in the triangle. In order to solve a triangle one must have sufficient information about the triangle's sides and angles.

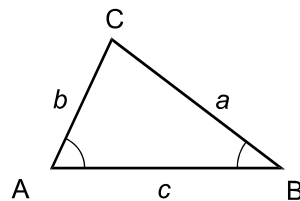
- All the sides are known in the triangle below. Solve the triangle.



- In another triangle the angles A and B are known.

What else must you know in order to solve the triangle?

Using words, describe what you would do to solve the triangle.



- In the first case you know all the sides and can solve the triangle. In the second case you know two angles and can solve the triangle by adding information.

Which other cases can occur?

Describe how you can solve the triangle in these cases.

(3/4/0)

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbyggnad samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 5, 7, 10, 11b och 12-16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 6, 7, 9, 11, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 5, 9, 12, 14 och 15 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 4, 6, 7, 13, 15 och 16 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng

För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

- 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
- 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

- 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
- 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
- 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
- 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning

Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

- 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
- 7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
- 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
- 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (⊠) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

| | |
|-------------------------------------------------|------|
| Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation | + 1g |
| med korrekt svar | + 1g |

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av december 2013.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2003)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Del I | | |
| 1. | Korrekt svar (36°) | Max 1/0 +1 g |
| 2. | Korrekt primitiv funktion med korrekt svar (12) | Max 2/0 +1 g +1 g |
| 3. | a) Korrekt svar (0,6) b) Korrekt svar ($-0,6$) | Max 2/0 +1 g +1 g |
| 4. | Korrekt ansats, t ex tecknat ekvationen $\frac{ab \sin C}{2} = \frac{ab}{4}$ med en vinkel korrekt bestämd med ytterligare en vinkel korrekt bestämd (30° , 150°) | Max 3/0 +1 g +1 g +1 g |
| 5. | Godtagbar ansats, t ex tar en punkt från kurvan och sätter in i funktionen Fullföljer metoden på godtagbart sätt med korrekt värde på a (3) | Max 1/1 +1 g +1 vg |
| 6. | a) Godtagbart visat extrempunktens karaktär (maximipunkt) b) Redovisad godtagbar lösning $\left(f(x) = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{5}{4} \right)$ | Max 1/2 +1 g +1-2 vg |
| 7. | Korrekt bestämning av y' i övrigt redovisad godtagbar lösning (-2) | Max 0/2 +1 vg +1 vg |

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Del II | | |
| 8. | Redovisad godtagbar lösning ($F(x) = 2x^3 - 7x + 2$) | Max 2/0 +1-2 g |
| 9. | Redovisad godtagbar ansats, t ex bestämt integrationsgränserna med grafräknare. med korrekt tecknad integral med korrekt svar (8 a.e.) | Max 3/0 +1 g +1 g +1 g |
| 10. | Redovisad godtagbar förklaring, t ex integralens värde anger den totala ökningen av antalet bin under 24 veckor Exempel på bedömd elevlösning redovisas nedan: <i>Värdet anger antalet bin som finns i bisamhället.</i> (1 vg) Kommentar: Elevens tolkning innefattar antalet bin, vilket kan anses räcka för att erhålla en poäng. | Max 0/2 +1-2 vg |
| 11. | a) Korrekt deriverad funktion ($y' = -108 \cdot e^{-0,12t}$) Visat att funktionen satisfierar differentialekvationen b) Redovisad godtagbar metod med godtagbart svar (20 h) | Max 4/0 +1 g +1 g +1 g +1 g |
| 12. | Redovisad godtagbar metod där ”trigonometriska ettan” används med i övrigt redovisad korrekt lösning | Max 0/2 +1 vg +1 vg |
| 13. | Godtagbar ansats, t ex bestämmer ($f(1)$ och $f(0)$) Godtagbar metod med korrekt svar (-2) | Max 0/2 +1 vg +1 vg |

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 14. | <p>En godtagbar ansats, t ex använder areasatsen på två vinklar med godtagbart slutfört bevis</p> <p>Eleven genomför beviset korrekt och använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk.</p> | <p>Max 0/2/□</p> <p>+1 vg</p> <p>+1 vg</p> <p>□</p> |
| 15. | <p>Godtagbar ansats, t ex tecknat integralen</p> <p>Tecknat arean som funktion av a ($A(a) = 10(e^{-0,1a} - e^{-0,2a}) + \frac{1}{2a}$)</p> <p>med redovisad godtagbar bestämning av a (6,7)</p> | <p>Max 1/2</p> <p>+1 g</p> <p>+1 vg</p> <p>+1 vg</p> |

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

16.

Max 3/4/□

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

| Bedömningen avser | Kvalitativa nivåer | | | Totalpoäng |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| | Lägre | Högre | | |
| Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.</i> <i>Hur fullständig och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i> | Bestämt en vinkel godtagbart. Bestämt alla tre vinklarna godtagbart ($A = 41,4^\circ$, $B = 55,8^\circ$, $C = 82,8^\circ$) 1-2 g | Bestämt alla tre vinklarna godtagbart i punkt ett. Redovisat en möjlig metod för hur övriga sidor och vinklar ska beräknas i fall två. 2 g och 1 vg | | 2/1 |
| Matematiska resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</i> | Talat om att man måste känna till en sida i triangeln i fall två. 1 g | Talat om att man måste känna till en sida i triangeln i punkt två. Beskrivit ett fall som kan förekomma i punkt tre och redovisat hur triangeln kan lösas. 1 g och 1 vg | Talat om att man måste känna till en sida i triangeln i punkt två. I punkt tre beskrivit två fall som kan förekomma och redovisat hur triangeln kan lösas. 1 g och 2 vg | 1/2 |
| Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i> | | | Redovisningen är välstrukturerad, och tydlig. Det matematiska språket är acceptabelt. 1 vg | 0/1 |
| Summa | | | | 3/4 |

Ytterligare fall:

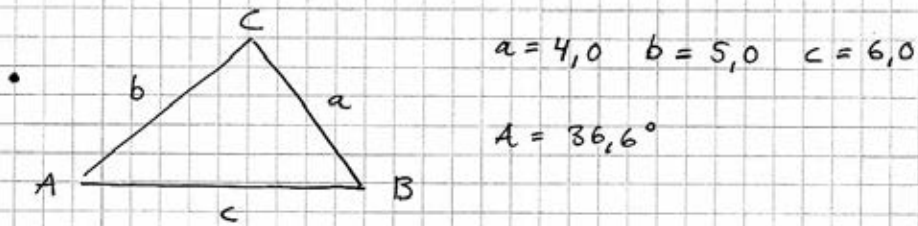
1. två sidor och mellanliggande vinkel är kända
2. två sidor och den vinkel som står mot den mindre av de kända sidorna (ger två lösningar)
3. två sidor och den vinkel som står mot den större av de kända sidorna

Eleven har behandlat andra punkten och dessutom behandlat minst två fall i punkt tre. Lösningen redovisas med klar tankegång där det matematiska språket i huvudsak är korrekt.

□

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)



cosinussatsen ger:

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos A$$

$$16 = 25 + 36 - 60 \cos A$$

$$16 = 61 - 60 \cos A$$

$$76 = 60 \cdot \cos A$$

$$A \approx 36,6^\circ, \quad B \approx 55,0^\circ, \quad C \approx 88,4^\circ$$

$$\text{SVAR: } A = 36,6^\circ \quad B = 55,0^\circ \quad C = 88,4^\circ$$

- SVAR: Jag måste veta någon av sidorna a eller b för att kunna lösa triangeln. Den metod som jag skulle använda är att jag skulle räkna fram de andra sidorna med hjälp av sinussatsen

- SVAR: Om man, till exempel, endast får vinkeln A och sidan a i en triangel så kan man räkna ut de övriga sidorna och vinklarna med hjälp av sinussatsen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

man kan även få ut sidorna i en triangel om man vet tex. sidan a och b och vinkeln C , detta med hjälp av cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Bedömning

| | Kvalitativa nivåer | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|--------------------|--------|--|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Metodval och genomförande | —————→ | | | 0/1 | Solveringen av triangeln i punkt 1 är ej godtagbar. Redovisningen av hur triangeln i punkt 2 kan solveas är godtagbar. |
| Matematiska resonemang | X | —————→ | | 1/0 | |
| Redovisning och matematiskt språk | —————→ | | | 0/0 | |
| Summa | | | | 1/1 | |

Elevlösning 2 (3 g och 4 vg)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cos C$$

$$C = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ba}\right) \Rightarrow C = \arccos\left(\frac{6,0^2 - 5,0^2 - 4,0^2}{-2 \cdot 5,0 \cdot 4,0}\right)$$

$$= \pm 1,445 \text{ rad}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin(1,445)}{6,0} = \frac{\sin A}{4,0}$$

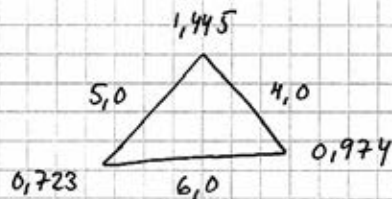
$$A_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\pm 1,445) \cdot 4,0}{6,0}\right) = \pm 0,723$$

$$\left(A_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\sin(\pm 1,445) \cdot 4,0}{6,0}\right) = \pm 2,42 \right) \begin{array}{l} \text{A skall} \\ \text{vara minst} \end{array}$$

$$B = \pi - 0,723 - 1,445 = 0,974$$

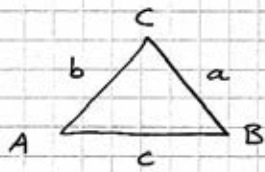
$C = \text{störst}$ $B = \text{mellerst}$ $A = \text{minst}$

$$C = 1,445 \text{ rad} \quad B = 0,974 \text{ rad} \quad A = 0,723 \text{ rad}$$



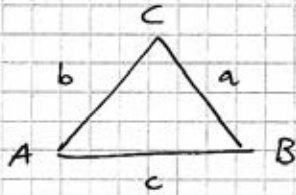
I en triangel ABC där vinklarna A och B är kända behövs en av sidorna a, b eller c kännas till för att lösning skall vara möjlig. Vinkeln C kan räknas ut med tanke på att en triangel alltid har vinkelsumman π rad. När man känner till samtliga vinklar och en sida kan sinussatsen användas för att räkna ut resterande sidor.

En lösning är möjlig då en vinkel med motsatt sida och en annan vinkel eller sida är känd. dvs. tex. A, a känd och b, B, c



eller C är känd. Lösning kan även räknas ut då samtliga sidor är kända utan vinklar, dock är lösning omöjlig (i alla fall med våra kunskaper) då endast vinklar är angivna. Även då vinkel med sina två närliggande sidor kända kan lösning genomföras

Om vinkel med motsatt sida är känd tillsammans med en ytterligare antingen vinkel eller sida kan lösning genomföras med sinussatsen.



då tex. A, b, c ; A, b, a ; A, a, c är kända kan lösning utföras med cosinussatsen. då vinkeln A kan bytas ut mot någon av dom andra.

Bedömning

| | Kvalitativa nivåer | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|--------------------|---|---|------------|--------------|
| | | | | | |
| Metodval och genomförande | — | X | → | 2/1 | |
| Matematiska resonemang | — | | X | 1/2 | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | | X | 0/1 | |
| Summa | | | | 3/4 | |

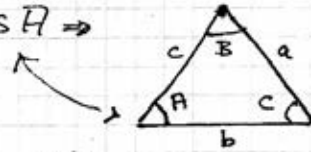
I lösningen av punkt tre blandas de redan kända fallen (enligt punkt 1 och 2) med de ytterligare fall som finns på ett sådant sätt att redovisningen visar brister på klarhet i tankegång.

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och □)

Punkt 1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \Rightarrow$$



$$A = \arccos\left(\frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right)$$

$$A = \arccos\left(\frac{-4^2 - 5^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}\right) = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow A \approx \underline{0,72 \text{ rad}} \quad A \approx \underline{41,4^\circ}$$

$$B = \arccos\left(\frac{-5^2 - 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) = \arccos\left(\frac{9}{16}\right)$$

$$\Rightarrow B \approx \underline{0,97 \text{ rad}} \quad B \approx \underline{55,8^\circ}$$

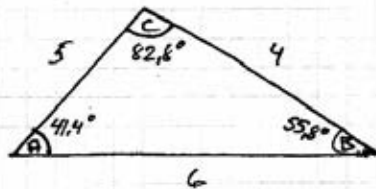
$$C = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow C \approx \underline{1,45 \text{ rad}} \quad C \approx \underline{82,8^\circ}$$

// Kontroll //

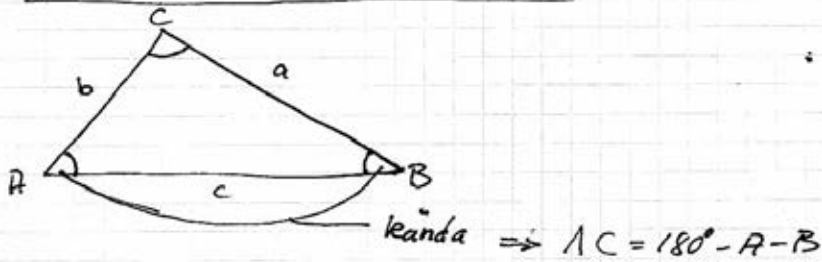
$$0,72 + 0,97 + 1,45 = 3,14$$

$$41,4 + 55,8 + 82,8 = 180$$

Svar:



Punkt 2



Vi har nu alla vinklar, men behöver en sida för att veta hur stor triangeln ska vara.

Med sinussatsen kan vi lösa ut resterande sidor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Om en sida x är känd med motstående vinkel X

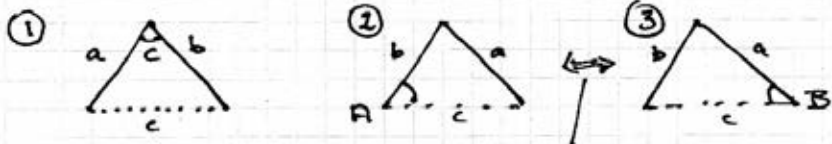
O = okänd sida O = okänd sidas motstående vinkel

$$O = x \cdot \frac{\sin O}{\sin X}$$

Punkt 3, del I

Det finns 6 data att veta, man kan räkna ut alla om man har tre av dem kända (3 vinklar som underlag)

Jag har visat för 3 sidor; 2 vinklar + 1 sida. Det som är kvar är alltså 2 vinklar + 1 vinkel



Samma fell, fast spegelvänt

$$\textcircled{2} = \textcircled{3}$$

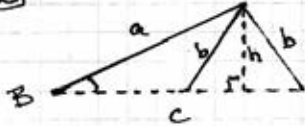
Punkt 3, del II

① cosinussatsen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow$
 $c = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}{c^2}$

Nu vet vi alla sidor och räknar ut vinklarna enligt uppg. 1

① ger 1 lösning

②



$h > b \Rightarrow c$ har ingen reel lösning

$h = b \Rightarrow c$ har 1 lösning

$h < b \Rightarrow c$ har 2 lösningar

Enligt mig är cos-satsen den lättaste vägen. Vi räknar ut vad c blir och räknar sedan som i uppg 1, med det/den svar vi får

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 - (2a \cos B)c + (a^2 - b^2) = 0$$

$$c = a \cos B \pm \sqrt{a^2 \cos^2 B - a^2 + b^2}$$

Bedömning

| | Kvalitativa nivåer | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|--------------------|---|-----|------------|--------------|
| Metodval och genomförande | — | X | → | 2/1 | |
| Matematiska resonemang | — | | X → | 1/2 | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | | X → | 0/1 | |
| Summa | | | | 3/4 | |

Lösningen redovisas med klar tankegång och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

□

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)

T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)

D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

| Kvalitativa nivåer | | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|---|---|--|-------|--------------|
| Metodval och genomförande | — | → | | | |
| Matematiska resonemang | — | → | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | → | | | |
| Summa | | | | | |

| Kvalitativa nivåer | | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|---|---|--|-------|--------------|
| Metodval och genomförande | — | → | | | |
| Matematiska resonemang | — | → | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | → | | | |
| Summa | | | | | |

| Kvalitativa nivåer | | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|---|---|--|-------|--------------|
| Metodval och genomförande | — | → | | | |
| Matematiska resonemang | — | → | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | → | | | |
| Summa | | | | | |

| Kvalitativa nivåer | | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|---|---|--|-------|--------------|
| Metodval och genomförande | — | → | | | |
| Matematiska resonemang | — | → | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | → | | | |
| Summa | | | | | |

| Kvalitativa nivåer | | | | Poäng | Motiveringar |
|-----------------------------------|---|---|--|-------|--------------|
| Metodval och genomförande | — | → | | | |
| Matematiska resonemang | — | → | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | — | → | | | |
| Summa | | | | | |