

Concerning test material in general, the Swedish Board of Education refers to the Official Secrets Act, the regulation about secrecy, 4th chapter 3rd paragraph. For this material, the secrecy is valid until the expiration of December 2013.

## NATIONAL TEST IN MATHEMATICS COURSE D AUTUMN 2007

### Directions

- Test time** 240 minutes for Part I and Part II together. We recommend that you spend no more than 60 minutes on Part I.
- Resources** **Part I:** "Formulas for the National Test in Mathematics Courses C and D."  
*Please note that calculators are not allowed in this part.*
- Part II:** Graphic calculators or Symbolic calculators and "Formulas for the National Test in Mathematics Courses C and D".
- Test material** The test material should be handed in together with your solutions.  
Write your name, the name of your education programme/adult education on all sheets of paper you hand in.  
*Solutions to Part I should be handed in before you retrieve your calculator. You should therefore present your work on Part I on a separate sheet of paper. Please note that you may start your work on Part II without a calculator.*
- The test** The test consists of a total of 17 problems. **Part I** consists of 9 problems and **Part II** consists of 8 problems.  
For some problems (where it says *Only answer is required*) it is enough to give short answers. For the other problems short answers are not enough. They require that you write down what you do, that you explain your train of thought, that you, when necessary, draw figures. When you solve problems graphically/numerically please indicate how you have used your resources.  
Problem 17 is a larger problem which may take up to an hour to solve completely. It is important that you try to solve this problem. A description of what your teacher will consider when evaluating your work is attached to the problem.  
Try all of the problems. It can be relatively easy, even towards the end of the test, to receive some points for partial solutions. A positive evaluation can be given even for unfinished solutions.
- Score and mark levels** The maximum score is 45 points.  
The maximum number of points you can receive for each solution is indicated after each problem. If a problem can give 2 "Pass"-points and 1 "Pass with distinction"-point this is written (2/1). Some problems are marked with  $\square$ , which means that they more than other problems offer opportunities to show knowledge that can be related to the criteria for "Pass with Special Distinction" in Assessment Criteria 2000.
- Lower limit for the mark on the test
- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| Pass:                          | 13 points   |
| Pass with distinction:         | 26 points of which at least 8 "Pass with distinction"-points.   |
| Pass with special distinction: | 26 points of which at least 15 "Pass with distinction"- points.<br>You also have to show most of the "Pass with special distinction" qualities that the $\square$ -problems give the opportunity to show. |

## Part I

**This part consists of 9 problems that should be solved without the aid of a calculator. Your solutions to the problems in this part should be presented on separate sheets of paper that must be handed in before you retrieve your calculator. Please note that you may begin working on Part II without your calculator.**

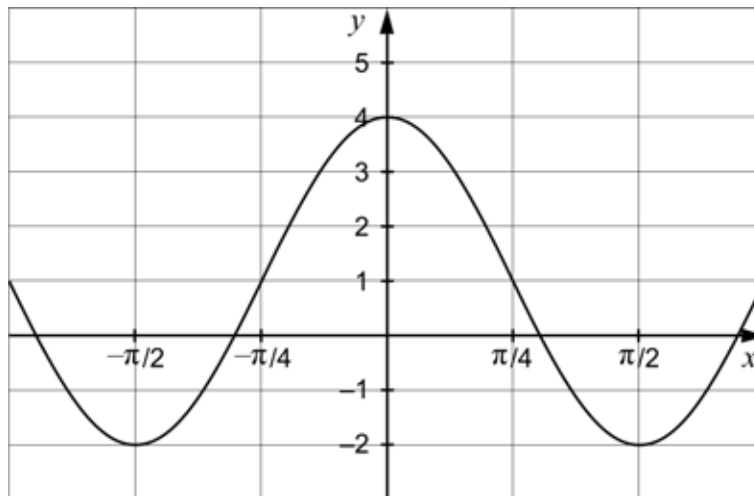
1. Find one antiderivative  $F$  of  $f(x) = 3x^2 + 6$  *Only answer is required* (1/0)

2. Differentiate

a)  $f(x) = \sin 2x - \sin x$  *Only answer is required* (1/0)

b)  $g(x) = \ln(2x+1)$  *Only answer is required* (0/1)

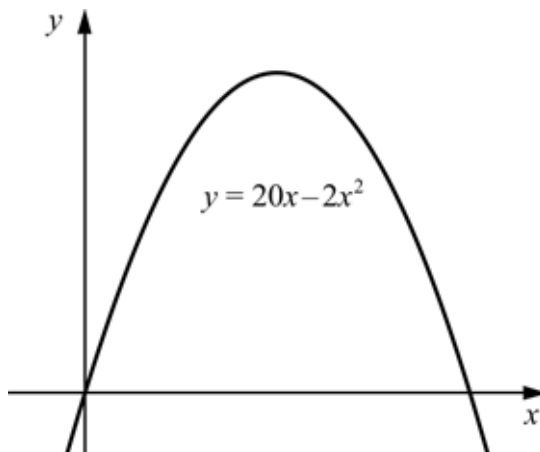
3. The curve below can be written in the form  $y = A \cos kx + b$



a) Determine the values of the constants  $A$  and  $b$ . *Only answer is required* (2/0)

b) Determine the value of the constant  $k$  (0/1)

4. Calculate the exact value of the area bounded by the curve  $y = 20x - 2x^2$  and the  $x$ -axis. (3/0)



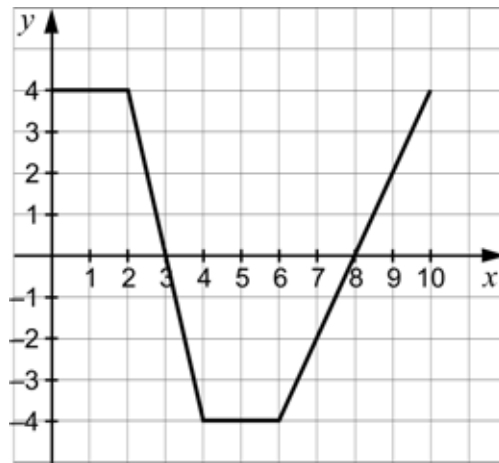
5. Calculate  $\sin(x + \pi)$  given  $\sin x = 0.63$  (0/1)

6. Evaluate  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$  (2/0)

7. Find all solutions to the equation  $f'(x) = 0$  in the interval  $0 \leq x \leq \pi$  when  $f(x) = 2x + \cos 4x$  (1/2)

8. Simplify  $\cos 2x + \sin^4 x - \cos^4 x$  as far as possible. (0/2)

9. The figure shows the graph of the function  $y = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 10$ . A function  $g$  is formed and defined as  $g(t) = \int_0^t f(x) dx$  when  $0 \leq t \leq 10$

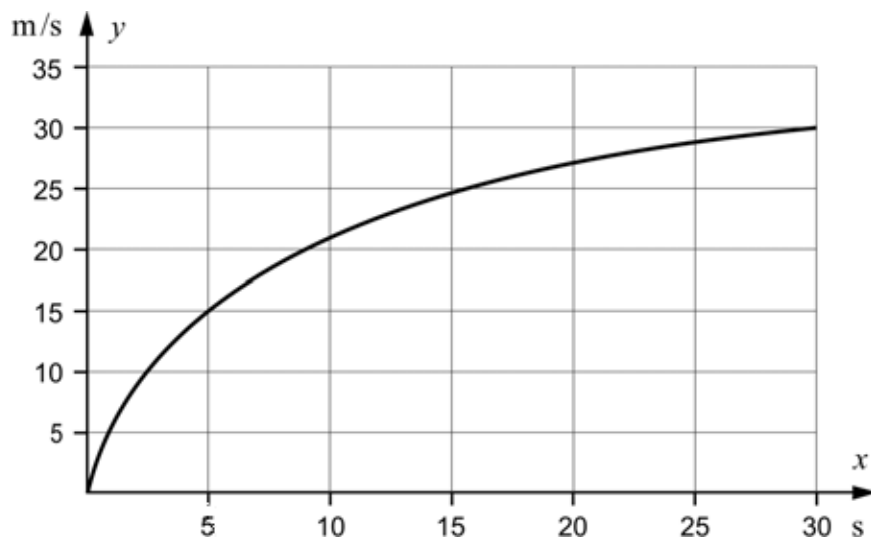


- a) Calculate  $g(3)$  (0/1)
- b) Determine  $t$  so that  $g(t) = 0$  (0/2/∞)

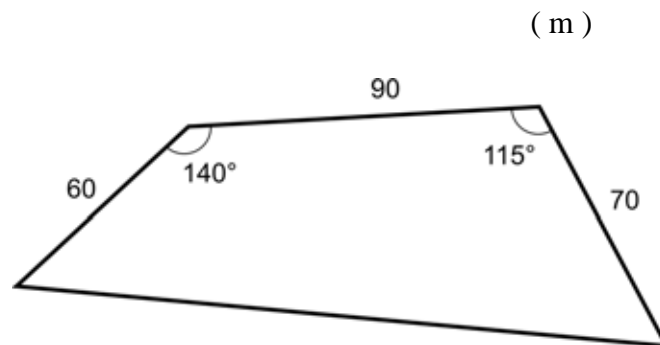
## Part II

**This part consists of 8 problems and you may use a calculator when solving them. Please note that you may begin working on Part II without your calculator.**

10. In a triangle  $ABC$  angle  $A = 64.4^\circ$  and angle  $B = 41.4^\circ$ . The side  $AC$  is 137 cm. Calculate the length of side  $BC$ . (2/0)
11. The figure below shows the velocity of a car accelerating from standing still to a velocity of 30 m/s over a period of 30 s. Estimate the distance the car travels during this period of time. (2/0)



12. A forest region with measurements according to the figure below has been felled. The forest owner has an obligation to re-plant the felling area with spruce plants. Approximately 2500 plants per hectare of felled forest are needed. 1 hectare = 10 000 m<sup>2</sup>



How many plants does the forest owner need for the re-planting? (3/0)

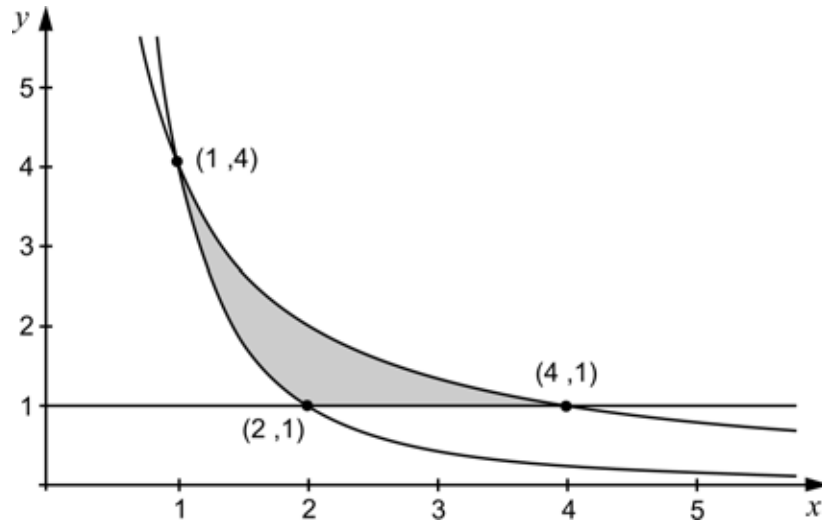
13. The figure shows a region bounded by the curves  $y = \frac{4}{x}$ ,  $y = \frac{4}{x^2}$  and the line  $y = 1$

Write down an expression for the area of the region by using integrals.

You do not have to calculate the area.

*Only answer is required*

(0/2)



14. A disease spreads in a city during a couple of weeks.  
The spread of the disease can be described by the mathematical model

$$y = 100 \cdot x^2 \cdot 0.9^x + 1$$

where  $y$  is the number of people who are ill  $x$  days after the first person has fallen ill.

- a) Calculate an approximate value of  $y'(10)$  and interpret the result. (1/1)
- b) When does the number of people who are ill increase the most? (0/2)

15. The following is known about the polynomial function  $f$ :

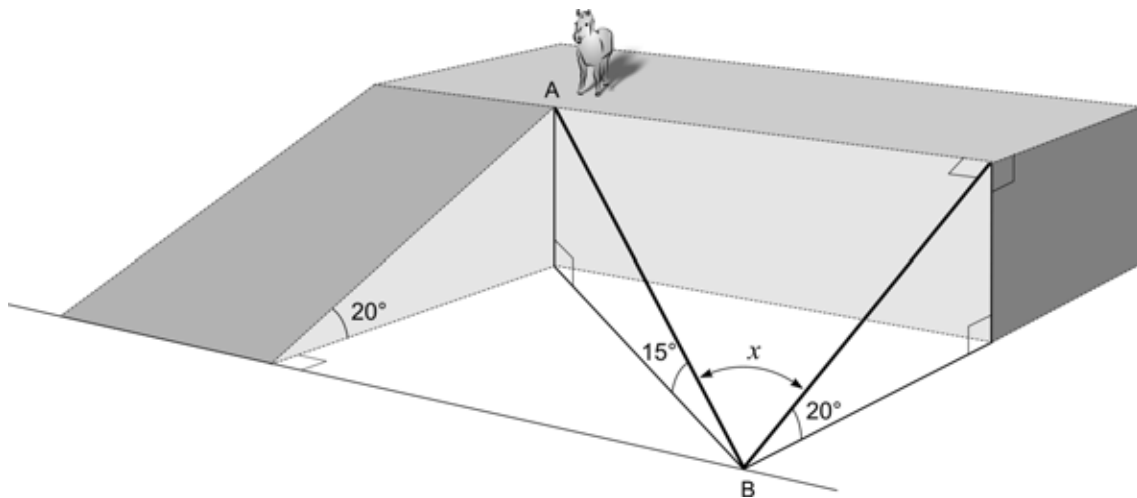
- $f'(0) = 1$
- $f'(3) = -3$
- $f''(x) < 0$  for  $x > 0$

What conclusions can be drawn regarding extreme points of  $f$  within the interval  $x > 0$ ?

(0/2/□)

16. A riding-path is planned for a mountain side that slopes  $20^\circ$  to the horizontal plane. To reduce the slope of the path and to make it easier for the horses to walk up the hillside the riding-path is built diagonally upwards.

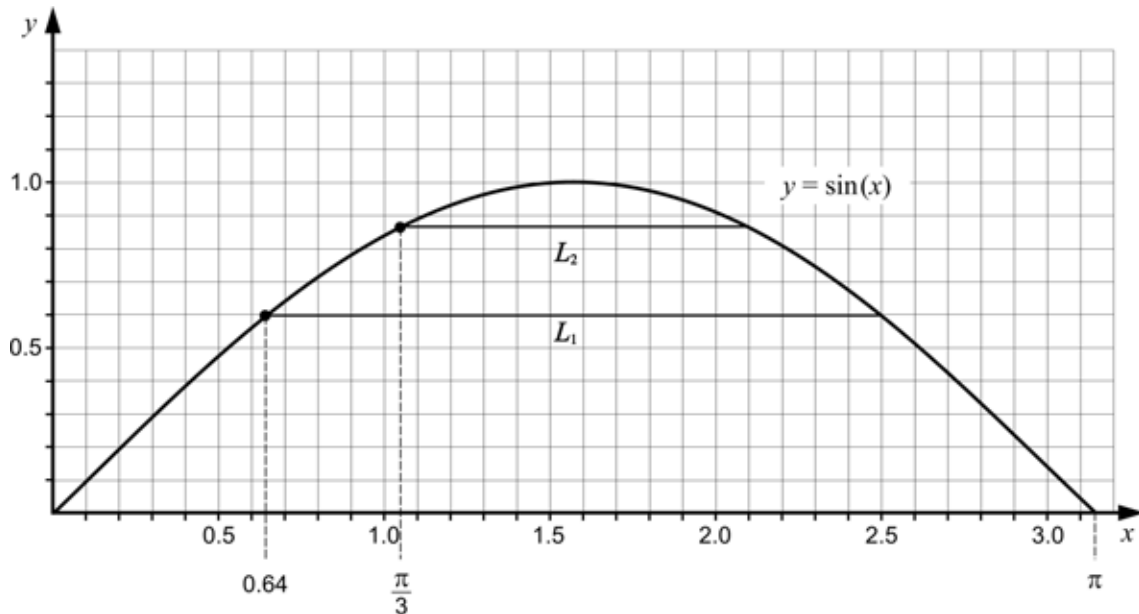
Calculate the angle  $x$  so that the slope of the riding-path  $AB$  is  $15^\circ$ . See figure. (0/3/□)



**When assessing your work with this problem your teacher will take into consideration:**

- How well you carry out your calculations
- How well you justify your conclusions
- How well you present your work
- How well you use mathematical language

17. The figure below shows the curve of  $y = \sin x$  in the interval  $0 \leq x \leq \pi$



Two chords are drawn parallel to the  $x$ -axis. The chords have lengths  $L_1$  and  $L_2$  units of length respectively.

Your task is to investigate one quality that all lines constructed by the method described below have in common.

- Start by reading off the length  $L_1$ . Calculate  $\sin\left(\frac{L_1}{2}\right)$ . Then draw a straight line with gradient  $k_1 = \sin\left(\frac{L_1}{2}\right)$  that passes through the chord's left end point in the figure above.
- Calculate the exact length  $L_2$  of the chord when the left end point has the  $x$ -coordinate  $x = \frac{\pi}{3}$ . Also calculate  $\sin\left(\frac{L_2}{2}\right)$  exactly. Then draw a straight line with gradient  $k_2 = \sin\left(\frac{L_2}{2}\right)$  that passes through the left end point of this chord.



Straight lines constructed with the method mentioned above have one quality in common.

- Describe this quality.
- Is this a quality of all lines constructed with the method mentioned above?

(3/4/□)

<b>Innehåll</b>	<b>Sid nr</b>
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000 .....	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet.....	4
Kravgränser .....	5
Allmänna riktlinjer för bedömning.....	6
Bedömningsanvisningar del I och del II.....	7
Mål för matematik kurs D - Kursplan 2000 .....	20
Betygskriterier 2000 .....	21
Kopieringsunderlag för aspektbedömning.....	22
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter .....	23
Insamling av provresultat hösten 2007 .....	24



## Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbyggnad samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 3, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 16 och 17 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16 och 17. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 1, 3, 5, 8, 13 och 15 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 4, 13, 15, 16 och 17.

## Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2007 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte)

Uppgift nr	g po- äng	vg po- äng	□	Kunskapsområde											Betygskriterium																											
				Övr			Trigonometri				Diff & integral				Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd																	
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5										
1	1	0												x				x	x																							
2a	1	0												x																												
2b	0	1												x										x																		
3a	2	0																																								
3b	0	1																																								
4	3	0																																								
5	0	1												x																												
6	2	0																																								
7	1	2																																								
8	0	2																																								
9a	0	1																																								
9b	0	2	□																																							
10	2	0																																								
11	2	0																																								
12	3	0																																								
13	0	2																																								
14a	1	1																																								
14b	0	2																																								
15	0	2	□		x																																					
16	0	3	□																																							
17	3	4	□		x																																					
Σ	21	24			2/0																																					

**Kravgränser**

Detta prov kan ge maximalt 45 poäng, varav 21 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt: 13 poäng.

Väl godkänt: 26 poäng varav minst 8 vg-poäng.

Mycket väl godkänt: 26 poäng varav minst 15 vg-poäng.

Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De □-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

MVG-kvalitet	Uppgift			
	9b	15	16	17
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○	○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	○			
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang		○		○
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk		○		○

## Allmänna riktlinjer för bedömning

### 1. Allmänt

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

### 2. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

### 3. g- och vg-poäng

För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

### 4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

- 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
- 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

### 5. Uppgifter av långsvarstyp

- 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
- 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen<sup>1</sup>. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
- 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.<sup>2</sup>
- 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel<sup>3</sup>, formella fel och enklare räknefel.

### 6. Aspektbedömning

Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

### 7. Krav för olika provbetyg

- 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
- 7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
- 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
- 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (⊠) uppgifter.

<sup>1</sup> Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

<sup>2</sup> Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

<sup>3</sup> Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till och med 31 december 2013.

## Bedömningsanvisningar (MaD ht 2007)

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

<b>Uppg.</b>	<b>Bedömningsanvisningar</b>	<b>Poäng</b>
<b>Del I</b>		
<b>1.</b>		<b>Max 1/0</b>
	Korrekt svar (t ex $F(x) = x^3 + 6x$ )	+1 g
<b>2.</b>		<b>Max 1/1</b>
a)	Korrekt svar ( $f'(x) = 2 \cos 2x - \cos x$ )	+1 g
b)	Korrekt svar $\left(g'(x) = \frac{2}{2x+1}\right)$	+1 vg
<b>3.</b>		<b>Max 2/1</b>
a)	Korrekt svar ( $A = 3, b = 1$ )	+1-2 g
b)	Korrekt svar ( $k = 2$ ) med godtagbar motivering	+1 vg
<b>4.</b>		<b>Max 3/0</b>
	Korrekt bestämning av integrationsgränser med godtagbar motivering	+1 g
	Korrekt bestämning av primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar $\left(\frac{1000}{3} \text{ a.e.}\right)$	+1 g
<b>5.</b>		<b>Max 0/1</b>
	Korrekt svar med godtagbar motivering, t ex med hjälp av enhetscirkeln ( $-0,63$ )	+1 vg



Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
6.	Korrekt bestämning av primitiv funktion med i övrigt godtagbar lösning $\left(\frac{1}{2}\right)$	Max 2/0 +1 g +1 g
7.	Godtagbar ansats, t ex deriverar och sätter derivatan lika med 0 Godtagbar bestämning av minst två lösningar till ekvationen Godtagbar bestämning av samtliga lösningar till ekvationen $\left(x_1 = \frac{\pi}{24}, x_2 = \frac{5\pi}{24}, x_3 = \frac{13\pi}{24}, x_4 = \frac{17\pi}{24}\right)$	Max 1/2 +1 g +1 vg +1 vg
8.	Godtagbar ansats, t ex skriver om uttrycket så att trigonometriska ettan kan användas med i övrigt godtagbar lösning (0)  Exempel på elevlösningar och hur de bedöms ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på liknande sätt.	Max 0/2 +1 vg +1 vg
<i>Ex 1</i>	$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x - \cos^4 x$	(0/0)
<i>Ex 2</i>	$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x - \cos^4 x =$ $\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x(\sin^2 x - 1)$	(0/1)
<i>Ex 3</i>	$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x - \cos^4 x =$ $\cos^2 x - \sin^2 x + (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$	(0/1)

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
9.		Max 0/3/□
a)	Korrekt svar med godtagbar beräkning (10)	+1 vg
b)	Korrekt svar med godtagbar motivering ( $t = 6, t = 10$ )	+1-2 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	noggrant analysera grafen och dra slutsatsen att det finns två nollställen till funktionen $g$ ( $t = 6, t = 10$ )*
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

- \* Eftersom denna uppgift kräver MVG-kvalitet för sin lösning så kommer godtagbara elevlösningar att ge vg-poäng och visa på MVG-kvaliteter på samma gång.

<b>Uppg.</b>	<b>Bedömningsanvisningar</b>	<b>Poäng</b>
<b>Del II</b>		
<b>10.</b>		<b>Max 2/0</b>
	Godtagbar ansats, t ex använder sinussatsen	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning (187 cm)	+1 g
<b>11.</b>		<b>Max 2/0</b>
	Godtagbar ansats, t ex väljer en lämplig numerisk metod	+1 g
	med godtagbar beräkning av sträckan (640 m – 690 m)	+1 g
<b>12.</b>		<b>Max 3/0</b>
	Godtagbar bestämning av en sträcka och en vinkel	+1-2 g
	med godtagbar bestämning av antalet plantor (ca 1700 st)	+1 g
<b>13.</b>		<b>Max 0/2</b>
	Godtagbar ansats, t ex delar in området i två delar och tecknar ett integraluttryck för arean av den ena delen	+1 vg
	med korrekt svar $\left( \int_1^2 \left( \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx + \int_2^4 \left( \frac{4}{x} - 1 \right) dx \right)$	+1 vg
<b>14.</b>		<b>Max 1/3</b>
a)	Godtagbar bestämning av $y'(10)$ (330)	+1 g
	Godtagbar tolkning ("Ökningen av antalet sjuka då $x = 10$ är 330 st/dygn")	+1 vg
b)	Godtagbar ansats, t ex eleven inser att maximum av derivatan ska undersökas	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning ( $x = 5,6$ )	+1 vg

**Uppg. Bedömningsanvisningar****Poäng****15****Max 0/2/□**

Godtagbar ansats, t ex visar insikt om att derivatan måste vara noll någonstans mellan  $x = 0$  och  $x = 3$

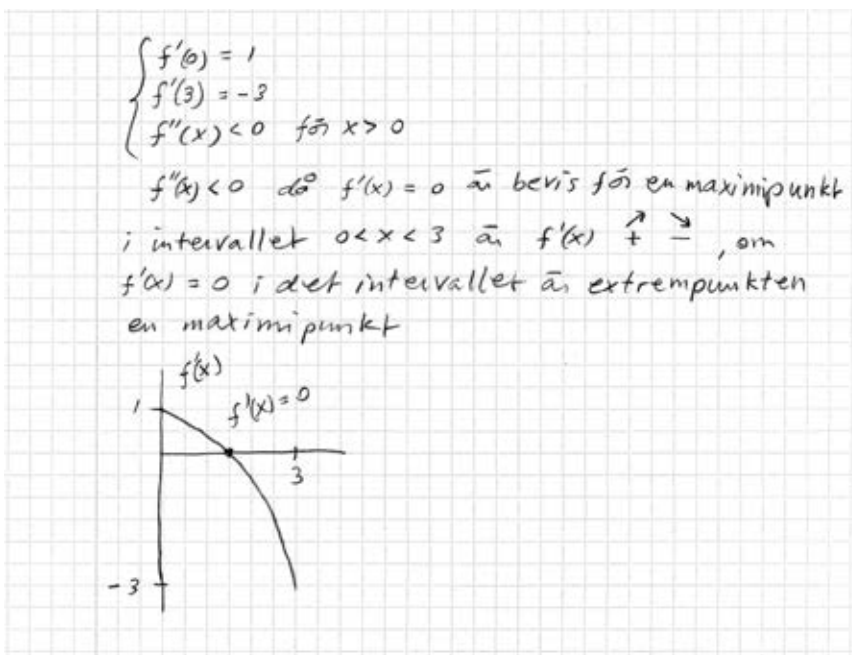
+1 vg

visar att det finns en maximipunkt mellan  $x = 0$  och  $x = 3$

+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa med hjälp av andraderivatan att funktionen endast har en extrempunkt för $x > 0$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa tydligt och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (2 vg)**

*Kommentar:* Eleven ger ett korrekt svar men använder inte andraderivatan för att visa att funktionen endast har en extrempunkt för  $x > 0$ . MVG-kvaliteten som rör redovisning och matematiskt språk kan inte bedömas då redovisningen inte är tillräckligt omfattande.

**Elevlösning 2 (2 vg och en av MVG-kvaliteterna)**

$f'(0) = 1$     $f'(3) = -3$     $f''(x) < 0$  för  $x > 0$   
 Det finns en extrempunkt mellan  $x=0$  och  $x=3$ . Det är en maxpunkt  
 Det finns endast en extrempunkt  
 $f$  stiger vid  $x=0$  och minskar vid  $x=3$   
 En maxpunkt däremellan alltså. Då andraderivatatan är under noll hela vägen efter  $x=0$  vet man att första derivatan minskar hela tiden  $f$  kommer aldrig att stiga igen.

Eleven gör ingen tydlig koppling till villkoren för derivatan.

Eleven använder ett vardagligt språkbruk.

Elevens koppling mellan funktionen och dess derivata är ganska vag.

*Kommentar:* Eleven visar MVG-kvalitet genom att använda andraderivatatan för att visa att funktionen endast har en extrempunkt för  $x > 0$ , men det matematiska språket är bristfälligt och tankegången är inte helt tydlig och klar. MVG-kvalitet för redovisning och matematiskt språk hade kunnat visas med någon eller några förbättringar i enlighet med kommentarerna ovan.

**16.**

**Max 0/3/□**

Godtagbar ansats, t ex eleven tecknar uttryck för  $\sin 15^\circ$  och  $\sin 20^\circ$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbar lösning ( $x = 41^\circ$ ) +1-2 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	ställa upp relevanta matematiska samband för att lösa problemet.*
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

\* Eftersom denna uppgift kräver MVG-kvalitet för sin lösning så kommer godtagbara elevlösningar att ge vg-poäng och visa på MVG-kvaliteter på samma gång.

## Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

17.

Max 3/4/□

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Totalpoäng
	Lägre		Högre	
<p><b>Metodval och genomförande</b>  <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.</i></p> <p><i>Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	<p>Eleven genomför godtagbart konstruktioner och beräkning enligt första punkten.</p> <p><b>1-2 g</b></p>	<p>Eleven genomför godtagbart konstruktioner och beräkning enligt första och andra punkten.</p> <p><b>2 g och 1 vg</b></p>	<p>Eleven genomför godtagbart konstruktioner och beräkning enligt första och andra punkten</p> <p>Gör en ansats till generell lösning t ex bestämmer <math>L = \pi - 2x</math></p> <p><b>2 g och 2 vg</b></p>	<b>2/2</b>
<p><b>Matematiska resonemang</b>  <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</i></p>	<p>Eleven drar slutsatsen att den konstruerade linjen är en tangent baserad på figuren.</p> <p><b>1 g</b></p>	<p>Eleven drar slutsatsen att den konstruerade linjen är en tangent genom att visa att <math>y' = \sin\left(\frac{L}{2}\right)</math> i någon punkt</p> <p><b>1 g och 1 vg</b></p>		<b>1/1</b>
<p><b>Redovisning och matematiskt språk</b>  <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>		<p>Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt.</p> <p><b>1 vg</b></p>		<b>0/1</b>
<b>Summa</b>				<b>3/4</b>

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	formulera att lutningen är $k = \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right)$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra ett bevis för att de konstruerade linjerna är tangenter till sinuskurvan
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen omfattar i stort sett hela uppgiften

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17**

I de följande givna elevlösningarna har elevernas konstruktion av de räta linjerna  $L_1$  och  $L_2$  utelämnats.

**Elevlösning 1 (3 g och 2 vg)**

- Längd  $L_1 = 2,5 - 0,64 = 1,86$   
 $k_1 = \sin \frac{1,86}{2} \approx 0,8$
- Längd  $L_2 = 2,1 - \frac{\pi}{3}$   
 $\sin\left(\frac{2,1 - \frac{\pi}{3}}{2}\right) = \sin\left(1,05 - \frac{\pi}{6}\right)$   
 $k_2 = \sin\left(1,05 - \frac{\pi}{6}\right) \approx 0,5$
- Egenskapen linjen har är att den ger lutningen på grafen  $y = \sin(x)$  i kordernas vänstra punkt. Det blir alltså samma sak som att derivera grafen och räkna ut derivatan i den punkten.
- $y = \sin x$   
 $y' = \cos x$   
 $y'(0,64) = \cos(0,64) \approx 0,8$   
 $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$   
 Värdena blir lika som i de föregående uppgifterna.

**Bedömning**

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	— $\times$ —————→	2/0	Eleven gör ingen exakt beräkning för den andra punkten och genomför ingen generell analys.
Matematiska resonemang	— $\times$ —————→	1/1	Eleven nämner inte tangent men skriver att linjen ger lutningen på grafen till $y = \sin x$ och kopplar detta till derivatan. Eleven bekräftar slutsatsen genom att beräkna derivatans värde för de givna punkterna.
Redovisning och matematiskt språk	— $\times$ —————→	0/1	Redovisningen saknar vissa moment.
<b>Summa</b>		<b>3/2</b>	



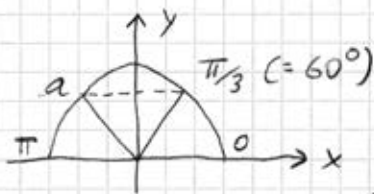
## Elevlösning 2 (2 g och 3 vg)

$$L_1 \approx 2,5 - 0,64 = 1,86$$

$$k_1 = \sin\left(\frac{L_1}{2}\right) = \sin\left(\frac{1,86}{2}\right) \approx 0,8$$

$L_2$ s vänstra ändpunkt är på  $x = \frac{\pi}{3}$

Då detta är en kurva  $y = \sin x$  kan man använda sig av enhetscirkeln för att ta reda på vilket värde den högra kordans ändpunkt befinner sig på (och därmed kunna beräkna längden\* för  $L_1$ ) eftersom denna kurva är i intervallet  $0 \leq x \leq \pi$  kommer sinusvärdet ge två stycken vinklar:



$$a = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$L_2 \text{ s längd} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi - \pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{L_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi/3}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 0,5$$

$$k_2 = \sin\left(\frac{L_2}{2}\right) = 0,5$$

\* eftersom längden blir skillnaden mellan x-värdena, det högra x-värdet - det vänstra x-värdet

Dessa rätta linjer får man fram genom att en korda/kordor är parallellt dragna med x-axeln på kurvan  $y = \sin x$ . Man måste sedan ta reda på kordans längd  $L$  så att man kan rita upp den rätta linjen med lutningen  $k = \sin\left(\frac{L}{2}\right)$ .

Alla räta linjerna går genom kordans vänstra ändpunkt och har en lutning  $-1 \leq k \leq 1$  (då  $\sin v$  kan max bli 1 och minst -1) och har lutningen  $k = \sin\left(\frac{L}{2}\right)$ , alltså  $\sin$ -värdet för kordans längd dividerat med 2

Generellt:

Antag att vi har ett  $x$ -värde  $v$  och att på kurvan  $y = \sin x$  drar vi en korda. Den vänstra ändpunkten kommer att ha  $x = v$  och den högra ändpunkten kommer att befinna sig på  $x = (\pi - v)$  kordans längd blir då:

$$L = (\pi - v) - v = \pi - v - v = \pi - 2v$$

Den räta linjens lutning blir då:

$$k = \sin\left(\frac{\pi - 2v}{2}\right)$$

Ex:  $x = v = \frac{\pi}{3}$

$$k = \sin\left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2}\right) = 0,5$$

alltså samma värde som jag fick fram på punkt 2

Ex:  $x = v = 0,64$

$$k = \sin\left(\frac{\pi - 2 \cdot 0,64}{2}\right) \approx 0,8 \text{ (punkt 1)}$$

### Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		2/2	Eleven tar fram ett generellt uttryck för k.
Matematiska resonemang		0/0	Eleven gör ingen tolkning av egenskapen och gör ingen koppling till derivatan.
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Redovisningen är lätt att följa och det matematiska språket är acceptabelt, men redovisningen är inte fullständig.
<b>Summa</b>		<b>2/3</b>	

## Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$\begin{aligned}
 & \bullet L_1 = 2,5 - 0,64 = 1,86 \\
 & \quad k_1 = \sin \frac{1,86}{2} = 0,80 \\
 & \bullet L_2 = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \\
 & \quad k_2 = \sin \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
 & \bullet \text{Linjerna blir tangenter} \\
 & \quad \text{kallar } L_1 \text{ och } L_2 \\
 & \quad y = \sin x \qquad y' = \cos x \\
 & \quad y' = \cos 0,64 \approx 0,82 \\
 & \quad y' = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5 \\
 & \quad y' = \sin \frac{\pi - 2x}{2} = \cos x, \quad L \text{ är ju } \pi - 2x
 \end{aligned}$$

## Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—		X →	2/2	
Matematiska resonemang	—		X →	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	—		X →	0/1	
<b>Summa</b>				<b>3/4</b>	

*Kommentar:* Eleven visar MVG-kvalitet genom att inse att  $y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right)$

ska visas, men genomför inte beviset. Redovisningen är möjlig att följa och täcker i stort sett hela uppgiften och det matematiska språket är korrekt men redovisningen är inte tillräckligt utförlig och heltäckande för att anses visa MVG-kvalitet.

## Elevlösning 4 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

$$L_1 = \pi - 2 \cdot 0,64 = 1,861$$

$$k_1 = \sin\left(\frac{L_1}{2}\right) = 0,80$$

$$L_2 = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$k_2 = \sin\left(\frac{L_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$$

Alla räta linjer som tillverkas på detta är tangenter till den vänstra ändpunkten på kordan. Dvs de har samma lutning som kurvan har i vänstra ändpunkten av kordan.

Lutningen för kurvan är :

$$y' = \cos x$$

Antag att vänstra ändpunkten för kordan ligger på  $0^\circ$   $\Rightarrow$

$$L = \pi - 2x \Rightarrow$$

$$k = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right) = \sin(0,5\pi - x) = \sin 0,5\pi \cdot \cos x + \cos 0,5\pi \cdot \sin x$$

$$\sin 0,5\pi = 1 \quad \& \quad \cos 0,5\pi = 0 \Rightarrow$$

$$k = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x = y' \quad \text{vsb!}$$

## Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—		—	2/2	
Matematiska resonemang	—		—	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	—		—	0/1	
<b>Summa</b>				<b>3/4</b>	

*Kommentar:* Eleven visar två av MVG-kvaliteterna när eleven visar att de konstruerade linjerna bildar tangenter till kurvan genom att visa att uttrycket för linjens riktningskoefficient är detsamma som för kurvans derivata. Eleven visar en tredje MVG-kvalitet genom en redovisning som är välstrukturerad och tydlig och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

## Mål för matematik kurs D

### Kursplan 2000

#### Trigonometri (T)

T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

#### Differential- och integralkalkyl (D)

D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

#### Övrigt(Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

## **Betygskriterier 2000**

### **Kriterier för betyget Godkänt**

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

### **Kriterier för betyget Väl godkänt**

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

### **Kriterier för betyget Mycket väl godkänt**

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

## Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→	→		
Matematiska resonemang	—	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→	→		
<b>Summa</b>					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→	→		
Matematiska resonemang	—	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→	→		
<b>Summa</b>					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→	→		
Matematiska resonemang	—	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→	→		
<b>Summa</b>					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→	→		
Matematiska resonemang	—	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→	→		
<b>Summa</b>					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	—	→	→		
Matematiska resonemang	—	→	→		
Redovisning och matematiskt språk	—	→	→		
<b>Summa</b>					

## Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevers namn: .....	Uppgift (α-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9b	15	16	17	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Elevers namn: .....	Uppgift (α-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9b	15	16	17	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Elevers namn: .....	Uppgift (α-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9b	15	16	17	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					



## **Insamling av provresultat**

Höstterminen 2007 kommer resultat från alla skolor att samlas in. Denna insamling av **resultat sker på uppgiftsnivå för elever födda vissa datum**. Dessutom ombeds läraren att besvara en enkät och skicka in bedömda elevlösningar. Dessa resultat skickas till provinstitutionen.

### **För matematik kurs D gäller följande:**

**Elevresultat** rapporteras **för elever födda den 4:e, 24:e, 25:e och 30:e varje månad** på en webbplats som nås via <http://www.umu.se/edmeas/np>. I samband med resultatredovisningen fyller varje lärare i en **lärarenkät** som finns på samma webbplats.

**Bedömda elevlösningar** till proven skickas in per post för **elever födda den 4:e i varje månad**.

*De bedömda elevlösningarna skickas till:*

**Umeå universitet  
Institutionen för beteendevetenskapliga  
mätningar  
Nationella prov  
901 87 Umeå**

Mer information om insamlingen av resultat, lärarenkäter och elevlösningar medföljer provmaterialet. Där delges bland annat det lösenord som behövs för att kunna logga in på webbsidan för resultatredovisning.

För mer information kontakta:

Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet  
Monika Kriström, tel: 090-786 59 22, e-post: [monika.kristrom@edmeas.umu.se](mailto:monika.kristrom@edmeas.umu.se)