# NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D HÖSTEN 2005

## Anvisningar

| | |
|---|---|
| Provtid | 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I. |
| Hjälpmedel | **Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C och D”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.*<br>**Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C och D”. |
| Provmaterialet | Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.<br>Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.<br>*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.* |
| Provet | Provet består av totalt 18 uppgifter. **Del I** består av 9 uppgifter och **Del II** av 9 uppgifter.<br>Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.<br>Uppgift 18 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.<br>Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning. |
| Poäng och betygsgränser | Provet ger maximalt 43 poäng.<br>Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.<br>Undre gräns för provbetyget<br>Godkänd: 12 poäng.<br>Väl godkänd: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng.<br>Mycket väl godkänd: 25 poäng varav minst 13 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de ¤-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa. |

# Del I

**Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.**
**Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.**

**1.** Bestäm en primitiv funktion $F$ till $f(x)=8x^3-2x$ *Endast svar fordras* (1/0)

**2.** Bestäm $\sin\dfrac{7\pi}{2}$ *Endast svar fordras* (1/0)

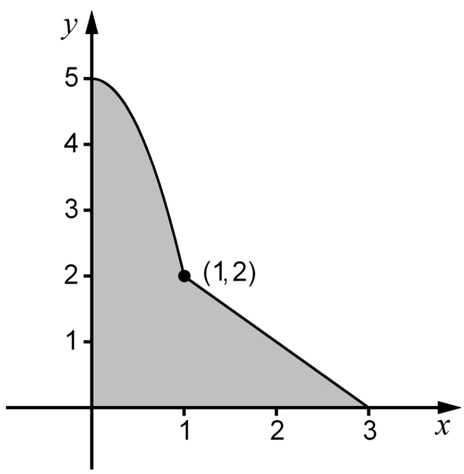
**3.** Derivera

a) $f(x)=4\sqrt{x}$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $g(x)=(2x+1)^5$ *Endast svar fordras* (1/0)

**4.** Bestäm $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ då $f(x)=x-2\cos x$ (2/0)

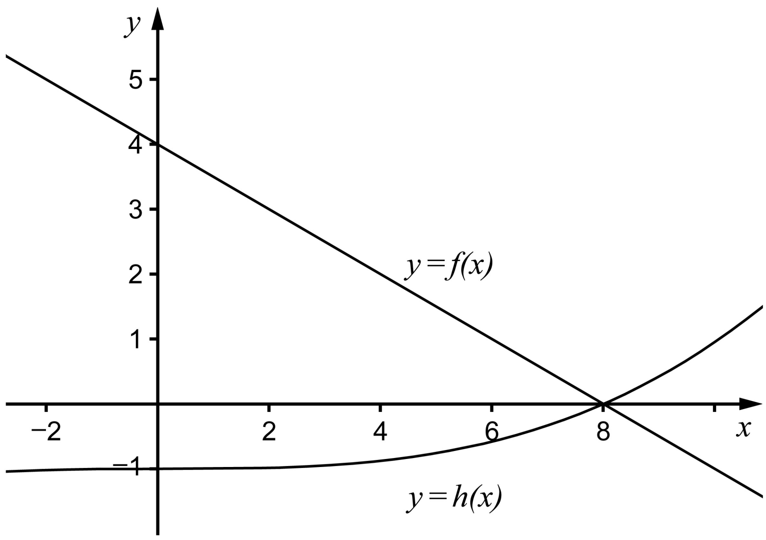
**5.** Figuren visar ett område som begränsas av $y=5-3x^2$, $y=3-x$ och de positiva koordinataxlarna. Bestäm områdets area exakt. (2/0)



**6.** Bestäm $f(x)$ då $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ , $x > 0$ och $f(1) = 2$ (2/0)

**7.** Bestäm $\cos v$ då $\sin v = \frac{\sqrt{45}}{7}$ och $90^\circ < v < 180^\circ$ (0/2)

**8.** Det område i figuren som begränsas av linjen $y = f(x)$, kurvan $y = h(x)$ och $y$-axeln har arean $\frac{65}{3}$ a.e.

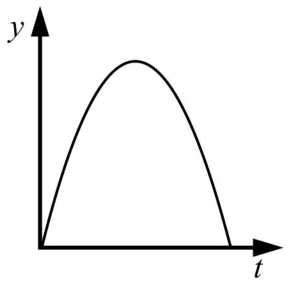



Bestäm värdet av integralerna:

a) $\int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x$ (1/0)

b) $\int_0^8 h(x)\,\mathrm{d}x$ (0/2)

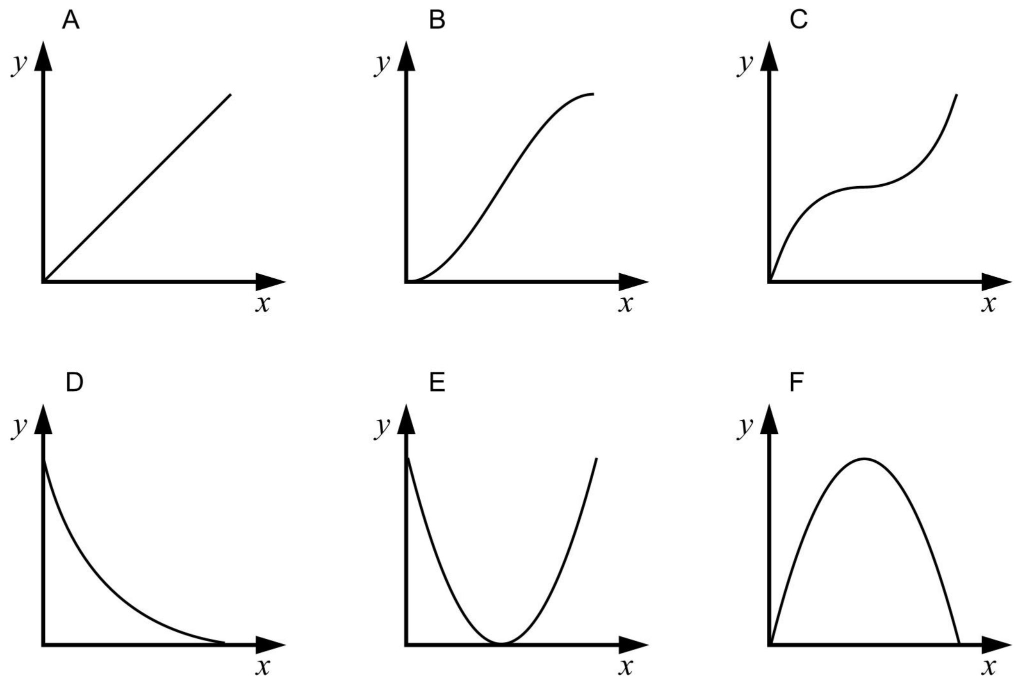
**9.** Grafen till funktionen $f$ visas i figuren nedan.




a) Vilken av graferna A – F nedan visar funktionen $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$?

*Endast svar fordras* (0/1)

b) Motivera ditt svar. (0/1/¤)

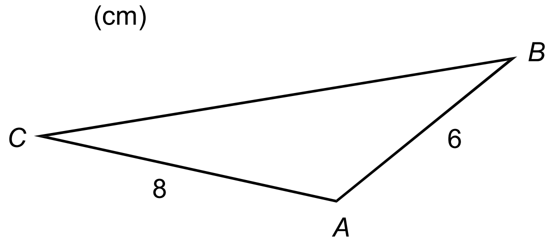


# Del II

**Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.**

**10.** En trigonometrisk kurva har amplituden 3 och perioden $\pi$.
Ange en ekvation för en sådan kurva. *Endast svar fordras* (2/0)

**11.**




I triangeln $ABC$ ovan är vinkeln $CAB$ trubbig. Triangelns area är $12\,\text{cm}^2$,
$AB = 6\,\text{cm}$ och $AC = 8$ cm. Beräkna vinkeln $CAB$. (2/0)

**12.** Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos 2x = 0{,}78$ (2/1)

**13.** Ett område begränsas av kurvorna $y = e^{0{,}2x}$ och $y = 6x - x^2 + 1$

Teckna ett integraluttryck för arean av detta område och bestäm ett närmevärde till denna area med minst 3 värdesiffror. (1/2)

**14.**

Antalet bin i ett bisamhälle efter $t$ veckor betecknas $n(t)$. Från början är antalet bin 5000. Biodlaren tecknar uttrycket $5000 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$

a) Vad betyder den andra termen i uttrycket? (0/1)

b) Vad betyder hela uttrycket? (0/1)

**15.** En badtunna innehåller 3000 liter vatten. En läcka gör att vatten rinner ut med hastigheten $y$ liter/min. Det gäller att $y = 22\mathrm{e}^{-0{,}011 \cdot t}$ , där $t$ är tiden i minuter efter läckans uppkomst.

Efter hur lång tid är det 2000 liter kvar i badtunnan?

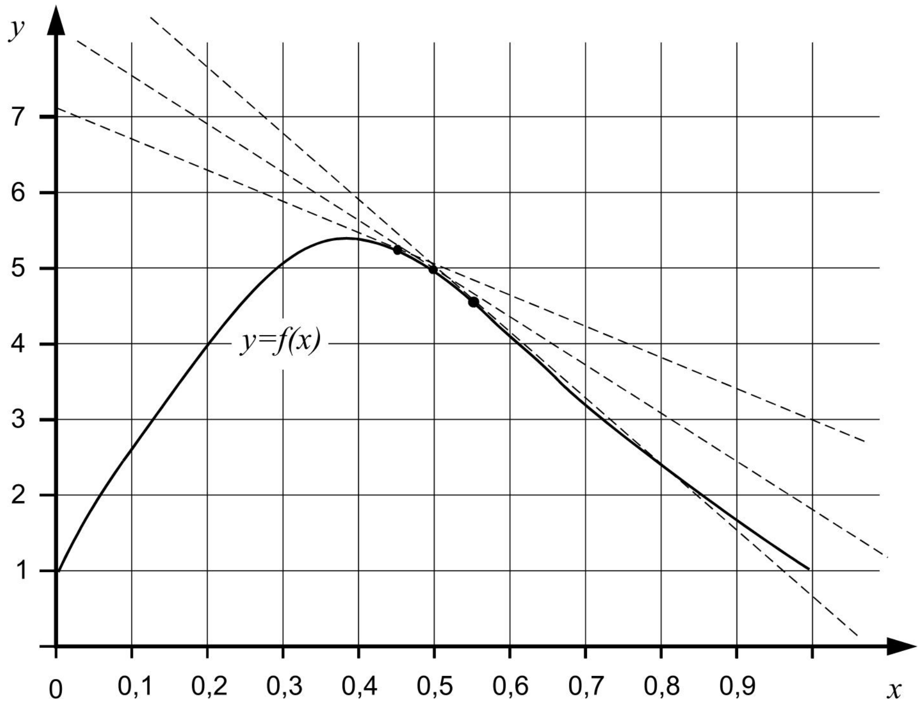
© Norrlandspoolen. Bilden är hämtad från företagets hemsida.

(0/3)

**16.** Bestäm med hjälp av derivata konstanten $a$ så att $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}$ får ett lokalt maximum då $x = 2$ (0/3)

**17.** Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$. I de punkter där $x = 0{,}45$, $x = 0{,}50$ och $x = 0{,}55$ är tangenter ritade. Ekvationerna för tangenterna är givna i tabellen nedan.

Bestäm ett så bra närmevärde som möjligt för $f''(0{,}5)$ (0/2/¤)




| $x$ | Tangentens ekvation |
|---|---|
| 0,45 | $y = -4{,}1x + 7{,}1$ |
| 0,50 | $y = -6{,}3x + 8{,}2$ |
| 0,55 | $y = -8{,}8x + 9{,}4$ |

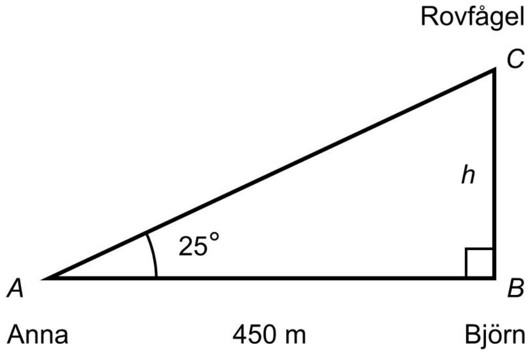
**Vid bedömning av ditt arbete med uppgiften kommer läraren att ta hänsyn till:**
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

**18.** Ett stort antal fåglar omkommer varje år på grund av kollision med högt belägna kraftledningar och andra hinder. Man diskuterar i lokalpressen om ett planerat vindkraftverk utgör en risk för flyttfåglarna.

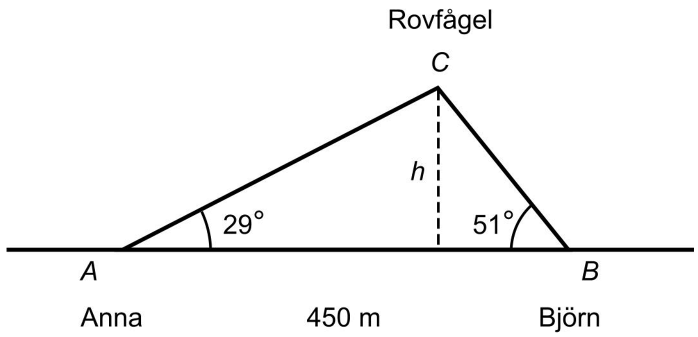
Två elever, Anna och Björn, som bor 450 m från varandra beslutar sig för att försöka bestämma på vilken höjd flyttande rovfåglar flyger.

- Vid ett tillfälle ringer Björn till Anna när han ser att en fågel är på väg. När fågeln befinner sig rakt över Björn observerar Anna fågeln under höjdvinkeln 25°. På vilken höjd *h* flyger denna rovfågel?

*Anna använder en klinometer för att mäta vinkeln.*




- En annan rovfågel passerar mellan Annas och Björns hem. När de ser att fågeln befinner sig rakt ovanför en tänkt linje mellan deras hem mäter de samtidigt den höjdvinkel som de observerar fågeln på. Se figuren nedan. Vinklarna de mäter är $A = 29°$ respektive $B = 51°$. På vilken höjd flyger fågeln?




- De bestämmer sig för att ägna sitt projektarbete åt flyttfågelsproblemet. De vill hitta en formel som direkt ger höjden om man matar in uppmätta värden på vinklarna vid *A* och *B*. Härled en lämplig formel i förenklad form.

- Gäller formeln även om fågeln befinner sig till höger om Björn så att vinkeln *B* är trubbig? Motivera ditt svar.

(3/3/¤)

## Innehåll Sid nr

## Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 8, 9, 14, 16, 17 och 18 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17 och 18. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 6, 8, 9, 15, 16, 17 och 18 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 4, 6, 7, 8, 9, 14, 16 och 17 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 5, 8, 9, 15, 17 och 18 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

## Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2005 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

| | | | | Kunskapsområde | | | | | | | | | | | | | Betygskriterium | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Upp-gift nr | g po-äng | vg po-äng | ¤ | Övr | | | Trigonometri | | | | Diff & integral | | | | | | Godkänd | | | | Väl godkänd | | | | | | Mycket väl godkänd | | | | | |
| | | | | 1 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | x | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 0 | | | | | x | | | | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 3a | 1 | 0 | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 3b | 1 | 0 | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 2 | 0 | | | | | x | | | | x | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | x | x | | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | x | | | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 0 | 2 | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 8a | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 8b | 0 | 2 | | | | | | | | | | | | | | x | x | | | | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 9a | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | x | | | | | | | | | | |
| 9b | 0 | 1 | ¤ | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | x | x | x | | | | x | | | x |
| 10 | 2 | 0 | | | | | | x | | | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 2 | 0 | | | | | | | | x | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 2 | 1 | | | | | | | x | | | | | | | | | x | | x | | x | | x | | | | | | | | |
| 13 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | x | | | x | x | x | x | x | | x | x | x | | | | | | | | |
| 14a | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | x | x | | | | | | | | |
| 14b | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | x | x | | x | | | | | | |
| 15 | 0 | 3 | | | | | | | | | | | | | x | x | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 16 | 0 | 3 | | | x | | | | | | x | | | | | | | | | | | x | x | | x | | | | | | | |
| 17 | 0 | 2 | ¤ | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | x | x | x | | | | x | | | x | x |
| 18 | 3 | 3 | ¤ | | | | x | | x | x | | | | | | | | x | x | x | | x | x | x | x | x | | x | | x | | x |
| Σ | 21 | 22 | | 0/1 | | | 12/7 | | | | 9/14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Kravgränser**
Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 21 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

| | |
|---|---|
| Godkänd: | 12 poäng. |
| Väl godkänd: | 25 poäng varav minst 7 vg-poäng. |
| Mycket väl godkänd: | 25 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter. |

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fem olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

| | Uppgift | | |
|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 9b | 17 | 18 |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | ○ | ○ |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | ○ | | |
| Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang | | | ○ |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | ○ | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | ○ | ○ |

**Allmänna riktlinjer för bedömning**

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)
   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp
   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]
   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg
   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

| | |
|---|---|
| Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation | + 1g |
| med korrekt svar | + 1g |

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

# Bedömningsanvisningar (MaD ht 2005)

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

| Uppg. | | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|---|
| **Del I** | | | |
| **1.** | | | **Max 1/0** |
| | | Korrekt svar ( $F(x)=2x^4-x^2$ ) | +1 g |
| **2.** | | | **Max 1/0** |
| | | Korrekt svar ( $-1$ ) | +1 g |
| **3.** | | | **Max 2/0** |
| | a) | Korrekt svar $\left(f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ | +1 g |
| | b) | Korrekt svar ( $g'(x)=10(2x+1)^4$ ) | +1 g |
| **4.** | | | **Max 2/0** |
| | | Korrekt derivering, $f'(x)=1+2\sin x$ | +1 g |
| | | med korrekt svar (3) | +1 g |
| **5.** | | | **Max 2/0** |
| | | Godtagbar ansats, t ex delar in området i två delområden och bestämmer arean av det ena delområdet korrekt | +1 g |
| | | med korrekt bestämning av den sökta arean (6 a.e.) | +1 g |
| **6.** | | | **Max 2/0** |
| | | Godtagbar bestämning av en primitiv funktion till $f'$, $f(x)=x^2+\ln x$ | +1 g |
| | | med korrekt svar ( $f(x)=x^2+\ln x+1$ ) | +1 g |

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|
| **7.** | | **Max 0/2** |
| | Godtagbar ansats, t ex beräknar $\cos^2 v$ | +1 vg |
| | med korrekt svar $\left(-\frac{2}{7}\right)$ | +1 vg |
| **8.** | | **Max 1/2** |
| a) | Godtagbar lösning med korrekt svar (16) | +1 g |
| b) | Godtagbar lösning | +1 vg |
| | med korrekt svar $\left(-\frac{17}{3}\right)$ | +1 vg |

**Obs.** En lösning som leder till positivt värde på integralen, t ex $\frac{17}{3}$ ger noll poäng på uppgift b).

| | | |
|---|---|---|
| **9.** | | **Max 0/2/¤** |
| a) | Korrekt svar (B) | +1 vg |
| b) | Godtagbar motivering som utesluter minst fyra felaktiga alternativ | +1 vg |

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | analysera och tolka graferna och dra korrekta slutsatser med en motivering som innebär att alternativ B och C skiljs åt. |
| Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | |

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 vg)**

b) Man kan lite krångligt säga att om första funktionen är en derivata är integralen funktionen som derivatan är derivata till.

Då första funktionen - derivatan - ser ut att vara en andragradsfunktion bör integralen vara en tredjegradare Därmed kan alternativen A, D, E & F strykas

"Derivatan" stiger först brant, sedan mindre brant för att sedan vända och falla

Graf B har inget nollställe, vilket funktionens graf bör ha. Därför eliminerar jag svar B och påstår att svar C är rätt

*Kommentar*: Eleven har använt uteslutningsmetoden i sin analys för att ta fram den korrekta grafen men gör en feltolkning i slutet.

**Elevlösning 2 (1 vg och MVG-kvaliteten)**

$g(x)$ är integralen till $f(t)$, dvs arean till $f(t)$.
Grafen B växer lite i början och mycket i mitten. Detta stämmer bra med hur arean ökar på $f(t)$ när $x$ ökar.

*Kommentar*: Eleven har förstått att koppla variationen av ”areaökningen” med den eftersökta kurvans lutning. Slutsatsen är korrekt med godtagbar tolkning. Lösningen visar MVG-kvalitet.

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|
| **Del II** | | |
| **10.** | | **Max 2/0** |
| | Godtagbar trigonometrisk ekvation med korrekt amplitud | +1 g |
| | Godtagbar trigonometrisk ekvation med korrekt period (t ex $y = 3\sin 2x$) | +1 g |
| **11.** | | **Max 2/0** |
| | Godtagbar metod, t ex areasatsen | +1 g |
| | med godtagbart svar ($150°$) | +1 g |
| **12.** | | **Max 2/1** |
| | Godtagbar bestämning av en vinkel, $19{,}4°$ eller $-19{,}4°$ | +1 g |
| | med godtagbar bestämning av ytterligare en vinkel, $19{,}4°$ eller $-19{,}4°$ | +1 g |
| | Godtagbar bestämning av korrekt period, $n \cdot 180°$ | +1 vg |
| **13.** | | **Max 1/2** |
| | Korrekt tecknad integral, $\int (6x - x^2 + 1 - \mathrm{e}^{0,2x})\,\mathrm{d}x$ | +1 g |
| | med godtagbar bestämning av integrationsgränserna, 0 och 5,63 | +1 vg |
| | med godtagbart svar (30,8 a.e.) | +1 vg |
| **14.** | | **Max 0/2** |
| a) | Godtagbart svar (”ökningen av antalet bin under 15 veckor”) | +1 vg |
| b) | Godtagbart svar (”antalet bin i samhället 15 veckor efter starten”) | +1 vg |
| **15.** | | **Max 0/3** |
| | Godtagbar ansats, t ex tecknat ett uttryck för vattnet som läckt ut | +1 vg |
| | med godtagbar bestämning av den sökta tiden (63 min) | +1-2 vg |
| **16.** | | **Max 0/3** |
| | Korrekt derivering av *f*, $f' = 2x \cdot \mathrm{e}^{ax} + ax^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}$ | +1 vg |
| | med korrekt bestämning av $a$ $(-1)$ | +1 vg |
| | med godtagbar verifiering av maximum | +1 vg |

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **17.** | | **Max 0/2/¤** |
| | Godtagbar ansats, t ex bestämmer 1:a derivatan för de aktuella $x$-värdena | +1 vg |
| | Tecknar en ändringskvot för bestämning av $f''(0,5)$ $(-47)$ | +1 vg |

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | formulera och utveckla problem genom att inse att andraderivatan ges av förändringshastigheten hos förstaderivatan.* |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | |
| Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | använda både $f'(0,45)$ och $f'(0,55)$ för att få bästa möjliga värde. |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. |

* Eftersom denna uppgift kräver MVG-kvalitet för sin lösning så kommer godtagbara elevlösningar att ge två vg-poäng och visa MVG-kvaliteter på samma gång.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)**

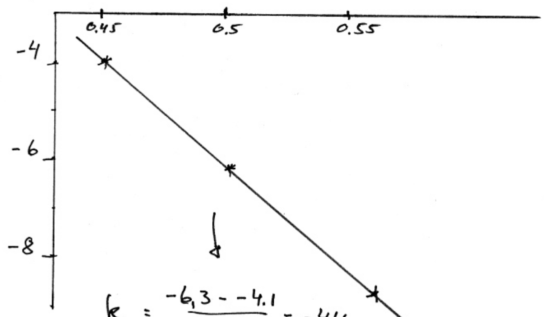
Svar $f''(0.5) \approx -47$

$y = f(x)$

| | | |
|---|---|---|
| $x = 0.45$ | $y = -4,1x + 7,1$ | $y' = -4.1$ |
| $x = 0.5$ | $y = -6,3x + 8,2$ | $y' = -6,3$ |
| $x = 0.55$ | $y = -8,8x + 9,4$ | $y' = -8.8$ |

$y'' = -47$

$y' = -47x + 17,2$




$-6,3 = -47 \cdot 0.5 + m$

$m = 17,2$

$k_1 = \dfrac{-6,3 - -4.1}{0.5 - 0.45} = -44$

$k_2 = \dfrac{-8.8 - -6.3}{0.55 - 0.5} = -50$

$k = -4.7$

*Kommentar*: Eleven utför en korrekt lösning för få bästa möjliga värde, men det brister i det matematiska språket. Kommentarer saknas och uppställningen kan vara tydligare. Lösningen visar MVG-kvaliteter i två av tre möjliga avseenden.

**Elevlösning 2 (2 vg och tre av MVG-kvaliteterna)**

$y_1 = -4{,}1x + 7{,}1 \qquad y_1' = -4{,}1$

$y_2 = -6{,}3x + 8{,}2 \qquad y_2' = -6{,}3$

$y_3 = -8{,}8x + 9{,}4 \qquad y_3' = -8{,}8$

$f''(0{,}5)$ = andraderivatan där $x = 0.5$

Andraderivatan = förändringshastigheten för 1:a derivatan

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{-8{,}8-(-4{,}1)}{0.55-0.45} = \frac{-4{,}7}{0{,}10} = -47$$

eller

$$\left.\begin{aligned} \frac{-8{,}8-(-6{,}3)}{0.55-0.50} &= \frac{-2.5}{0.05} = -50 \\ \frac{-6{,}3-(-4{,}1)}{0{,}50-0{,}45} &= \frac{-2.2}{0{,}05} = -44 \end{aligned}\right\} \frac{-50-44}{2} = -47$$

Svar: $f''(0.5) = -47$

*Kommentar*: Eleven utför en korrekt bestämning av $f''(0{,}5)$. Det matematiska språket är välstrukturerat och tillräckliga förklaringar finns. Lösningen visar MVG-kvaliteter i tre av tre möjliga avseenden.

**Uppg. Bedömningsanvisningar** **Poäng**

**18.** **Max 3/3/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

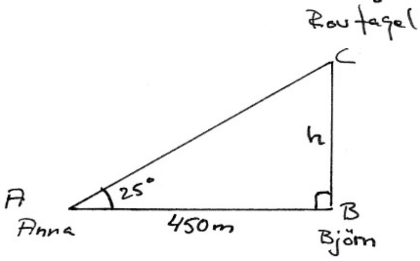
| **Bedömningen avser** | **Kvalitativa nivåer** Lägre → Högre | | | **Total-poäng** |
|---|---|---|---|---|
| **Metodval och genomförande** *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.* | Eleven beräknar höjden i ena fallet (210 m eller 170 m) **1 g** | Eleven beräknar höjden i båda fallen. **2-3 g** | | **3/0** |
| **Matematiska resonemang** *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.* | | Eleven påbörjar en härledning av ett uttryck för höjden då fågeln befinner sig mellan $A$ och $B$. **1 vg** | Eleven härleder ett generellt uttryck för höjden då fågeln befinner sig mellan $A$ och $B$, t ex $\dfrac{450 \sin A \sin B}{\sin(180 - A - B)}$ **2 vg** | **0/2** |
| **Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet** *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.* | | Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. Redovisningen ska omfatta del av tredje punkten. **1 vg** | | **0/1** |
| **Summa** | | | | **3/3** |

**MVG kvaliteterna beskrivs på nästa sida**

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | visa att formeln är densamma även om vinkel *B* är trubbig. |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | |
| Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang | ta fram en formel i *förenklad* form, även om eleven bara visat den när fågeln befinner sig mellan *A* och *B*. ( $h = \dfrac{450 \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin(A+B)}$ ) |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. |

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 18.**

**Elevlösning 1 (3g och 2 vg)**

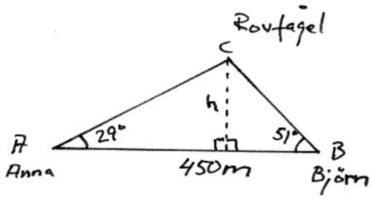



$\Delta C = 180 - (90 + 25) = 65°$

Sinussatsen ; $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$\frac{\sin 25°}{h} = \frac{\sin 65°}{450}$ $h \approx 210$

Svar: Fågeln flög på höjden 210m




$\Delta C = 180° - (29° + 51°) = 100°$

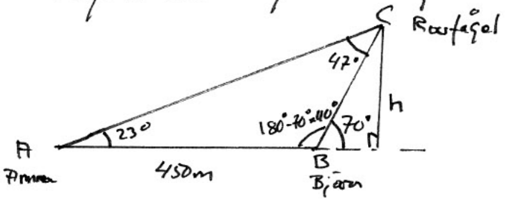
Sinussatsen :

$\frac{\sin 100°}{450} = \frac{\sin 29°}{BC}$ $BC \approx 221{,}53$

$\frac{\sin 90°}{221{,}53} = \frac{\sin 51°}{h}$ $h \approx 170$

Svar: Fågeln befinner sig på höjden 170m

Fågeln till höger om Björn




$\Delta C = 180° - (110° + 23°) = 47°$

sinussatsen

$\frac{\sin 47°}{450} = \frac{\sin 23°}{BC}$ $BC \approx 240{,}4$

$\frac{\sin 90°}{240{,}4} = \frac{\sin 70°}{h}$ $h \approx 230$

$$\frac{\sin 180-(180-70+23)}{450} = \frac{\sin 23}{BC(=a)}$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{BC(=a)} = \frac{\sin 70^\circ}{h}$$

$$\frac{\sin(A+B)}{450} = \frac{\sin A}{BC} \Rightarrow 450 \sin A = BC \sin(A+B)$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{BC} = \frac{\sin B}{h} \Rightarrow h = BC \cdot \sin A$$

$b_a$

Svar: Vinklarna A och B ska mätas

Formel $h = B \sin A$

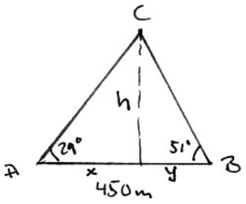
| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | X | 3/0 | |
| Matematiska resonemang | X | 0/1 | Eleven påbörjar en härledning. |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/1 | |
| **Summa** | | **3/2** | |

*Kommentar*: Eleven har beräknat höjden i de två konkreta fallen, men misslyckas med att ta fram en allmän formel. Redovisningen är lätt att följa och förstå.

**Elevlösning 2 (3g och 3 vg och en av MVG-kvaliteterna)**

- $\tan 25° = \frac{h}{450}$

  $\tan 25° \cdot 450 = h \qquad h \simeq 210\text{ m}$

- 


  $\tan 51° = \frac{h}{y} \qquad h = \tan 51° \cdot y$

  $\tan 29° = \frac{h}{x} \qquad h = \tan 29° \cdot x$

  $\tan 51° \cdot y = \tan 29° \cdot x$

  $y = \frac{\tan(29°)\,x}{\tan 51°}$

  $x + y = x \cdot \left(\left(\frac{\tan(29°)}{\tan(51°)}\right) + 1\right)$

  $450 = x \cdot \left(\left(\frac{\tan 29°}{\tan 51°}\right) + 1\right) \quad , \quad x = \frac{450}{\left(\left(\frac{\tan 29°}{\tan 51°}\right) + 1\right)}$

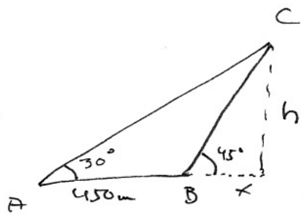
  $\frac{h}{x} = \tan 29° \quad , \quad \tan 29° = \frac{h}{\frac{450}{\left(\frac{\tan 29°}{\tan 51°}\right) + 1}}$

  $h = \frac{\tan 29° \cdot 450}{\left(\frac{\tan 29°}{\tan 51°}\right) + 1}$

  $h \simeq 172\text{ m}$

- Om fågeln flyger mellan dem är formeln.

  $h = \frac{\tan(A) \cdot 450}{\left(\frac{\tan(A)}{\tan(B)}\right) + 1}$




$$\tan 45° = \frac{h}{x}$$

$$\tan 30° = \frac{h}{450+x}$$

$$1 = \frac{h}{x} \qquad x = h$$

$$0{,}57735 \approx \frac{h}{450+x} \qquad x \approx 260 + 0{,}57735x$$

$$0{,}42265x \approx 260$$

$$x \approx \frac{260}{0.42265}$$

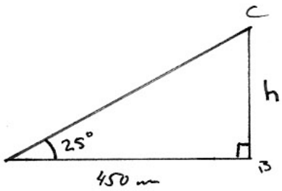
$$x \approx 615\text{m}$$

| Kvalitativa nivåer | | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | X | 3/0 | |
| Matematiska resonemang | X | 0/2 | Eleven har tagit fram en formel för då fågeln befinner sig mellan Anna och Björn. |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/1 | |
| **Summa** | | **3/3** | |

*Kommentar*: Eleven tar fram en formel till då fåglarna flyger mellan Anna och Björn, även om uttrycket skulle kunna skrivas om något mer förenklat. Lösningen motsvarar VG-kvalité vad gäller redovisningen. Elevlösningen visar en MVG-kvalité.

**Elevlösning 3 (3g och 3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)**

•

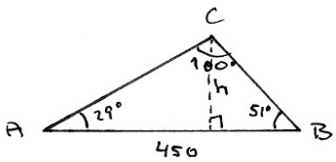



$\tan v = \frac{\text{motst. kat}}{\text{närl. kat}}$

$h = \tan(25°) \cdot 450 \approx 209,8$

Den flög på 209,8m höjd

•




vinkelsumma = 180

$C = 180 - (29+51)$

$C = 100°$

sinussats : $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$

$\frac{\sin 100}{450} = \frac{\sin 29}{a}$

$a \sin 100 = 450 \sin 29$

$a = \frac{450 \sin 29}{\sin 100}$

$a \approx 221.53$

$\sin a = \frac{\text{motstå. katet}}{\text{hypotenusa}}$

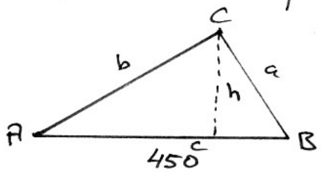
$\sin 51 = \frac{h}{221,53}$

$221,53 \sin 51 = h$

$h = 172,2$

Denna fågel är på 172,2m höjd

Vill hitta en formel som direkt ger höjden.



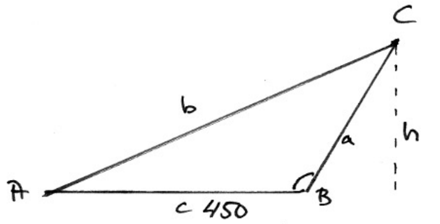

$C = (180 - (A+B))$

$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$a_1 = \frac{450 \sin A}{\sin(180-(A+B))}$

$h_1 = \frac{450 \sin A \cdot \sin B}{\sin(180-(A+B))}$

$\left( \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin(180-(A+B))}{450} \quad \sin v = \frac{\text{motst.}}{\text{hypot.}} \right)$



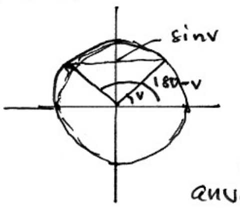

Formel om fågeln till höger om Björn.

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$a_2 = \frac{450 \sin A}{\sin(180-(A+B))}$$

$$h_2 = \frac{\sin(180-B)\cdot 450 \sin A}{\sin(180-(A+B))}$$

Enhetscirkel:




men även $\sin(180-v)$ medför att

$\sin v = \sin(180-v)$

används i de olika fallen

$$h_2 = \frac{450 \sin(180-B)\cdot \sin A}{\sin(180-(A+B))} = \frac{450 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$$

$h_1 = h_2$

allmän formel: $\dfrac{450 \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin(A+B)}$

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | X | 3/0 | |
| Matematiska resonemang | X | 0/2 | |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/1 | |
| **Summa** | | **3/3** | |

*Kommentar*: Eleven visar en fullständig lösning. Lösningen visar MVG-kvaliteter i alla tre avseenden.

## Mål för matematik kurs D

### Kursplan 2000

**Trigonometri (T)**
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

**Differential- och integralkalkyl (D)**
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

**Övrigt(Ö)**
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

**Betygskriterier 2000**

**Kriterier för betyget Godkänd**

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

**Kriterier för betyget Väl godkänd**

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

**Kriterier för betyget Mycket väl godkänd**

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

## Kopieringsunderlag för aspektbedömning

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

**Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter**

| Elevens namn: ...................................................................... | Uppgift (¤-märkt) | | | Övriga uppgifter |
|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 9b | 17 | 18 | |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | | | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | | | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | |

| Elevens namn: ...................................................................... | Uppgift (¤-märkt) | | | Övriga uppgifter |
|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 9b | 17 | 18 | |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | | | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | | | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | |

| Elevens namn: ...................................................................... | Uppgift (¤-märkt) | | | Övriga uppgifter |
|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 9b | 17 | 18 | |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | | | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | | | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | |