NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D HÖSTEN 2008

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 120 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I**: ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II**: Grafritande eller symbolhanterande räknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 16 uppgifter. **Del I** består av 9 uppgifter och **Del II** av 7 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras)* behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 9 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 44 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. Undre gräns för provbetyget Godkänt: 13 poäng. Väl godkänt: 25 poäng varav minst 6 vg-poäng. Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 13 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de ¤-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = 8x^3 + 4x + 1$

Endast svar fordras (1/0)

2. a) Uttryck 3π i grader. *Endast svar fordras* (1/0)

b) Uttryck $20°$ i radianer. *Endast svar fordras* (1/0)

3. Derivera

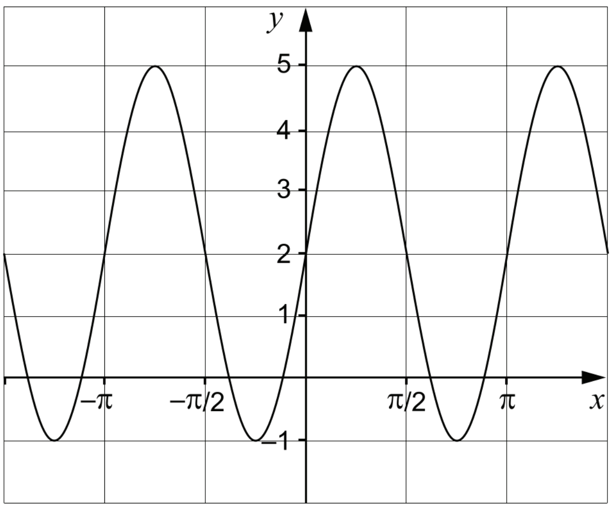
a) $f(x) = 4\sin 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $f(x) = \ln(2x + 1)$ *Endast svar fordras* (0/1)

4. Beräkna integralen $\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$ (2/0)

5. Kurvan nedan kan skrivas på formen $y = A\sin kx + b$



a) Bestäm värdet på konstanterna A och b. *Endast svar fordras* (2/0)

b) Bestäm värdet på konstanten k. (0/1)

6. Rita grafen till en funktion f där $y = f(x)$ som uppfyller

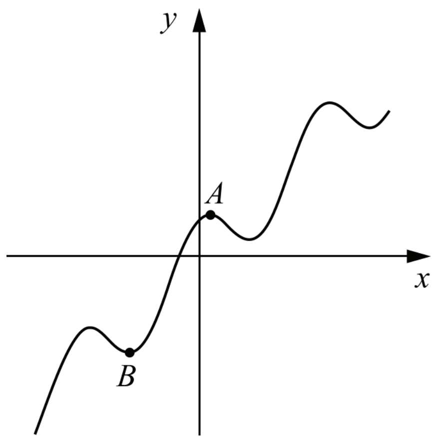
villkoret att $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$ (0/2)

7. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt.
Glöm inte att motivera.

a) $\cos\frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (0/1)

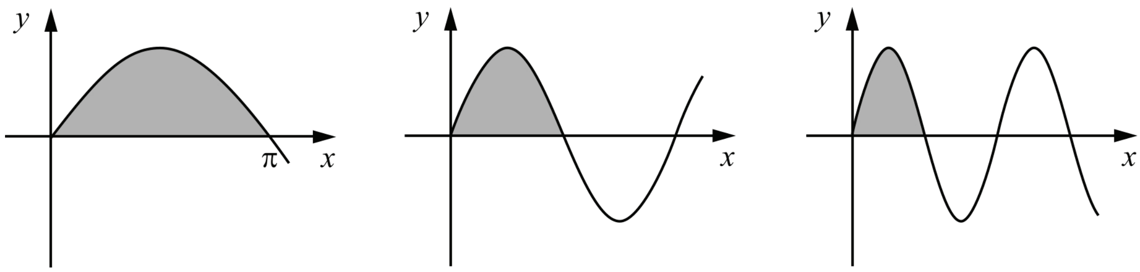
b) $\tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ (0/1)

8. Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = x + \cos 2x$
Bestäm x-koordinaten för den lokala maximipunkten vid A och den lokala minimipunkten vid B. (1/2)



Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

9. I figurerna nedan är delar av graferna till kurvor av typen $y = \sin kx$ ritade för $k = 1$, $k = 2$ och $k = 3$. I varje figur är ett område skuggat. Din uppgift är att undersöka om det finns ett samband mellan arean av det skuggade området och värdet på konstanten *k*.



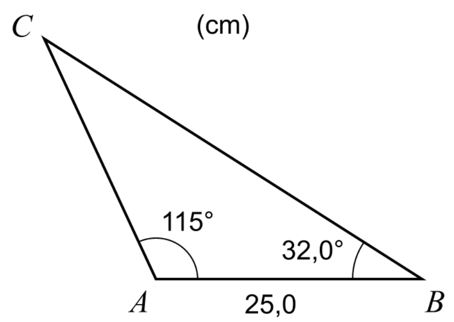
- Beräkna arean av de skuggade områdena i de tre fallen ovan.
- Använd dina resultat för att formulera ett påstående om hur arean av de skuggade områdena beror av *k*.
- Visa att detta påstående är sant för alla $k > 0$

(2/4/¤)

Del II

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

10. Triangeln ABC är given enligt figuren nedan.



a) Bestäm längden av sidan BC. (2/0)

b) Beräkna triangelns area. (1/0)

11. Folkmängden i en region beräknas öka med hastigheten $650\,e^{0,4t}$ personer/år, där t är tiden i år räknat från början av år 2008.

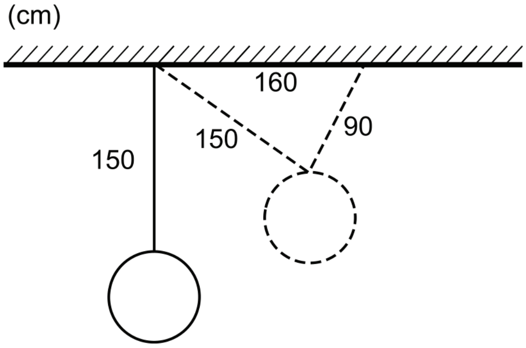
a) Beräkna integralen $\int_0^8 650\,e^{0,4t}\,dt$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) Tolka vad $\int_0^8 650\,e^{0,4t}\,dt$ betyder i detta sammanhang. (0/1)

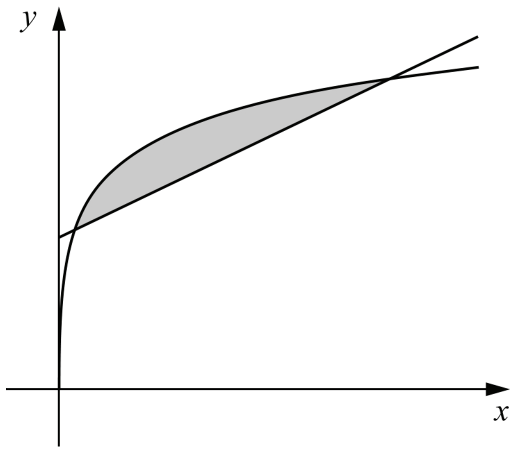
12. Stina och Nisse har en lampa över soffbordet. Ibland vill de höja lampan så att den inte skymmer sikten. Lampan hänger i taket i en lina som är 150 cm lång. På avståndet 160 cm från takfästet har de en krok och därifrån fäster de en 90 cm lång lina till lampan.

Hur mycket högre kommer lampan att hänga när man fäster den på det sättet? (3/0)

(Mätning i figur godtas ej)



13. Ett område innesluts av kurvan $y = 5 + \ln x$ och linjen $y = x + 3$



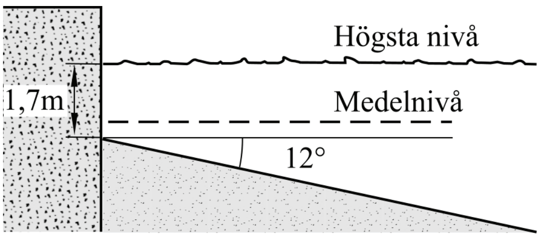
a) Bestäm x-koordinaterna för kurvornas skärningspunkter med tre decimalers noggrannhet. (1/0)

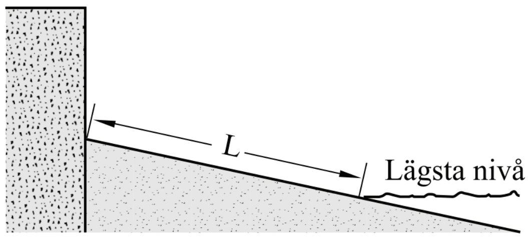
b) Bestäm arean av det skuggade området med två decimalers noggrannhet. (0/2)

14. Tidvattnet gör att vattennivån i en hamn varierar kring en medelnivå enligt

$y = 1{,}5 \sin \dfrac{\pi}{6} t$ där y är vattennivån i meter och t är tiden i timmar från kl. 06.00

Under delar av dygnet når inte vattnet hela vägen fram till en kaj i hamnen utan en del av havsbottnen torrläggs. Havsbottnens lutning är jämn och bildar vinkeln $12°$ med vattenytan. Vattnets maximala djup vid kajen är 1,7 meter.





a) Hur lång sträcka L, längs med havsbottnen, ut från kajen är torrlagd när vattnet står som lägst? (1/1)

b) När på dygnet står vattnet som lägst? (1/1)

15. Figuren nedan visar teckenschemat för en funktion f vars derivata har två nollställen och vars andraderivata har två nollställen. Andraderivatans tecken mellan nollställena är markerade.

x		a		b		c	
$f'(x)$		0				0	
$f''(x)$	+	+	+	0	–	0	–

Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Glöm inte att motivera.

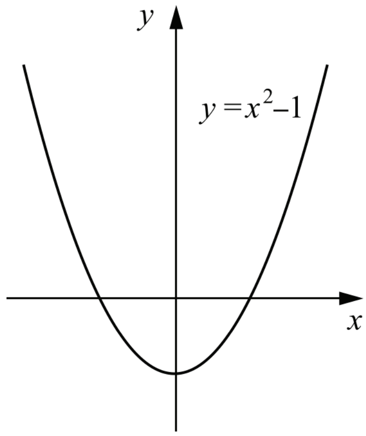
a) Funktionen f har ett maximum för $x = a$ (0/1)

b) Derivatan f' har ett maximum för $x = b$ (0/1)

c) Funktionen f har ett maximum för $x = c$ (0/1/¤)

16. Undersök integralen $\int_a^b (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$ då $a < b$

Bestäm vilka värden integralen kan anta. (0/2/¤)



Innehåll

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 6, 7, 8, 12, 13 och 14 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 6, 7, 8, 9, 11, 14, 15 och 16. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 1, 2, 3, 4, 5, 10, 13 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 6, 8, 9, 12, 13 och 16.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2008 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte)

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Uppgift nr	g poäng	vg poäng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	1	0													x			x		x												
2a	1	0						x										x														
2b	1	0						x										x														
3a	1	0									x							x														
3b	1	0									x							x														
3c	0	1									x											x										
4	2	0													x			x		x												
5a	2	0						x										x														
5b	0	1						x														x			x							
6	0	2															x					x	x	x								
7a	0	1					x		x													x	x	x	x							
7b	0	1					x		x													x	x	x	x							
8	1	2			x		x		x		x							x	x	x		x		x	x	x						
9	2	4	¤						x						x			x	x	x		x	x	x	x			x	x	x		
10a	2	0								x								x		x												
10b	1	0								x								x		x												
11a	1	0													x			x		x												
11b	0	1														x							x	x								
12	3	0								x								x	x	x												
13a	1	0											x			x		x	x	x												
13b	0	2															x					x	x	x	x							
14a	1	1						x		x								x	x	x		x	x	x	x							
14b	1	1						x										x	x	x		x	x	x	x							
15a	0	1										x										x	x	x	x							
15b	0	1										x										x	x	x	x			x		x		
15c	0	1	¤									x										x	x	x	x			x	x	x		
16	0	2	¤													x						x	x	x	x				x	x		
Σ	22	22		0/1			12/8				10/13																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt:	13 poäng.
Väl godkänt:	25 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänt:	25 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift		
MVG-kvalitet	9	15c	16
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	○		
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet			○
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	○	○	○
Värderar och jämför metoder/modeller			
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	○	○	○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2008)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		**Max 1/0**
	Korrekt svar **(** $F(x)=2x^4+2x^2+x$ **)**	+1 g
2.		**Max 2/0**
	Korrekt svar (540°)	+1 g
	Korrekt svar $\left(\frac{\pi}{9}\right)$	+1 g
3.		**Max 2/1**
a)	Korrekt svar **(** $f'(x)=12\cos 3x$ **)**	+1 g
b)	Korrekt svar **(** $f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x$ **)**	+1 g
c)	Korrekt svar $\left(f'(x)=\frac{2}{2x+1}\right)$	+1 vg
4.		**Max 2/0**
	Korrekt primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar $\left(\frac{2}{3}\right)$	+1 g

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
5.		**Max 2/1**
a)	Korrekt svar ($A = 3, b = 2$)	+1-2 g
b)	Korrekt svar med motivering ($k = 2$)	+1 vg
6.		**Max 0/2**
	Godtagbar ansats, t ex inser att kurvan kan väljas så att det bildas ett område med arean 1 ae	+1 vg
	Ritar en tydlig figur där det klart framgår att villkoret är uppfyllt	+1 vg
7.		**Max 0/2**
a)	Korrekt svar med godtagbar motivering (Falskt)	+1 vg
b)	Korrekt svar med godtagbar motivering (Sant)	+1 vg
8.		**Max 1/2**
	Korrekt derivering, $1 - 2\sin 2x$	+1 g
	Godtagbar bestämning av x-koordinaten för punkten A $\left(\frac{\pi}{12}\right)$	+1 vg
	Godtagbar bestämning av x-koordinaten för punkten B $\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$	+1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

9. **Max 2/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

<table>
<tr><th>Bedömningen avser</th><th colspan="4">Kvalitativa nivåer
Lägre → Högre</th><th>Total-
poäng</th></tr>
<tr><td>Metodval och genomförande
I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.

Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</td><td>Eleven bestämmer arean korrekt för något specialfall.

1 g</td><td colspan="2">Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att bestämma arean korrekt för alla tre specialfallen $\left(2\,\text{ae}, 1\,\text{ae}, \frac{2}{3}\text{ae}\right)$

1 g och 1 vg</td><td>Eleven påbörjar en generell undersökning, t ex bestämmer integrationsgränserna för det generella fallet.

1 g och 2 vg</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>Matematiska resonemang
Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</td><td colspan="2">Eleven drar en relevant slutsats utifrån specialfallen,
t ex
”Arean minskar då k ökar.”

1 g</td><td colspan="2">Eleven drar slutsatsen att det skuggade områdets area är $\frac{2}{k}$. Slutsatsen baseras på ytterligare specialfall
eller en generell lösning.

1 g och 1 vg</td><td>1/1</td></tr>
<tr><td>Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet
Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Redovisningen är lätt att följa och förstå, det matematiska språket är acceptabelt.

1 vg</td><td>0/1</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td colspan="4"></td><td>2/4</td></tr>
</table>

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	behandla det generella fallet, t ex teckna ett korrekt uttryck för arean av det skuggade området $\int_0^{\pi/k} \sin kx \, dx$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	utföra ett korrekt bevis i det generella fallet, det vill säga visa att arean blir $\frac{2}{k}$ ae
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 9

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

- 1) $f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x + C$

För att få reda på nollställena satte jag funktionen lika med noll.

$f(x) = 0$

$\sin x = 0$

$x_1 = 0 + n \cdot 2\pi \qquad x_2 = \pi + n \cdot 2\pi$

$$A = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^{\pi} = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1-(-1) = 2 \text{ a.e.}$$

2) $f(x) = \sin 2x$

$F(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + C$

$f(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$

$x_1 = 0 + n \cdot \pi$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$$A = \int_0^{\pi/2} (\sin 2x)\,dx = \Big[-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{-\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{2} - \frac{-\cos 0}{2} = \frac{-(-1)}{2} - \frac{-1}{2} = 1 \text{ a.e.}$$

3) $f(x) = \sin 3x$

$F(x) = \frac{-\cos 3x}{3} + C$

$\sin 3x = 0$

$x_1 = 0 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

$x_2 = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

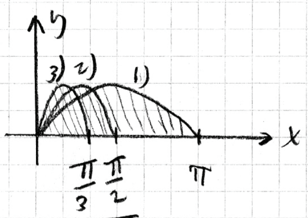
$$A = \int_0^{\pi/3} (\sin 3x)\,dx = \Big[\frac{-\cos 3x}{3}\Big]_0^{\pi/3} = \frac{-\cos(3 \cdot \frac{\pi}{3})}{3} - \frac{-\cos 0}{3} = \frac{-(-1)}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3} \text{ a.e.}$$

- $\boxed{A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x_1}^{x_2}}$ slutsats ?

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/1	Eleven bestämmer arean för alla tre specialfallen.
Matematiska resonemang		0/0	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	Redovisningen omfattar för liten del av uppgiften.
Summa		**1/1**	

Elevlösning 2 (2 g och 4 vg)



1) $f(x) = \sin x \quad F(x) = -\cos x$

2) $f(x) = \sin 2x \quad F(x) = \frac{-\cos 2x}{2}$

3) $f(x) = \sin 3x \quad F(x) = \frac{-\cos 3x}{3}$

1) $A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0) =$

$= -\cos \pi - (-\cos 0) = \underline{\underline{2 \text{ a.e.}}}$

2) $A = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx = F(\tfrac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{-\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} - \left(\frac{-\cos 2 \cdot 0}{2}\right) = \underline{\underline{1 \text{ a.e.}}}$

3) $A = \int_0^{\pi/3} \sin 3x \, dx = F(\tfrac{\pi}{3}) - F(0) = \frac{-\cos 3 \cdot \frac{\pi}{3}}{3} - \left(-\frac{\cos 3 \cdot 0}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3} \text{ a.e.}}}$

Funktion	k-värde	Area
$f(x) = \sin x$	$k = 1$	2 a.e.
$f(x) = \sin 2x$	$k = 2$	1 a.e.
$f(x) = \sin 3x$	$k = 3$	$\frac{2}{3}$ a.e.

I alla här funktionerna verkar det som om arean blir $\frac{2}{k}$ a.e. :

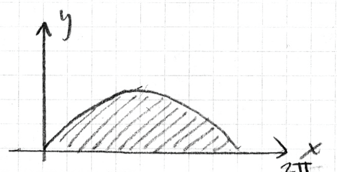
$f(x) = \sin x \quad k=1 \quad A = \frac{2}{1} = 2$ a.e.

$f(x) = \sin 2x \quad k=2 \quad A = \frac{2}{2} = 1$ a.e.

$f(x) = \sin 3x \quad k=3 \quad A = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ a.e.

Det verkar som om areans storlek beror av funktionens k-värde, där $\frac{2}{k}$ blir den markerade arean i grafen

- För att hitta en generell metod för areabestämning av typen $f(x) = \sin kx$ ritar vi först upp en koordinatatel



Arean vi är intresserade av finns mellan $0 \le x \le \frac{p}{2}$

$p = \frac{2\pi}{k}$ $\quad \frac{p}{2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2}{1}} = \frac{\pi}{k}$

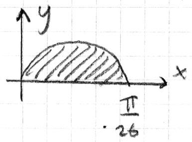
Vi kan skriva om $0 \le x \le \frac{p}{2}$ till $0 \le x \le \frac{\pi}{k}$

Som jag nämde tidigare verkar det som om arean av funktionerna blev $A = \frac{2}{k}$ Vi undersöker detta påstående på några andra funktioner

Ex 1

$f(x) = \sin 26x \quad , k = 26$

$F(x) = \frac{-\cos 26x}{26}$



Metod 1

$$A = \int_0^{\pi/26} \sin 26x\,dx = \left[-\frac{\cos 26x}{26}\right]_0^{\pi/26} =$$

$$= \frac{-\cos\pi}{26} - \left(\frac{-\cos 0}{26}\right) = \frac{1}{26} + \frac{1}{26} = \frac{1}{13} \text{ a.e.}$$

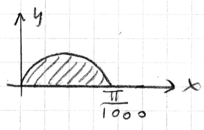
Metod 2

$$A = \frac{2}{k} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \text{ a.e.}$$

Ex 2

$f(x) = \sin 1000x$

$F(x) = -\frac{\cos 1000x}{1000}$

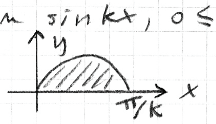


Metod 1: $A = \int_0^{\pi/1000} \sin 1000x\,dx = \left[-\frac{\cos 1000x}{1000}\right]_0^{\pi/1000} =$

$$= \frac{-\cos\pi}{1000} - \left(\frac{-\cos 0}{1000}\right) = \frac{2}{1000} \text{ a.e.}$$

Metod 2: $A = \frac{2}{k} = \frac{2}{1000}$ a.e.

Slutsats: för areabestämning för funktioner av typen $\sin kx$, $0 \le x \le \frac{\pi}{k}$, gäller det att $A = \frac{2}{k}$, $k \neq 0$



Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/2	Eleven påbörjar en generell undersökning genom att bestämma integrationsgränserna för det generella fallet.
Matematiska resonemang	X	1/1	Eleven drar en korrekt slutsats och testar denna mot några väl valda egna exempel.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/4**	

Elevlösning 3 (2 g och 4 vg och två av MVG-kvaliteterna)

- $y = \sin kx$ $\quad k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 3$

$y_1 = \sin x$ $\quad$ Period $= 360°$

$y_2 = \sin 2x$ $\quad$ Period $= 180°$

$y_3 = \sin 3x$ $\quad$ Period $= 120°$

Grafen skär x-axeln vid halva perioden

Det ger ~~a = 0 och b = P/2~~ integrationsgränserna 0 och $\frac{P}{2}$

~~$A = \int_0^{180} \sin x \, dx$~~

~~För att räkna ut en integral~~

$$1 \quad A = \int_0^{180°} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{180°} = -\cos 180° - (-\cos 0) =$$

$$= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2 \text{ ae}$$

$$2. \quad A = \int_0^{90°} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{90°} = -\frac{\cos 180°}{2} - \left(-\frac{\cos 0°}{2}\right) =$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ae}$$

$$3. \quad A = \int_0^{60°} \sin 3x \, dx = \left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{60°} = -\frac{\cos 180°}{3} - \left(-\frac{\cos 0°}{3}\right) =$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ a.e}$$

6 Om k ökar minskar perioden vilket i sin tur ger mindre värde på övre gränsen.

En allmän formel ser ut så här

$$A=\int_0^{\frac{180^\circ}{k}} \sin kx\,dx = \frac{2}{k}$$

Det leder till

$$A=\int_0^{\frac{180^\circ}{k}} \sin kx\,dx = \left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\frac{180^\circ}{k}} =$$

$$= -\frac{\cos k\cdot\frac{180^\circ}{k}}{k} - \left(-\frac{\cos k\cdot 0}{k}\right) =$$

$$= -\frac{\cos 180^\circ}{k} + \frac{\cos 0}{k} = \frac{1+1}{k} = \frac{2}{k}$$

Vilket är samma värde jag fått ut genom försöken med de ritade graferna.
Så för alla sinusfunktioner av typen $y = \sin kx$ gäller

$$A=\int_0^{\frac{180^\circ}{k}} \sin kx\,dx = \frac{2}{k}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/2	
Matematiska resonemang	X	1/1	Eleven visar i huvudsak korrekt hur arean beror av *k* även om denne använder grader i stället för radianer.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/4**	

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att behandla det generella fallet och i huvudsak visa hur arean beror av *k* även om uttrycket för arean inte i strikt mening är korrekt då eleven använder grader i stället för radianer. Detta har ingen praktisk betydelse för problemet eftersom eleven i övrigt behandlar funktionerna som om det vore radianer, men det innebär att eleven inte anses visa den MVG-kvalitet som rör beviset för det generella fallet. Eleven visar nätt och jämt MVG-kvalitet när det gäller redovisning och matematiskt språk. Redovisningen är välstrukturerad men kopplingen mellan integrationsgränserna, perioden och *k* kunde visas tydligare.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
10.		**Max 3/0**
a)	Godtagbar ansats, t ex använder sinussatsen för att ställa upp en korrekt ekvation för bestämning av *BC*	+1 g
	med godtagbar beräkning av svaret (41,6 cm)	+1 g
b)	Godtagbar beräkning av arean ($276\,\text{cm}^2$)	+1 g
11.		**Max 1/1**
a)	Godtagbart svar (38000)	+1 g
b)	Godtagbar tolkning (”Folkökningen under de kommande 8 åren”)	+1 vg
12.		**Max 3/0**
	Redovisad godtagbar ansats, t ex beräknar en vinkel korrekt	+1 g
	med i övrigt redovisad godtagbar lösning (67 cm)	+1-2 g
13.		**Max 1/2**
a)	Godtagbar bestämning av x-koordinaterna (0,159 och 3,146)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex tecknar ett integraluttryck för arean	+1 vg
	med i övrigt godtagbar bestämning av arean (1,95 ae)	+1 vg

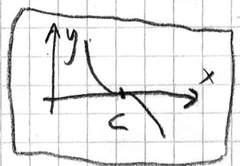
Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
14.		**Max 2/2**
a)	Godtagbar ansats, t ex inser att amplituden på funktionen är 1,5 m och att vattnets lägsta nivå är 1,5 m under medelnivån.	+1 g
	Godtagbar beräkning av den sökta sträckan (6,3 m)	+1 vg
b)	Godtagbar beräkning av en av tidpunkterna	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning (kl. 15.00 och kl. 03.00)	+1 vg
15.		**Max 0/3/¤**
a)	Anger att påståendet är falskt med godtagbar motivering	+1 vg
b)	Anger att påståendet är sant med godtagbar motivering	+1 vg
c)	Anger att påståendet är sant med en ansats till motivering	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	med ett resonemang visa att f har ett maximum för $x = c$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Ett exempel på elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg och två av MVG-kvaliteterna)

c) Påståendet är sant. Enligt teckenstudium
för andraderivatan så borde grafen
för $f'(x)$ se ut:



Alltså har
den positivt
värde då $x < c$
och negativt värde då $x > c$. Funktionen f
borde alltså ha ett maximivärde då $x = c$

Kommentar: I sitt resonemang beskriver eleven derivatans utseende utifrån teckenstudium av andraderivatan och motiverar funktionens maximum med derivatans teckenväxling. Kopplingen mellan andraderivatans tecken och dess betydelse för lutningen hos derivatan är dock inte beskriven. Sammantaget bedöms ändå eleven visa MVG-kvalitet med sitt resonemang. Eleven visar också MVG-kvalitet genom att redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

16. **Max 0/2/¤**

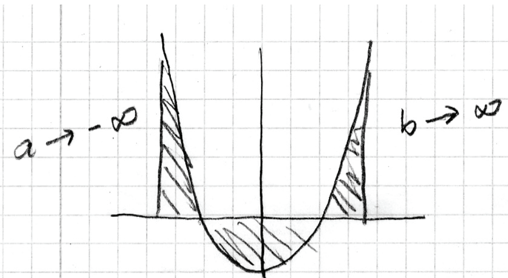
Godtagbar ansats, t ex inser att integralen har ett minsta värde då man integrerar mellan nollställena eller inser att integralen kan anta godtyckligt stora värden +1 vg

Godtagbar beräkning av det minsta värdet $\left(-\frac{4}{3}\right)$ +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med ett godtagbart resonemang dra slutsatsen att integralen kan anta godtyckligt stora värden.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	med ett resonemang visa att det finns ett minsta värde.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)



Integralen kan omfatta en oändligt stor yta om $b \to \infty$ eller $a \to -\infty$

Kommentar: Eleven antyder att integralen kan tolkas som arean under kurvan och att denna kan bli hur stor som helst, däremot är det oklart hur eleven tolkar den skuggade delen under *x*-axeln. Sammantaget bedöms detta vara en godtagbar ansats och ger därför en vg-poäng.

Elevlösning 2 (2 vg)

$$\int_a^b (x^2-1)\,dx \qquad 0<b$$

$$\int_a^b (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_a^b = \frac{b^3}{3}-b-\frac{a^3}{3}+a \qquad 0<b$$

Man ser i figuren att
Det minsta värdet får man om $a=-1$ och $b=1$
Integralen får då minimivärdet

$$\frac{1}{3}-1-\frac{(-1)}{3}-1=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$

Kommentar: Eleven visar insikt om att integralen från -1 till 1 ger det minsta värdet och beräknar detta men motiverar inte att det är det minsta värdet.

Elevlösning 3 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$\int_a^b (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_a^b = \left(\frac{b^3}{3}-b\right)-\left(\frac{a^3}{3}-a\right)=$$

$$\frac{b^3}{3}-b-\frac{a^3}{3}+a \Rightarrow \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}+a-b$$

Test 1: Kan den anta stora värden?

$b=10^{20}, \quad a=-10^{20} \Rightarrow$

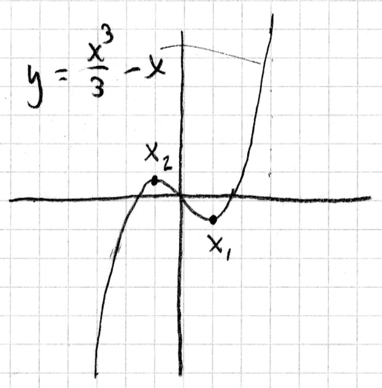
$$\frac{(10^{20})^3}{3}-\frac{(-10^{20})^3}{3}+(-10^{20}-10^{20}) \approx 6{,}7\cdot 10^{59}$$

Ja. Väldigt stora ($0=a$ och $+\infty=b$ ger $\int_a^b = \frac{\infty^3}{3}-\infty$
$=\infty$)

Kommentar: Eleven får en vg-poäng för insikten om att integralen kan anta godtyckligt stora värden och visar nätt och jämt MVG-kvalitet genom att motivera integralens övre gräns genom att låta *b* gå mot oändligheten i sitt resonemang. Det matematiska språket i detta sammanhang visar för stora brister för att anses visa MVG-kvalitet.

Elevlösning 4 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$$\int_a^b (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - b - \frac{a^3}{3} + a \qquad a < b$$



$x^2 - 1 = 0$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

Vändpunkter för $\frac{x^3}{3} - x$

$\int_a^b x^2 - 1\,dx$ är skillnaden i y-värde i grafen mellan punkterna med x-värdena a och b som kan läggas hur som helst på x-axeln så länge $a < b$

Det maximala värdet får man om a går mot $-\infty$ och b mot $+\infty$.

Det minsta värdet däremot får man då a:s y-värde är så högt över b:s som möjligt. Detta sker vid vändpunkterna. dvs om $a = -1$ och $b = 1$

Integralen får då minimivärdet

$$\frac{1}{3} - 1 - \frac{(-1)}{3} - 1 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att utifrån den primitiva funktionen och dess graf och extrempunkter motivera vad som ger det minsta värdet som integralen kan anta. Eleven visar också MVG-kvalitet genom att använda ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Tankegången är tillräckligt klar även om det inte tydligt framgår att det är derivatans nollställen som behandlas då eleven tar fram *x*-koordinaterna för extrempunkterna. Eleven avslutar inte sitt påbörjade resonemang om den övre gränsen för integralens värde.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		
Matematiska resonemang		
Redovisning och matematiskt språk		
Summa		

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		
Matematiska resonemang		
Redovisning och matematiskt språk		
Summa		

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		
Matematiska resonemang		
Redovisning och matematiskt språk		
Summa		

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		
Matematiska resonemang		
Redovisning och matematiskt språk		
Summa		

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		
Matematiska resonemang		
Redovisning och matematiskt språk		
Summa		

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)			Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	15c	16	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)			Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	15c	16	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)			Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	15c	16	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning				
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet				
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang				
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				

Insamling av provresultat

Höstterminen 2008 kommer resultat från alla skolor att samlas in. Denna insamling av **resultat sker på uppgiftsnivå för elever födda vissa datum.** Dessutom ombeds läraren att besvara en enkät och skicka in bedömda elevlösningar. Dessa resultat skickas till provinstitutionen.

För matematik kurs D gäller följande:

Elevresultat rapporteras för **elever födda den 1:a, 4:e, 16:e och 18:e varje månad** på en webbplats som nås via http://www.umu.se/edmeas/np. I samband med resultatredovisningen fyller varje lärare i en **lärarenkät** som finns på samma webbplats.

Bedömda elevlösningar till proven skickas in per post för **elever födda den 1:a i varje månad.**

De bedömda elevlösningarna skickas till:

Umeå universitet
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Nationella prov
901 87 Umeå

Mer information om insamlingen av resultat, lärarenkäter och elevlösningar medföljer provmaterialet. Där delges bland annat det lösenord som behövs för att kunna logga in på webbsidan för resultatredovisning.

För mer information kontakta:
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet
Monika Kriström, tel: 090-786 59 22, e-post: monika.kristrom@edmeas.umu.se