NATIONAL TEST IN MATHEMATICS COURSE D
AUTUMN 2006

Directions

Test time	240 minutes for Part I and Part II together. We recommend that you spend no more than 60 minutes on Part I.
Resources	**Part I:** ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C and D.” *Please note that calculators are not allowed in this part.* **Part II:** Calculators and ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C and D”.
Test material	The test material should be handed in together with your solutions. Write your name, the name of your education programme / adult education on all sheets of paper you hand in. *Solutions to Part I should be handed in before you retrieve your calculator. You should therefore present your work on Part I on a separate sheet of paper. Please note that you may start your work on Part II without a calculator.*
The test	The test consists of a total of 17 problems. **Part I** consists of 9 problems and **Part II** consists of 8 problems. For some problems (where it says *Only answer is required*) it is enough to give short answers. For the other problems short answers are not enough. They require that you write down what you do, that you explain your train of thought, that you, when necessary, draw figures. When you solve problems graphically/numerically please indicate how you have used your resources. Problem 17 is a larger problem which may take up to an hour to solve completely. It is important that you try to solve this problem. A description of what your teacher will consider when evaluating your work is attached to the problem. Try all of the problems. It can be relatively easy, even towards the end of the test, to receive some points for partial solutions. A positive evaluation can be given even for unfinished solutions.
Score and mark levels	The maximum score is 44 points. The maximum number of points you can receive for each solution is indicated after each problem. If a problem can give 2 ”Pass”-points and 1 ”Pass with distinction”-point this is written (2/1). Some problems are marked with ¤, which means that they more than other problems offer opportunities to show knowledge that can be related to the criteria for ”Pass with Special Distinction” in Assessment Criteria 2000.

Lower limit for the mark on the test

Pass:	13 points
Pass with distinction:	26 points of which at least 6 ”Pass with distinction”-points.
Pass with special distinction:	26 points of which at least 13 ”Pass with distinction”-points. You also have to show most of the “Pass with special distinction” qualities that the ¤-problems give the opportunity to show.

Part I

This part consists of 9 problems that should be solved without the aid of a calculator. Your solutions to the problems in this part should be presented on separate sheets of paper that must be handed in before you retrieve your calculator. Please note that you may begin working on Part II without your calculator.

1. Find an antiderivative F for $f(x) = 4x^3 - 4x$

Only answer is required (1/0)

2. Differentiate

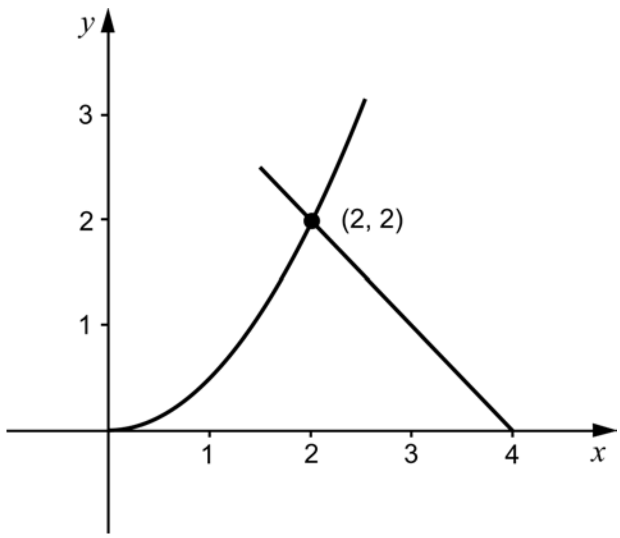
a) $f(x) = 2\cos 3x$ *Only answer is required* (1/0)

b) $g(x) = x \cdot \sin x$ *Only answer is required* (1/0)

3. Evaluate $\int_1^2 (1 - x)\,dx$ (2/0)

4. Evaluate $\cos 7\pi$ (2/0)

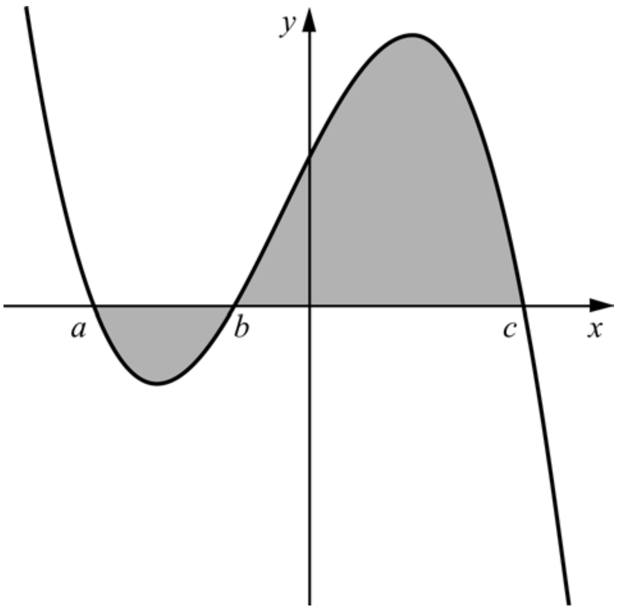
5. The figure shows a region bounded by the curve $y = \dfrac{x^2}{2}$,
the line $y = 4 - x$ and the x-axis. Calculate the area of the region. (3/0)



6. A sine function f has the amplitude 3 and the period $\frac{\pi}{5}$

Find the equation for the function of the form $f(x) = a\sin kx$ (1/1)

7. The figure shows the graph of the function f



Which of the alternatives A-E gives the total area of the regions marked in the figure?

Only answer is required (0/1)

A. $\int_a^c f(x)\,dx$

B. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

C. $-\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

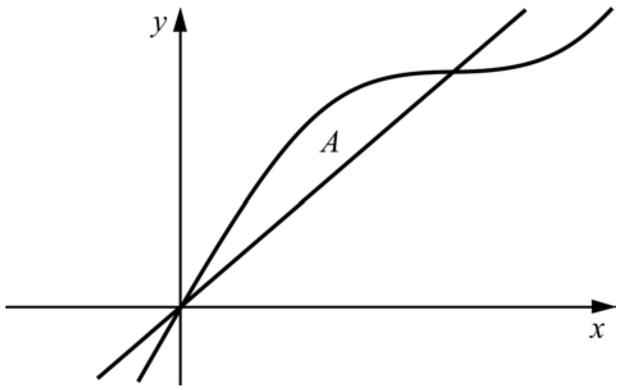
D. $-\int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$

E. $-\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^0 f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$

8. Solve the equation $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ where $0 \le x \le 4\pi$ (1/2)

9. The figure shows a region A bounded by the curves $y = x + \sin x$ and $y = x$

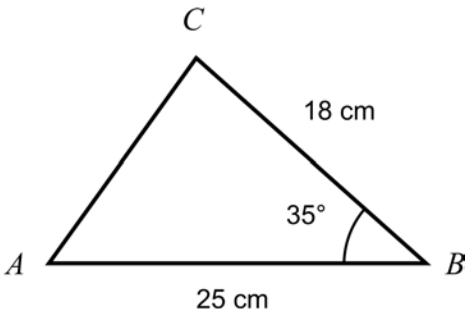
Calculate a so that the line $x = a$ divides the region A into two parts of equal size. (0/3/¤)



Part II

This part consists of 8 problems and you may use a calculator when solving them. Please note that you may begin working on Part II without your calculator.

10. The figure shows the triangle *ABC*. Find the length of side *AC*.



(2/0)

11. Find the antiderivative F to $f(x) = e^{2x} - 1$ that satisfies the condition $F(0) = 2$ (2/0)

12. In the beginning of the 1980s the Lesser White-fronted Goose was almost extinct in Sweden. In 1981 the Swedish Environmental Protection Agency started ”Project Lesser White-fronted Goose” with the aim of saving the species.

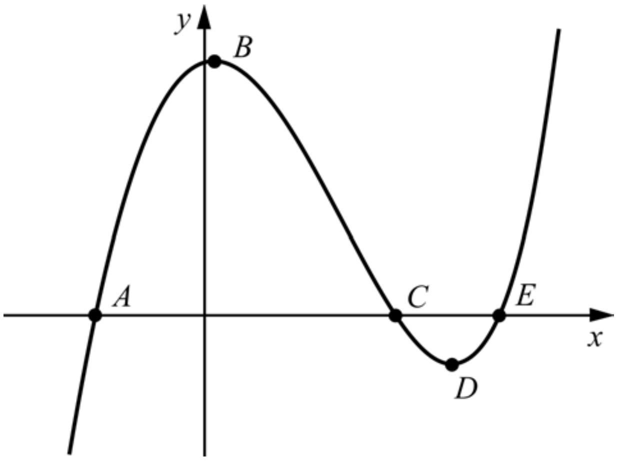
© Photo: Lars Göran Lindström

After a period of time the situation could be described mathematically with the differential equation:

$\frac{dy}{dt} = 0.15 \cdot y$, where y is the number of geese at time t years from the year 1999.

Explain, in your own words, the meaning of the differential equation in this context. (1/1)

13. The figure shows the graph of $f(x) = x^3 - 6x^2 + e^x + 8$



a) Find one of the solutions to the equation $f(x) = 0$
Answer to three decimal places. (1/0)

b) For which of the marked points is it true that both $f'(x) = 0$
and $f''(x) > 0$? Explain. (1/1)

14. The temperature $y\,°\mathrm{C}$ in a house, during a twenty-four hour period, can be described by the function

$$y(t) = 20 + 3 \cdot \sin\frac{\pi(t-8)}{12}$$

where t is the time in hours and $t = 0$ represents midnight.

a) Between which values does the temperature vary in the house?
Only answer is required (1/0)

b) At what point in time during the twenty-four hour period is the increase in temperature greatest and what is the rate of change at that point? (0/3)

15. The government of a country is unsure of the population growth in the country. They employ two different consultants so that each of them can give their prognosis for population growth in the coming years.

The first consultant predicts that the population will increase at the rate of $100\mathrm{e}^{0.02t}$ thousand persons per year.

The second consultant predicts that the population will increase at the rate of $100 + 0.2t + 0.02t^2$ thousand persons per year.

In both prognoses t is the time in years from the beginning of the year 2000.

The prognoses give different predictions about how much the population will increase. How great is the difference in population between the prognoses at the beginning of the year 2015? (0/3)

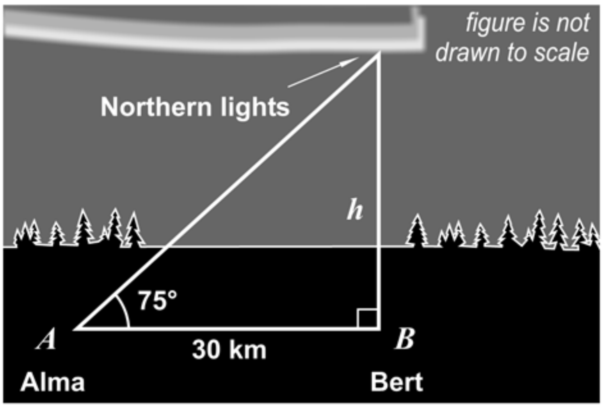
16. Use the method of differentiation to show that the equation $4\tan x - 2.5 = 8x$ has exactly **one** root in the interval $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (0/3/¤)

When assessing your work with this problem your teacher will take into consideration:
- How well you carry out your calculations
- How well you justify your conclusions
- How well you present your work
- How well you use the mathematical language

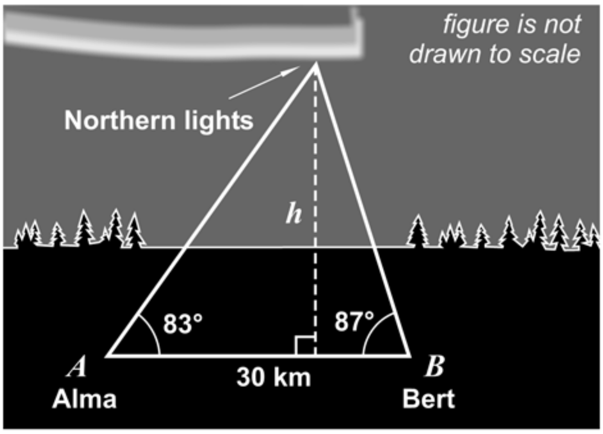
17. One evening Alma observes beautiful northern lights in the sky due north. With her protractor she measures the altitude angle at 75°, see the figure below.

She looks at the map and discovers that her classmate Bert lives 30 kilometers due north of her. She calls Bert and tells him about the northern lights.
Bert sees the same northern lights but directly overhead, see the figure.

- At what height are the northern lights? The surface of the earth can be assumed to be flat in the calculations.



- On another evening Alma and Bert once again see the northern lights and at the same time measure the angle of altitude at which they observe the northern lights. The angles' measurements are $A = 83°$ in a northern direction and $B = 87°$ in a southern direction, see the figure below. At what height are the northern lights this time?



- Alma and Bert decide to focus their upcoming project work on the northern lights. They want to find a formula that gives you the height if you insert the measured values of the angels *A* and *B*. Derive a suitable formula in a simplified form.

- Does the formula hold true even if the northern lights are located north of Bert so that the angle *B* is obtuse? Justify your answer. (3/3/¤)

Innehåll

Sid nr

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 6, 9, 14, 15, 16 och 17 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16 och 17. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 8, 9, 14, 15, 16 och 17 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 1, 5, 6, 7, 8, 11, 13 och 16 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 5, 7, 9, 14, 15, 16 0ch 17 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2006 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	1	0													x			x		x												
2a	1	0									x							x														
2b	1	0									x							x														
3	2	0														x		x	x	x												
4	2	0					x											x		x												
5	3	0													x	x		x	x	x												
6	1	1						x										x		x		x		x								
7	0	1														x						x										
8	1	2							x									x	x	x		x	x	x								
9	0	3	¤						x						x	x						x	x	x	x			x	x			
10	2	0								x								x		x												
11	2	0													x			x		x												
12	1	1												x				x	x			x	x	x								
13a	1	0											x					x		x												
13b	1	1										x						x		x		x	x	x	x							
14a	1	0						x										x	x	x												
14b	0	3			x			x			x		x									x	x	x	x							
15	0	3														x	x					x	x	x	x							
16	0	3	¤		x				x		x											x	x	x	x			x	x	x		
17	3	3	¤				x		x	x								x	x	x		x	x	x	x	x		x		x	x	
Σ	23	21		0/1			10/9				13/11																					

Kravgränser
Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	13 poäng.
Väl godkänd:	26 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift		
MVG-kvalitet	9	16	17
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	○		○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		○	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang		○	○
Värderar och jämför metoder/modeller			
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	○	○	○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt

   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning

   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng

   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

   4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

   4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

   5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

   5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

   5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

   5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning

   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

   7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

   7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

   7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

   7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2006)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I			
1.			**Max 1/0**
		Korrekt primitiv funktion $\left(F(x) = x^4 - 2x^2\right)$	+1 g
2.			**Max 2/0**
	a)	Korrekt svar ($-6\sin 3x$)	+1 g
	b)	Korrekt svar ($\sin x + x\cos x$)	+1 g
3.			**Max 2/0**
		Korrekt bestämning av den primitiva funktionen	+1 g
		med i övrigt godtagbar lösning $\left(-\frac{1}{2}\right)$	+1 g
4.			**Max 2/0**
		Godtagbar ansats, t ex använder periodiciteten	+1 g
		med korrekt svar (-1)	+1 g
5.			**Max 3/0**
		Godtagbar ansats, t ex delar in området i två delområden och bestämmer arean av det ena delområdet korrekt	+1 g
		Bestämmer arean av det andra delområdet korrekt	+1 g
		med i övrigt godtagbar lösning $\left(\frac{10}{3}\right)$	+1 g

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
6.		**Max 1/1**
	Korrekt angivet värde på *a* (3)	+1 g
	Godtagbar bestämning av *k* (10)	+1 vg
7.		**Max 0/1**
	Korrekt svar (C)	+1 vg
8.		**Max 1/2**
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer en vinkel i intervallet	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning $\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{11\pi}{2} \right)$	+1-2 vg
9.		**Max 0/3/¤**
	Godtagbar bestämning av skärningspunkter	+1 vg
	Godtagbar metod för bestämning av *a*	+1 vg
	med korrekt svar $\left(a = \frac{\pi}{2} \right)$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod för att bestämma *a*, t ex ställa upp en ekvation eller genomföra ett resonemang kring symmetrin hos sinusfunktionen.*
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med i ett huvudsak korrekt matematiskt språk.

* Eftersom denna uppgift kräver MVG-kvalitet för sin lösning så kommer godtagbara elevlösningar att ge vg-poäng och visa på en MVG-kvalitet på samma gång.

Uppg. Bedömningsanvisningar Poäng

Elevlösning 1 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$x + \sin x = x$

$\sin x = 0$

$x = \sin^{-1}(0) + n \cdot 360$

$x = 0 + n \cdot 360$

$x_2 = \pi + n \cdot 360$

gränserna = 0 och π

$\int_0^{\pi} (\sin x)\,dx$

$F(x) = -\cos x$

$F(\pi) = -\cos \pi$

$F(0) = -\cos 0$

$F(\pi) - F(0) = -\cos \pi + 1$ a.e.

Arean delat på 2 ska vara arean efter delning

$\int_0^{a} (\sin x)\,dx = \frac{-\cos \pi + 1}{2}$ $\boxed{F(x) = -\cos x}$

$F(a) - F(0) = \frac{-\cos \pi + 1}{2}$

$-\cos a - (-\cos 0) = \frac{-\cos \pi + 1}{2}$

$-\cos a - \cos 0 = \frac{-\cos \pi + 1}{2}$

$-\cos a = \frac{-\cos \pi + 1}{2} + \cos 0$

$-\cos a = \frac{2}{2} + 1 = 2$

$-\cos a = 2$

$\cos a = -2$

$\underline{\underline{a = \cos^{-1}(-2)}}$

Kommentar:
Elevens lösning uppvisar de två MVG-kvaliteterna, dels genom att en generell metod för att bestämma *a* används, dels genom att redovisningen är tillräckligt klar och tydlig. Däremot gör eleven ett teckenfel i sina beräkningar och får därför inte vg-poängen för korrekt svar. Teckenfelet medför ett orimligt svar som eleven borde ha reflekterat över.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
10.		**Max 2/0**
	Godtagbar ansats, t ex använder cosinussatsen	+1 g
	med godtagbar beräkning av *AC* (15 cm)	+1 g
11.		**Max 2/0**
	Godtagbar bestämning av en primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar ($F(x) = \frac{e^{2x}}{2} - x + \frac{3}{2}$)	+1 g
12.		**Max 1/1**
	Godtagbar ansats, t ex anger att antalet fjällgäss ökar	+1 g
	Godtagbar förklaring (”Antalet fjällgäss ökar med hastigheten 15 % per år av det aktuella antalet”)	+1 vg
13.		**Max 2/1**
a)	Godtagbar bestämning av något nollställe (Något av följande $x_A = -1{,}085$, $x_C = 1{,}878$, $x_E = 2{,}888$)	+1 g
b)	Korrekt svar	+1 g
	med godtagbar motivering (”De givna villkoren innebär att punkten är en minimipunkt, det vill säga punkt *D*”)	+1 vg
14.		**Max 1/3**
a)	Korrekt svar (Mellan 17 ºC och 23 ºC)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex deriverar funktionen och får $\frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi(t-8)}{12}$ eller påbörjar en grafisk undersökning av funktionens derivata	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning (Kl. 8 är hastigheten 0,79 ºC/h)	+1-2 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
15.		**Max 0/3**
	Påbörjar lösningen godtagbart, t ex tecknar ett integraluttryck för ökningen enligt den ena modellen	+1 vg
	Godtagbar fortsättning, t ex tecknar ett integraluttryck för det sökta värdet	+1 vg
	med godtagbar beräkning av svaret (200 000)	+1 vg
16.		**Max 0/3/¤**
	Godtagbar ansats, t ex genom att bilda funktionen $f(x) = 4\tan x - 2{,}5 - 8x$	+1 vg
	Bestämmer och motiverar derivatans nollställen i intervallet.	+1 vg
	Drar korrekt slutsats utifrån derivatan och funktionen	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	t ex analysera derivatans teckenväxlingar och funktionens värden i lämpliga punkter.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att ekvationen har exakt en rot i intervallet.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med i ett huvudsak korrekt matematiskt språk.

Denna rättningsmall är utformad efter förutsättningen att eleven bildat **en** funktion.
Andra lösningar behandlas på motsvarande sätt.

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

Elevlösning 1 (3 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$4\tan x - 2{,}5 = 8x$

$4\tan x - 2{,}5 - 8x = 0$

$f(x) = 4\tan x - 2{,}5 - 8x$

$f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2 x} - 8$

$f'(x) = 0$

$\Updownarrow$

$\dfrac{4}{\cos^2 x} = 8$

$\dfrac{1}{2} = \cos^2 x$

$\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \cos x$

$\dfrac{\pi}{4} = x$

$\dfrac{4}{\cos^2 x} = 8$

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

max, min

linjen har maximi ~~eller~~ och minimi i $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$ Nästa kommer 2π senare och den innan 2π tidigare

$f(-\frac{\pi}{4}) = 4\tan -\frac{\pi}{4} - 2{,}5 + \frac{8\cdot\pi}{4} = -0{,}21$

$\pm\frac{\pi}{4}$ ger enda extrempunkterna i intervallet

så linjen skär x-axeln endast en gång Det är efter $\frac{\pi}{4}$ Det syns på räknaren

Kommentar:
Elevens lösning visar MVG-kvalitet genom att analysera derivatans teckenväxlingar med hjälp av teckenschema och visa att funktionsvärdet i maximipunkten är negativt. (Observera att eleven inte har bestämt alla nollställen för derivatan då eleven inte har tagit hänsyn till fallet $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ men har bestämt alla nollställen som finns i det givna intervallet.) I sin argumentering för att ekvationen har endast en rot i intervallet hänvisar eleven till extrempunkterna men kopplingen till kurvans form och derivatan är ganska vag och indirekt så resonemanget visar nätt och jämnt MVG-kvalitet. Elevens redovisning är inte tillräckligt klar och tydlig för att kunna sägas visa MVG-kvalitet.

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

Elevlösning 2 (3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

$4\tan x - 2,5 = 8x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$f(x) = 4\tan x - 2,5 - 8x$

$f'(x) = \frac{4}{\cos^2 x} - 8$

$0 = \frac{4}{\cos^2 x} - 8$

$8 = \frac{4}{\cos^2 x}$

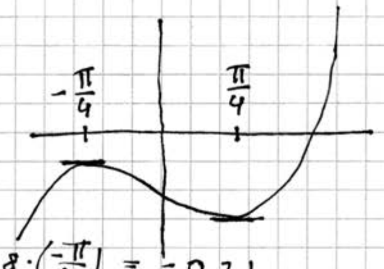
$8\cos^2 x = 4$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

		$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	
$f(x)$	↗		↘		↗
$f'(x)$	+	0	−	0	+



$f(-\frac{\pi}{4}) = 4\tan(-\frac{\pi}{4}) - 2,5 - 8\cdot(-\frac{\pi}{4}) = -0,21$

skär ej x-axeln i intervallet $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$

alltså ingen rot där

$f(x) = 4\tan x - 2,5 - 8x$ $f(x)$ går mot oändligheten

$x \to \frac{\pi}{2}$ då $x \to \frac{\pi}{2}$

alltså skär grafen x-axeln en gång i intervallet

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ då kurvan är stängt växande ,

$f(\frac{\pi}{2}) \to \infty$, och $f(\frac{\pi}{4}) < 0$

så skär grafen x-axeln en gång i intervallet

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ och ingen gång i intervallet

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ alltså en gång i intervallet

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Kommentar:

Elevens lösning visar MVG-kvalitet genom att analysera derivatans teckenväxlingar med hjälp av teckenschema och visa att funktionsvärdet i maximipunkten är negativt. (Observera att eleven inte har bestämt alla nollställen för derivatan då eleven inte har tagit hänsyn till fallet $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ men har bestämt alla nollställen som finns i det givna intervallet.) Elevens argumentering för att ekvationen har endast en rot i intervallet visar MVG-kvalitet genom att tydligt beskriva vad som händer med kurvan i intervallet och i samband med detta hänvisa till extrempunkterna. Elevens redovisning är tillräckligt klar och tydlig för att kunna sägas visa MVG-kvalitet.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

17. **Max 3/3/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

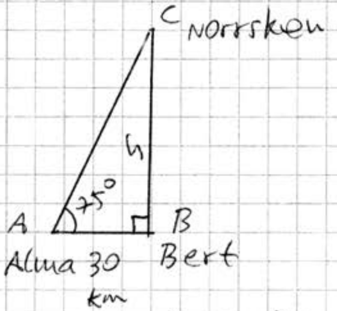
Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven beräknar höjden i något av fallen (112 km eller 171 km) **1 g**	Eleven beräknar höjden i båda fallen **2-3 g**		**3/0**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*		Eleven påbörjar en härledning av ett uttryck för höjden då norrskenet befinner sig mellan *A* och *B* **1 vg**	Eleven härleder ett generellt uttryck för höjden då norrskenet befinner sig mellan *A* och *B*, t ex $\dfrac{30\cdot\sin A\cdot\sin B}{\sin(180-A-B)}$ **2 vg**	**0/2**
Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. Redovisningen ska omfatta del av tredje punkten. **1 vg**		**0/1**
Summa				**3/3**

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	visa att formeln är densamma även om vinkeln B är trubbig.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	ta fram en formel i *förenklad* form, även om eleven bara visat den när norrskenet befinner sig mellan A och B. ($h = \dfrac{30 \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin(A+B)}$)
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17.

Elevlösning 1 (3 g och 2 vg)

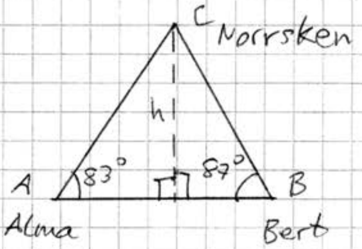


$\angle C = 180 - (90 + 75) = 15°$

sinussatsen $= \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$\dfrac{\sin 75°}{h} = \dfrac{\sin 15°}{30}$ $\quad h \approx 110$

Svar: Norrskenet ligger på höjden 110 km



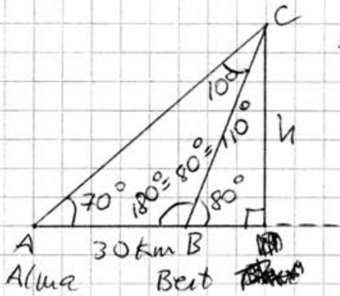
$\angle C = 180° - (83° + 87°) = 10°$

sinussatsen:

$\dfrac{\sin 10°}{30} = \dfrac{\sin 83°}{BC}$ $\quad BC \approx 171,48$

$\dfrac{\sin 90°}{171,48} = \dfrac{\sin 87°}{h}$ $\quad h \approx 170$

Svar: Norrskenet ligger på höjden 170 km



Norrskenet till höger om Bert

$\angle C = 180° - (100° + 70°) = 10°$

sinussatsen

$\dfrac{\sin 10°}{30} = \dfrac{\sin 70°}{BC}$ $\quad BC \approx 162,34$

$\dfrac{\sin 90°}{162,34} = \dfrac{\sin 80°}{h}$ $\quad h \approx 160$

$$\frac{\sin 180 - (180-80+70)}{30} = \frac{\sin 70}{BC\ (=a)}$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{BC\ (=a)} = \frac{\sin 80}{h}$$

$$\frac{\sin(A+B)}{30} = \frac{\sin A}{BC} \Rightarrow 30 \sin A = BC \sin(A+B)$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{BC} = \frac{\sin B}{h} \Rightarrow h = \underbrace{BC}_{a} \cdot \sin A$$

svar: Vinklarna A och B ska mätas

Formel $h = B \sin A$

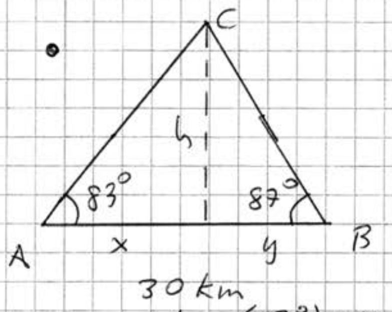
	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X		3/0	
Matematiska resonemang		X		0/1	Eleven påbörjar en härledning.
Redovisning och matematiskt språk			X	0/1	
Summa				**3/2**	

Kommentar:
Eleven har beräknat höjden i de två konkreta fallen, men misslyckas med att ta fram en allmän formel. Redovisningen är lätt att följa och förstå.

Elevlösning 2 (3 g och 3 vg och en av MVG-kvaliteterna)

- $\tan 75^\circ = \dfrac{h}{30}$

  $\tan 75^\circ \cdot 30 = h \qquad h \approx 110 \text{ km}$

- 

  $\tan 87^\circ = \dfrac{h}{y} \qquad h = \tan 87^\circ \cdot y$

  $\tan 83^\circ = \dfrac{h}{x} \qquad h = \tan 83^\circ \cdot x$

  $\tan 87^\circ \cdot y = \tan 83^\circ \cdot x$

$$y = \frac{\tan(83^\circ) \cdot x}{\tan 87^\circ}$$

$$x + y = x\left(\left(\frac{\tan(83^\circ)}{\tan(87^\circ)}\right) + 1\right)$$

$$30 = x\left(\left(\frac{\tan 83^\circ}{\tan 87^\circ}\right) + 1\right) , \quad x = \frac{30}{\left(\left(\frac{\tan 83^\circ}{\tan 87^\circ}\right) + 1\right)}$$

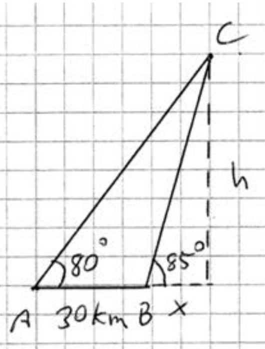
$$\frac{h}{x} = \tan 83^\circ , \quad \tan 83^\circ = \frac{h}{\frac{30}{\left(\frac{\tan 83^\circ}{\tan 87^\circ}\right) + 1}}$$

$$h = \frac{\tan 83^\circ \cdot 30}{\left(\frac{\tan 83^\circ}{\tan 87^\circ}\right) + 1}$$

$h \approx 171 \text{ km}$

- Om norrskenet ligger mellan dem är formeln

$$h = \frac{\tan(A) \cdot 30}{\left(\frac{\tan(A)}{\tan(B)}\right) + 1}$$



$$\tan 85^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\tan 80^\circ = \frac{h}{30+x}$$

$$11{,}43 = \frac{h}{x} \qquad 11{,}43x = h$$

$$5{,}67 = \frac{h}{30+x} \qquad 11{,}43x \approx 170 + 5{,}67x$$

$$5{,}76x \approx 170$$

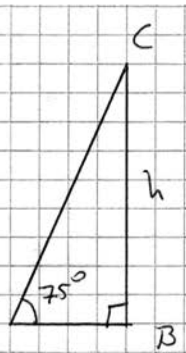
$$x = \frac{170}{5{,}76}$$

$$x \approx 29{,}5 \text{ km}$$

Kvalitativa nivåer		Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	3/0	
Matematiska resonemang	X	0/2	Eleven har tagit fram en formel för höjden då norrskenet befinner sig mellan Alma och Bert.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**3/3**	

Kommentar:
Eleven tar fram en formel till då norrskenet ligger mellan Alma och Bert, även om uttrycket skulle kunna skrivas om något mer förenklat. Lösningen motsvarar VG-kvalitet vad gäller redovisningen. Elevlösningen visar en MVG-kvalitet.

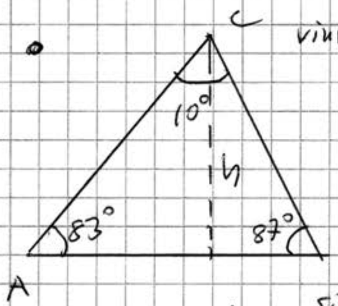
Elevlösning 3 (3 g och 3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)



$\tan v = \dfrac{\text{motstående katet}}{\text{när. katet}}$

$h = \tan(75°) \cdot 30 = 112$ km

Norrskenet låg på 112 km höjd



vinkelsumman $= 180°$

$C = 180° - (83° + 87°)$

$C = 10°$

sinussats: $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a}$

$\dfrac{\sin 10°}{30} = \dfrac{\sin 83°}{a}$

$a \sin 10° = 30 \sin 83°$

$a = \dfrac{30 \sin 83°}{\sin 10°}$

$a \approx 171,48$

$\sin a = \dfrac{\text{motst. katet}}{\text{hypotenusan}}$

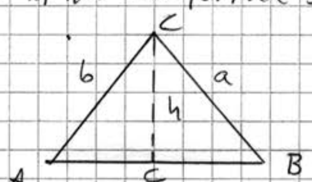
$\sin 87° = \dfrac{h}{171,48}$

$171,48 \sin 87° = h$

$h = 171,2$

Detta norrsken är på 171,2 km höjd

Vill hitta en formel som direkt ger höjden



$C = 180 - (A + B)$

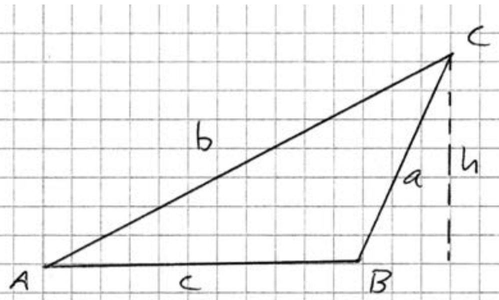
$\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$

$a_1 = \dfrac{30 \sin A}{\sin(180 - (A+B))}$

$h_1 = \dfrac{30 \sin A \sin B}{\sin(180 - (A+B))}$

$\left(\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin(180 - (A+B))}{30} \right.$

$\left. \sin v = \dfrac{\text{motst.}}{\text{hypot.}} \right)$



Formel ~~om~~ norrsken norr om Bert

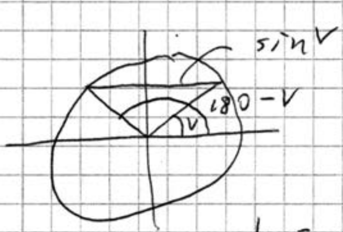
$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

30

$$a_2 = \frac{30 \sin A}{\sin(180-(A+B))}$$

$$h_2 = \frac{\sin(180-B)\cdot 30 \sin A}{\sin(180-(A+B))}$$

Enhetscirkel



men även sin(180 − v) medför att $\sin v = \sin(180-v)$

används i de olika fallen

$$h_2 = \frac{30\sin(180-B)\sin A}{\sin(180-(A+B))} = \frac{30\sin A \sin B}{\sin(A+B)}$$

$$h_1 = h_2$$

allmän formel : $\frac{30\sin A \sin B}{\sin(A+B)}$

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X		3/0	
Matematiska resonemang			X	0/2	
Redovisning och matematiskt språk			X	0/1	
Summa				**3/3**	

Kommentar:
Eleven visar en fullständig lösning. Lösningen visar MVG-kvaliteter i alla tre avseenden.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)			Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	16	17	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)			Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	16	17	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)			Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	16	17	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Insamling av provresultat

Höstterminen 2006 kommer resultat från alla skolor att samlas in. Denna insamling av **resultat sker på uppgiftsnivå för elever födda vissa datum**. Dessutom ombeds läraren att besvara en enkät och skicka in bedömda elevlösningar. Dessa resultat skickas till provinstitutionen.

För matematik kurs D gäller följande:

Elevresultat rapporteras **för elever födda den 6:e, 8:e, 10:e och 15:e varje månad** på en webbplats som nås via http://www.umu.se/edmeas/np. I samband med resultatredovisningen fyller varje lärare i en **lärarenkät** som finns på samma webbplats**.**

Bedömda elevlösningar till proven skickas in per post för **elever födda den 6:e i varje månad.**

De bedömda elevlösningarna skickas till:

Umeå universitet
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Nationella prov
901 87 Umeå

Mer information om insamlingen av resultat, lärarenkäter och elevlösningar medföljer provmaterialet. Där delges bland annat det lösenord som behövs för att kunna logga in på webbsidan för resultatredovisning.

För mer information kontakta:
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet
Monika Kriström, tel: 090-786 59 22, e-post: monika.kristrom@edmeas.umu.se