NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D HÖSTEN 2004

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 16 uppgifter. **Del I** består av 8 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 46 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	13 poäng.
Väl godkänd:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	Utöver kraven för Väl godkänd ska du ha visat *MVG-kvaliteter i minst två* av ¤-uppgifterna. Du ska dessutom ha minst 14 vg-poäng.

Namn: ______________________________ Skola: ______________________________

Komvux/gymnasieprogram: ____

Del I

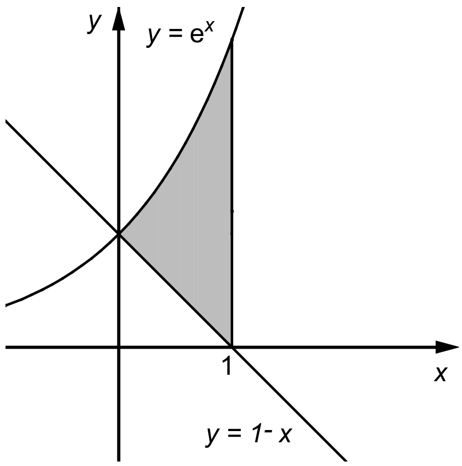
Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $g(x) = (x+1)^{11}$ *Endast svar fordras* (1/0)

2. Bestäm arean av det markerade området i figuren nedan.



(3/0)

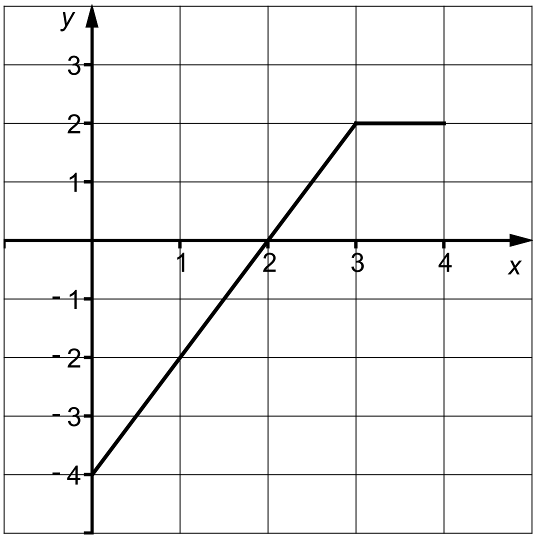
3. v är en vinkel mellan 0° och 90° sådan att $\tan v = \frac{1}{5}$

a) Rita en rätvinklig triangel där en vinkel är v. (1/0)

b) Bestäm $\tan(90^\circ - v)$ (1/0)

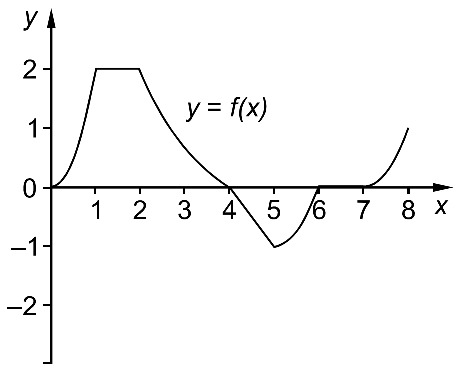
4. Bestäm de två minsta positiva lösningarna till ekvationen $\cos 2x = 0$ (1/1)

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$. Bestäm $\int_0^4 f(x)dx$ (1/1)



6. För vilket värde på x, $0 \le x \le 2\pi$, har funktionen $f(x) = x + 2\cos x$ ett lokalt minimum? (2/1)

7. Funktionen $y = f(x)$ är given genom sin graf i figuren nedan. Vi bildar funktionen $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $0 \le x \le 8$



a) Funktionen A är konstant i ett intervall. Ange detta intervall och motivera ditt svar. (0/2)

b) Avgör för vilket värde på x som funktionen A antar sitt största värde. (0/2/¤)

8. En triangel har sidorna 3 cm, 5 cm och 6 cm. Visa att triangeln är trubbvinklig. (0/1/¤)

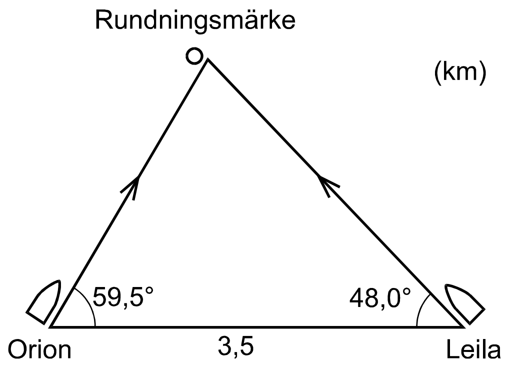
Del II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Bestäm den primitiva funktion F till $f(x) = e^{3x}$ som uppfyller villkoret $F(0) = 1$ (2/0)

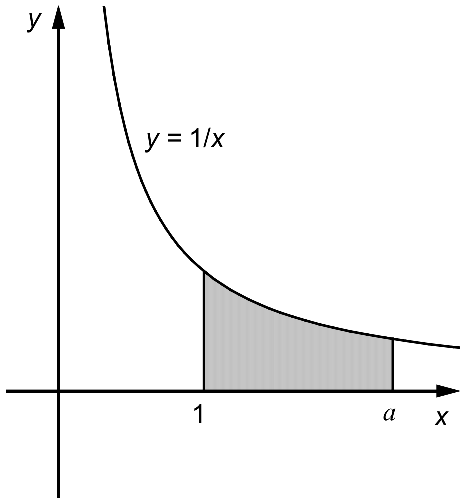
10. Visa att $y = x \cdot \sin x$ är en lösning till differentialekvationen $x \cdot y' - y = x^2 \cdot \cos x$ (2/0)

11. De två segelbåtarna ”Orion” och ”Leila” kappseglar. På grund av olika vägval har de vid ett visst ögonblick hamnat 3,5 km från varandra. Båtarna ska en bit längre bort passera ett rundningsmärke, se figur.



Vilken av segelbåtarna kommer först fram till rundningsmärket om Leilas hastighet är 4,0 knop och Orions 3,2 knop?
(1 knop = 1,852 km/h) (3/0)

12. Bestäm talet *a*, så att arean av det skuggade området blir exakt 1 areaenhet. (Se figur nedan).



(1/1)

13. $\sin^4 15° - \cos^4 15°$ kan bestämmas exakt på följande sätt

$$\sin^4 15° - \cos^4 15° \overset{\overset{\mathbf{1}}{\downarrow}}{=} (\sin^2 15° - \cos^2 15°)(\sin^2 15° + \cos^2 15°) \overset{\overset{\mathbf{2}}{\downarrow}}{=} \sin^2 15° - \cos^2 15° =$$

$$-(\cos^2 15° - \sin^2 15°) \underset{\underset{\mathbf{3}}{\uparrow}}{=} -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Motivera de tre likheter som är markerade. (1/2)

14. Bestäm *a* så att

$$\int_a^{2a} (3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = 14$$

Svara med fyra gällande siffror. (0/2)

15. En känd svensk fysiker, Anders Jonas Ångström, gjorde under några år vid mitten av 1800-talet jämförande studier av luftens temperatur och temperaturen i jorden.

I diagrammet kan man se resultatet av Ångströms försök.

I diagrammet kan man avläsa att skillnaden i luften mellan högsta och lägsta värde är ca $24\,°\mathrm{C}$. På 10 fots djup är skillnaden mellan högsta och lägsta jordtemperatur endast ca $6\,°\mathrm{C}$. Dessutom är tidpunkterna när maximi- och minimitemperaturen inträffar olika för luften respektive jorden.

Om man anpassar en sinusfunktion till mätserien så kan lufttemperaturen y °C beskrivas med

$$y = 5{,}0 + 12\sin(0{,}52x - 2{,}09)$$

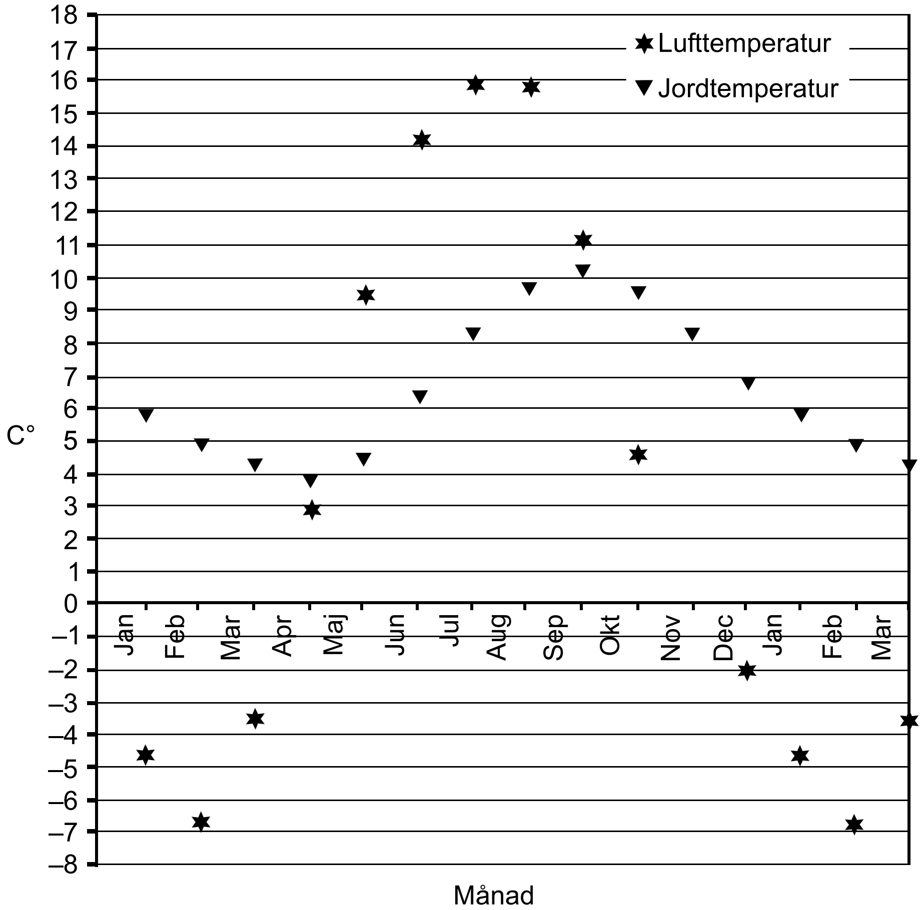
där x är antalet månader räknat från årets början.

a) Bestäm $y'(x)$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) Bestäm $y'(6)$ och beskriv med egna ord vad $y'(6)$ innebär. (1/1)

c) Använd diagrammet för att ställa upp ett samband på formen $y = a + b\sin(kx + d)$ mellan jordtemperaturen y °C och tiden x mån. (0/3)

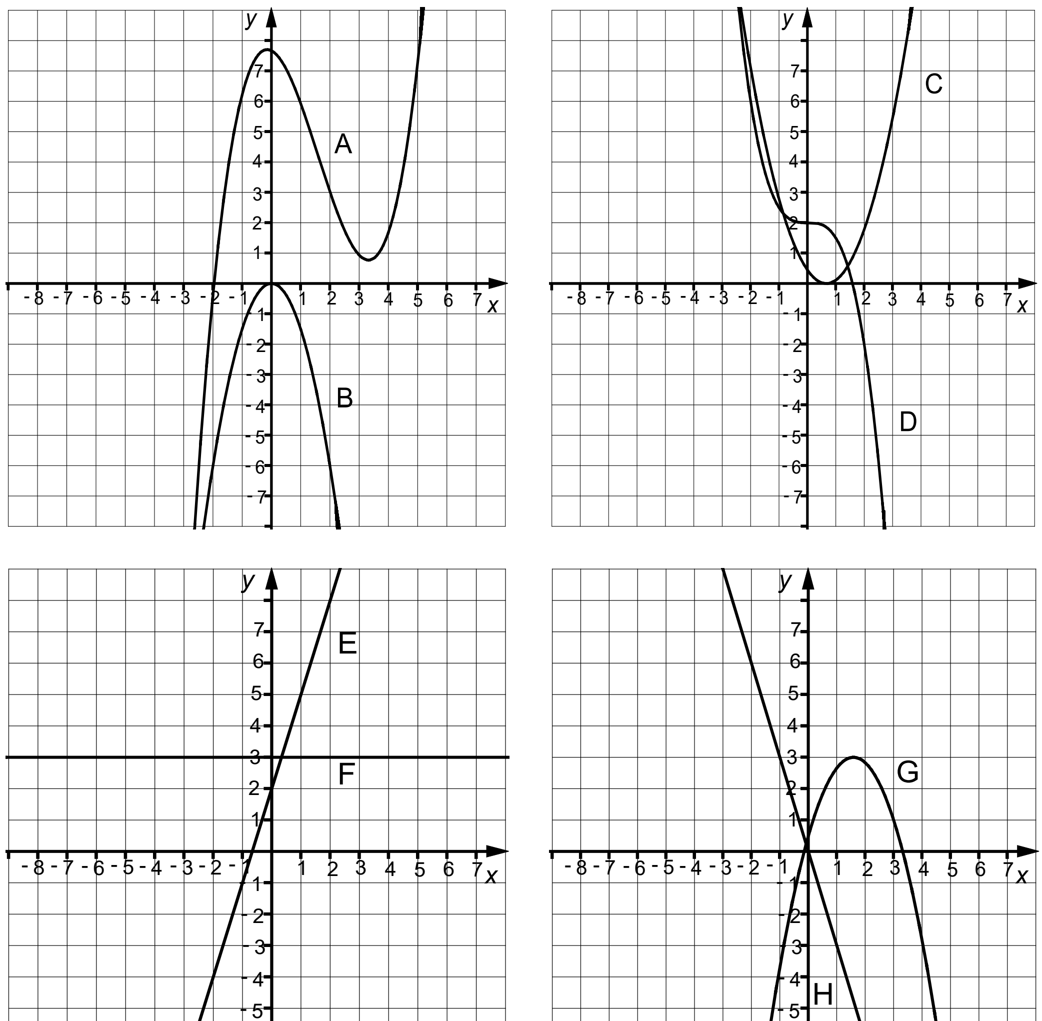
År 1855 publicerar Ångström i *Nova Acta Regiae Societatis Scientiarium Upsaliensis* en stor undersökning över jordtemperaturen. Kungliga Vetenskapssocieteten hade tidigare bekostat ett antal jordtermometrar. 1837 påbörjades mätningar på olika djup. Ursprungligen fanns nio termometrar. De nådde alla upp till markytan, men gick ned till olika djup; den längsta ner till 15 fot. Denna termometer bröts dock redan efter ett par månader på grund av markens tryck. Ytterligare några termometrar gick sönder, men man fick i alla fall sammanhängande mätserier på olika djup under sammanlagt åtta år.



Månadsvisa medelvärden för tiden 1838-1845 av lufttemperaturen (✱)samt jordtemperaturen (▼) på ett djup av 10 fot.

Vid bedömningen av din lösning tar läraren hänsyn till:
- hur väl du motiverar dina slutsatser
- hur väl du redovisar ditt arbete
- hur väl du använder det matematiska språket
- hur väl din skiss avspeglar egenskaper hos derivatans graf

16. Nedanstående grafer hör till polynomfunktioner med högst gradtalet tre.

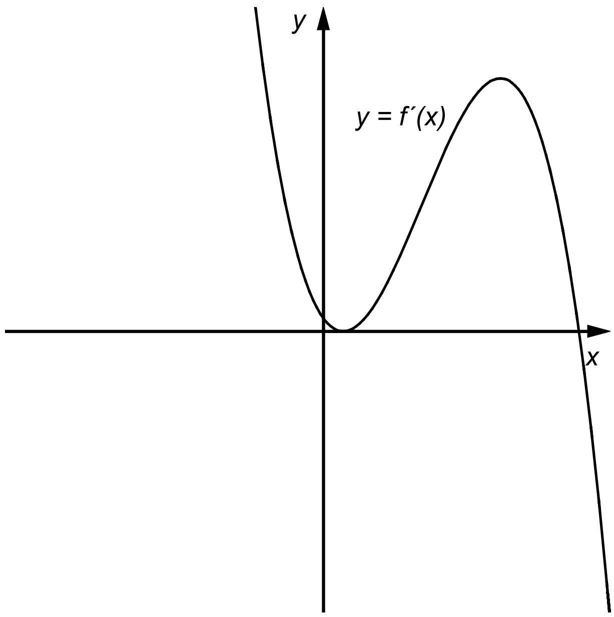


- Hitta två grafer i figurerna ovan där den ena grafen är derivatan till den andra. Ange vilken graf som visar funktionen respektive derivatan samt förklara hur du ser sambandet.
Grafer som hör ihop behöver *inte* finnas i samma koordinatsystem.

- Upprepa uppgiften ovan och bestäm alla ytterligare grafpar som det går att hitta.

- Bland graferna ovan finns en trippel bestående av funktion, derivata och andraderivata. Hitta dessa tre grafer och ange vilken som visar funktionen, derivatan respektive andraderivatan.

- Figuren nedan visar grafen till en funktions derivata. Rita en skiss över hur motsvarande funktionsgraf kan se ut. Förklara hur du har kommit fram till grafens utseende.



- Kunde din graf sett annorlunda ut? Motivera. (2/5/¤)

Innehåll Sid nr

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 7, 8, 11, 13, 14, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 2, 3, 6, 7, 8, 10, 13, 15b,c och 16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 3, 4, 5, 6, 8, 11, 14, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 4, 8, 11, 13, 15c och 16 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 7, 8, 14, 15 och 16 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2004 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1a	1	0									x							x														
1b	1	0									x							x														
2	3	0													x	x		x	x	x												
3a	1	0								x								x														
3b	1	0								x								x														
4	1	1					x											x	x	x		x										
5	1	1														x	x	x	x			x		x								
6	2	1			x		x				x	x						x	x	x			x	x								
7a	0	2														x						x	x	x	x							
7b	0	2	¤		x											x						x	x	x	x				x			
8	0	1	¤				x			x								x				x	x	x					x	x		
9	2	0													x			x		x												
10	2	0									x			x				x		x	x											
11	3	0								x								x	x	x												
12	1	1													x	x		x		x		x		x		x						
13	1	2			x				x										x		x		x	x								
14	0	2											x		x							x	x	x								
15a	1	0									x							x		x												
15b	1	1			x			x											x	x				x								
15c	0	3	¤					x														x		x		x			x			
16	2	5	¤		x						x	x			x	x			x		x	x	x	x	x	x		x	x	x		
Σ	24	22		3/1			8/8				13/13																					

Kravgränser
Detta prov kan ge maximalt 46 poäng, varav 24 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	13 poäng.
Väl godkänd:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	Utöver kraven för Väl godkänd ska eleven ha visat *MVG-kvaliteter i minst två* av ¤-uppgifterna. Eleven ska dessutom ha minst 14 vg-poäng.

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2004)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I			
1.			**Max 2/0**
	a)	Korrekt svar ($3\cos 3x$)	+1 g
	b)	Korrekt svar ($11(x+1)^{10}$)	+1 g
2.			**Max 3/0**
		Godtagbar ansats, t ex korrekt tecknad integral för bestämning arean	+1 g
		med korrekt primitiv funktion	+1 g
		med korrekt svar ($(\mathrm{e}-1{,}5)$)	+1 g
3.			**Max 2/0**
	a)	Ritat en godtagbar figur	+1 g
	b)	Korrekt bestämning av det sökta värdet (5)	+1 g
4.			**Max 1/1**
		Godtagbar bestämning av en lösning	+1 g
		Godtagbar bestämning av ytterligare en lösning ($45°, 135°$)	+1 vg
5.			**Max 1/1**
		Godtagbar ansats, t ex genom areaberäkningar i figuren	+1 g
		med korrekt bestämning av integralens värde (-1)	+1 vg
6.			**Max 2/1**
		Korrekt derivering, $f'(x) = 1 - 2\sin x$	+1 g
		med godtagbar bestämning av derivatans nollställen,	+1 g
		med godtagbar motivering och korrekt svar $\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
7.		Max 0/4/¤
a)	Godtagbart givet intervall	+1 vg
	med godtagbar motivering (Funktionen A är konstant då $f(x)=0$ dvs. för $6 \le x \le 7$)	+1 vg
b)	Korrekt svar ($x = 4$)	+1 vg
	med godtagbar motivering att A har ett lokalt maximum då $x = 4$	+1 vg
	Eleven motiverar att A har sitt största värde för $x = 4$ genom att notera att $\int_4^8 f(t)\,\mathrm{d}t < 0$	¤

Exempel på elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning (2 vg)

b)
Det största värdet på $A(x)$ är $x = 4$, eftersom derivatan hela tiden är positiv mellan 0 och 4.
Alltså $A(x)$ stiger hela tiden uppåt.

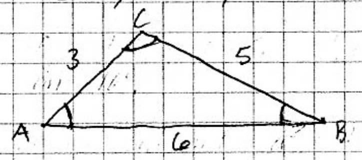
Kommentar: Eleven har angett korrekt svar men i motiveringen har eleven inte tagit hänsyn till hela intervallet, d.v.s. resonemanget är ofullständigt.

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
8.		**Max 0/1/¤**
	Godtagbar ansats, t ex tecknat cosinussatsen för att beräkna den största vinkeln	+1 vg
	Eleven genomför beviset på ett godtagbart sätt	¤

Exempel på elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning (1 vg och ¤)

3cm, 5cm, 6cm



Om en vinkel är större än 90° så är triangeln trubbvinklig.

Cosinussatsen, om cos A är mindre än noll så är vinkeln A större än 90°.

A: $5^2 = 3^2 + 6^2 - 2(3)(6)\cos A$

$25 = 9 + 36 - 36\cos A$

$25 = 45 - 36\cos A$

$20 = 36\cos A$

$\cos A = \frac{20}{36}$

$\cos A = \frac{5}{9}$ $\quad \frac{5}{9} > 0$ $\quad$ A är inte trubbig

C: $6^2 = 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\cos C$

$36 = 25 + 9 - 30\cos C$

$36 = 34 - 30\cos C$

$\cos C = \frac{-2}{30}$

$\cos C = \frac{-1}{15}$ $\quad \frac{-1}{15} < 0 \Rightarrow$ Vinkeln C är trubbig. VSV

Kommentar: Eleven har med det inledande resonemanget visat på MVG-kvaliteter. Beviset är utfört på ett godtagbart sätt och kan därför anses vara just över gränsen till ¤.

Del II

9.		**Max 2/0**
	Redovisad godtagbar lösning ($F(x) = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{3}$)	+1-2 g

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
10.			**Max 2/0**
		Korrekt derivering ($y' = \sin x + x \cdot \cos x$)	+1 g
		med korrekt genomförd verifiering	+1 g
11.			**Max 3/0**
		Godtagbar ansats, t ex korrekt insättning i sinussatsen	+1 g
		med i övrigt godtagbar lösning (Leila)	+1-2 g
12.			**Max 1/1**
		Godtagbar ansats, t ex ställt upp $\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$	+1 g
		med i övrigt korrekt lösning ($a = \mathrm{e}$)	+1 vg
13.			**Max 1/2**
		Godtagbar motivering för en av likheterna	+1 g
		Godtagbara motiveringar för ytterligare två likheter	+1-2 vg
		(1: konjugatregeln, 2: ”trig. ettan”, 3: ”cosinus för dubbla vinkeln”)	
14.			**Max 0/2**
		Förenklat ekvationen till $7a^3 + 3a^2 = 14$	+1 vg
		med redovisad godtagbar bestämning av a ($a \approx 1{,}132$)	+1 vg
15.			**Max 2/4**
	a)	Korrekt bestämning av y' $\left(y' = 6{,}24\cos(0{,}52x - 2{,}09)\right)$	+1 g
	b)	Godtagbart värde på $y'(6)$, (3,2)	+1 g
		med godtagbar tolkning	
		(efter 6 månader ökar temperaturen i luften med 3,2 °C/månad)	+1 vg
	c)	Godtagbar bestämning av två parametrar	+1 vg
		Godtagbar bestämning av de övriga parametrarna	+1-2 vg
		(Avläsning direkt ur figur $y = 7 - 3\sin\left(\frac{2\pi x}{12}\right)$ eller genom regression	
		t ex $y = 7 + 3\sin(0{,}55x + 2{,}82)$)	

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

16. **Max 2/5/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständig och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven anger ett korrekt grafpar med någon motivering. **1 g**	Eleven anger minst två korrekta grafpar och ger godtagbara motiveringar. $(E' = F,\ D' = B$ och $B' = H)$ **1 g och 1 vg**	Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att med motivering ange de tre möjliga grafpar och rätt kombination av f, f' och f'' $(D - B - H)$ **1 g och 2 vg**	**1/2**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Eleven använder derivatans tecken korrekt i sina resonemang. **1 g**	Eleven för ett resonemang som leder till att läget hos den sökta funktionens (fjärde punkten) max- och terrasspunkt kan beskrivas **1 g och 1vg**	Eleven anger hur funktionsgrafen (femte punkten) kan förskjutas. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är lätt att följa och omfattar minst tre av punkterna. Det matematiska språket är acceptabelt **1 vg**	**0/1**
Summa				**2/5**

Var och en av de nedanstående punkterna beskriver hur eleven kan visa olika MVG-kvaliteter i sitt arbete med denna uppgift:

- Eleven motiverar varför kurvformen bestäms av derivatan.
- Eleven använder i sin redovisning det faktum att gradtalet sjunker ett steg vid derivering, för att systematisera sin undersökning.
- Eleven använder ett i huvudsak korrekt matematiskt språk och inkluderar relevant terminologi.
- Eleven undersöker systematiskt alla graferna och utvecklar problemet genom att döma ut de grafer som saknar samband med de övriga. ¤

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16.

Elevlösning 1 (2 g och 1 vg)

Grafen E är rätlinjig och har ekvationen $y = kx + m$
Jag avläste två punkter förratt bestämma k
k-värde: (0, 2) och (1, 5)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{1-0} = 3$$

Ur grafen avläses alltså $k = 3$ och $m = 2$ det ger ekvationen $y = 3x + 2$. Derivatan för denna ekvation blir $y' = 3$. Grafen F passar in som derivata till E eftersom F har ekvationen $y = 3$. F är derivata till ekvationen E.

grafen A har en maxpunkt vid $x \approx -0{,}1$ där är derivatan 0 och andraderivatan negativ (eftersom det är en maxpunkt). Grafen G har $y(-0{,}1) = 0$. Därav kan G vara derivata till funktionen A. Grafen A har en minpunkt vid $x \approx 3{,}3$ där är derivatan 0 och andraderivatan positiv (eftersom det är en minpunkt). Grafen G har $y(3{,}3) = 0$, alltså stämmer grafen G in som derivata för grafen A vid $x \approx -0{,}1$ och $x \approx 3{,}3$. Mellan $x = 1$ och $x = 2$ i grafen A kan man se att lutningen (derivatan) måste vara negativ men mellan $x = 1$ och $x = 2$ är G positiv. alltså kan G inte vara derivata till A.

Grafen B har en maxpunkt vid $x = 0$, där är derivatan 0. grafen H är noll för $x = 0$. Grafen D har en terasspunkt vid $x = 0$, där är derivatan 0 och andra derivatan 0. Grafen B är 0 när $x = 0$

För $x<0$ i grafen D är derivatan negativ eftersom funktionen D då avtar. funktionen B är negativ för alla $x<0$. För $x>0$ i grafen D är derivatan negativ eftersom funktionen D avtar. Funktionen B är negativ för alla $x>0$. B kan rimligtvis vara derivatan till funktionen D.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/1	Eleven anger två korrekta grafpar med godtagbara motiveringar.
Matematiska resonemang	X	1/0	Godtagbara resonemang om derivatans tecken.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/0	Ej tillräcklig omfattning på lösningen.
Summa		**2/1**	

Elevlösning 2 (2g och 5 vg)

E o F   E är f(x) o F är f'(x)

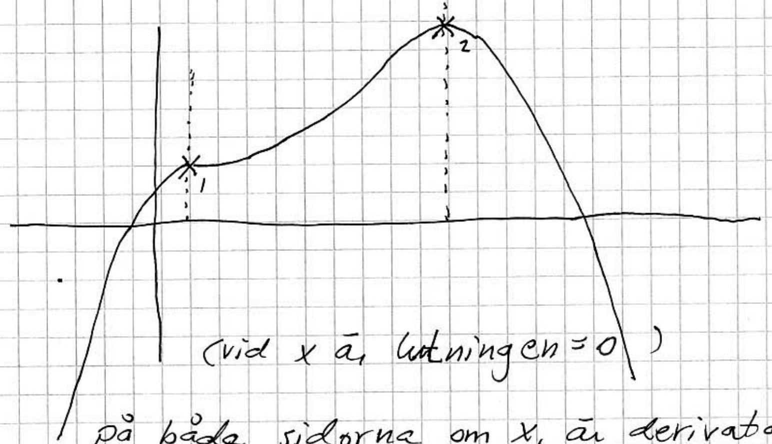
E lutar med k = 3 konstant o F har värdet 3 konstant

B o D   B är derivatan till D

D är hela tiden på väg neråt o B är konstant negativ, dessutom sammanfaller D's terasspunkt med B's nollställe

H är derivatan till B, H skär igenom origo och B lutningen 0 vid 0

funktionen = 0
f'(x) = B
f''(x) = H
} utläses från ovan ↑



på båda sidorna om x_1 är derivatan positiv det måste alltså vara en terrasspunkt, x_2's derivata är först positiv sedan negativ det är alltså en max punkt

Den skulle kunna flyttas uppåt o nedåt

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/2	.
Matematiska resonemang	X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/5**	

Kommentar: Elevens lösning saknar motivering för sista punkten. Det matematiska språket kan anses vara acceptabelt.

Elevlösning 3 (2 g och 5 vg och ¤)

Grafen E visar funktionen och grafen F visar derivatan
Grafen F har funktionen $y = 3$ (enheter på y-axeln)
Grafen E har funktionen $y = 3x + 2$
Derivatan av E $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y' = 3}}$

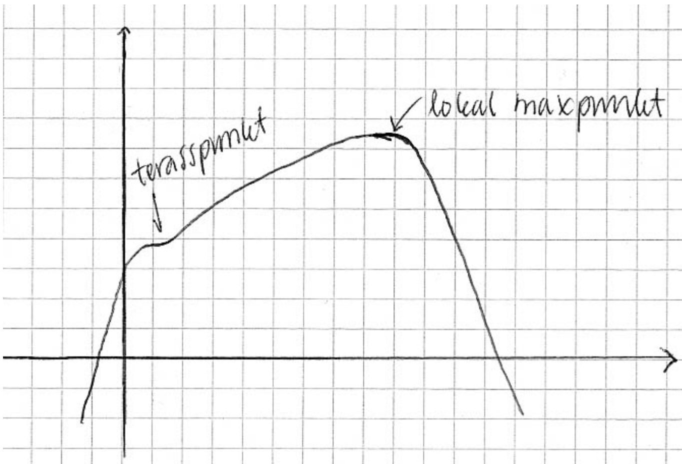
E kan inte vara derivatan för då måste funktionen
ha ett negativt k-värde vid vissa x-värden.

Grafen D visar funktionen och B visar dess derivata.
Derivatan för D är alltid negativ förutom vid $x = 0$
Teckenväxlingen kring $x = 0$ för D är $- 0 -$. Alla y-värden
för B är negativa förutom $x = 0 \Rightarrow - 0 -$.

B visar en funktion och H visar dess derivata.
B har positiv lutning tills $x = 0$, $x > 0$ så är lutningen negativ.
y-värdet på H visar derivata för B.
Den är negativ för $x < 0$ och positiv för $x > 0$.

D visar funktionen, B visar derivatan, H visar
andraderivatan. Samband mellan D-B ovan ⇑

⇒



Derivatan är positiv men har en lokal extrempunkt med tecken-växlingen + 0 + till höger om y-axeln.
Vid ett högre x-värde får funktionen negativ lutning.

Min graf kunde ha sett annorlunda ut eftersom derivatan endast ger information om lutningen på grafen och var lokala extrempunkter finns och vilken typ av extrempunkt det är. Man får inte veta något om max eller minvärden. Mina lokala extrempunkter kunde ha befinnit sig högre upp på y-axeln.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/2	.
Matematiska resonemang	X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/5**	

Kommentar: Elevens lösning uppvisar MVG-kvalitet. Redovisningen är tydlig och välstrukturerad och eleven använder ett i huvudsak korrekt matematiskt språk och inkluderar relevant terminologi. Eleven motiverar varför kurvformen bestäms av derivatan. ¤

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			