

Prov som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap. 4 § offentlighets- och sekretesslagen (2009:400). Avsikten är att detta prov ska kunna återanvändas t.o.m. 2015-12-31.
Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D HÖSTEN 2009

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 120 minuter för arbetet med Del I.						
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs D". <i>Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.</i> Del II: Grafitande eller symbolhanterande räknare och "Formler till nationellt prov i matematik kurs D".						
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. <i>Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.</i>						
Provet	Provet består av totalt 17 uppgifter. Del I består av 10 uppgifter och Del II av 7 uppgifter. Till några uppgifter (där det står <i>Endast svar fordras</i>) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 10 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.						
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 44 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med $\square$, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. Undre gräns för provbetyget <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 30%;">Godkänt:</td> <td>12 poäng.</td> </tr> <tr> <td>Väl godkänt:</td> <td>25 poäng varav minst 6 vg-poäng.</td> </tr> <tr> <td>Mycket väl godkänt:</td> <td>25 poäng varav minst 13 vg-poäng.</td> </tr> </table> Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de $\square$-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.	Godkänt:	12 poäng.	Väl godkänt:	25 poäng varav minst 6 vg-poäng.	Mycket väl godkänt:	25 poäng varav minst 13 vg-poäng.
Godkänt:	12 poäng.						
Väl godkänt:	25 poäng varav minst 6 vg-poäng.						
Mycket väl godkänt:	25 poäng varav minst 13 vg-poäng.						

Del I

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm den primitiva funktion F till $f(x) = 8x^3 + 4x$
som uppfyller villkoret $F(0) = 1$ (2/0)

2. Beräkna $\int_1^2 (3x^2 + 1)dx$ (2/0)

3. Derivera
 - a) $f(x) = 2 \sin 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)
 - b) $g(x) = x^3 \cdot e^x$ *Endast svar fordras* (1/0)
 - c) $h(x) = (2x + 1)^6$ *Endast svar fordras* (1/0)

4. Beräkna $\frac{\pi}{\cos \pi} + \frac{2\pi}{\cos 2\pi} + \frac{3\pi}{\cos 3\pi}$ *Endast svar fordras* (1/0)

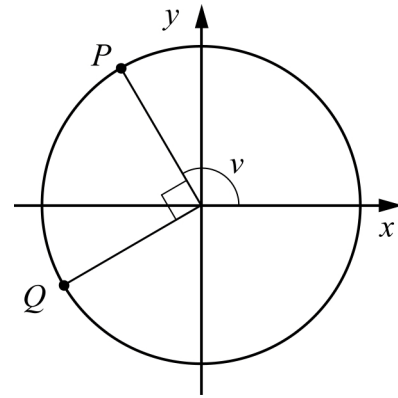
5. Låt $f(x) = 3 \sin x + b$
För vilka värden på b är $f(x) > 0$ för alla x ? *Endast svar fordras* (1/0)

6. Det gäller att $\sin 44^\circ \approx 0,69$
Använd detta för att bestämma alla lösningar till ekvationen $\sin 4x = 0,69$ (1/2)

7. Punkterna P och Q ligger på enhetscirkeln.

Vilket av följande alternativ A–E anger koordinaterna för punkten Q ?

- A $(\sin v, \cos v)$
- B $(-\sin v, -\cos v)$
- C $(-\cos v, -\sin v)$
- D $(-\sin v, \cos v)$
- E $(\cos v, -\sin v)$



Endast svar fordras

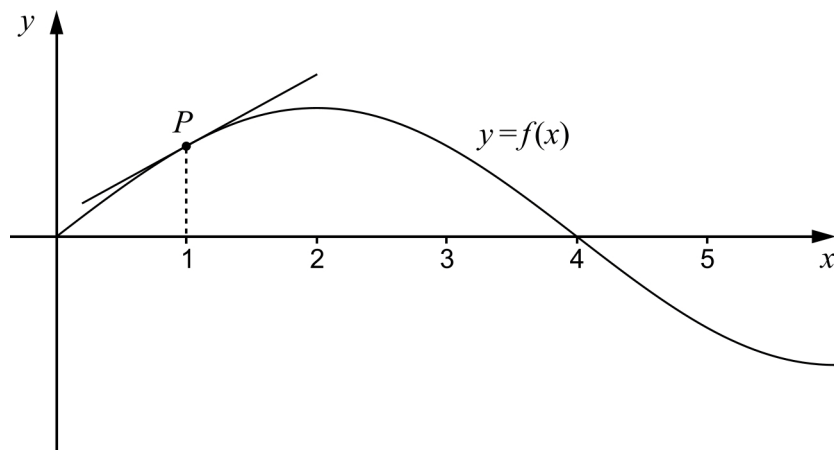
(0/1)

8. Figuren visar grafen till $y = f(x)$ där $f(x) = A \sin bx$

Tangenten till grafen i punkten P har lutningen $\frac{1}{2}$

Använd informationen i figuren och bestäm konstanterna A och b .

(0/3)



9. Visa att $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

för alla x där uttrycken i båda led är definierade.

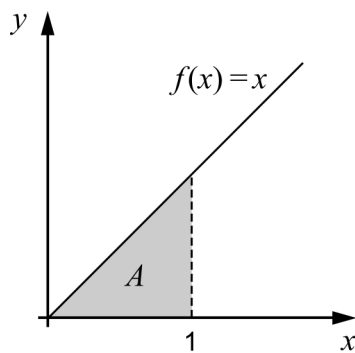
(0/2/□)

Vid bedömning av ditt arbete med uppgiften kommer läraren att ta hänsyn till:

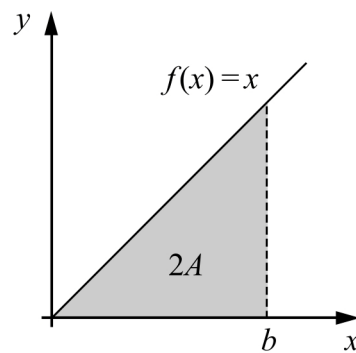
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du använder det matematiska språket

10. I den här uppgiften ska du undersöka areor som begränsas av x -axeln, en lodrät linje och grafen till funktionen $f(x) = x^p$ där $x \geq 0$

- Bestäm arean A av det markerade området i figur 1 och bestäm sedan b så att arean av det markerade området i figur 2 blir dubbelt så stor som i figur 1.

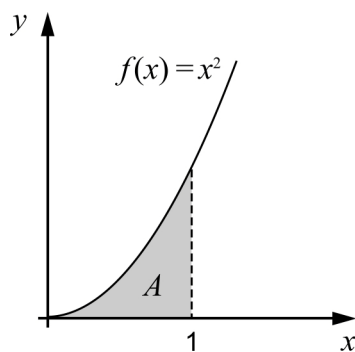


Figur 1

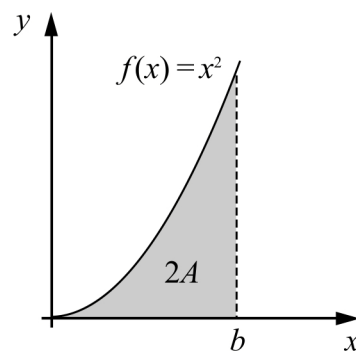


Figur 2

- Bestäm b så att arean i figur 4 blir dubbelt så stor som i figur 3.



Figur 3

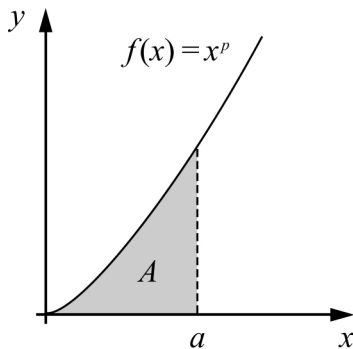


Figur 4

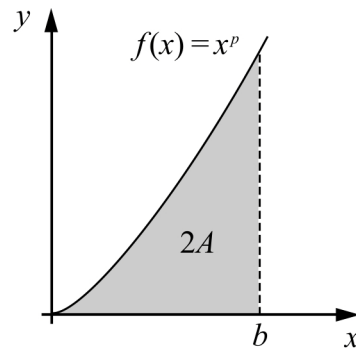
I figurerna nedan visas graferna till funktionen $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, $p \geq 1$

I figur 5 visas ett område med arean A som begränsas av x -axeln, linjen $x = a$ och grafen till funktionen.

I figur 6 visas ett område med dubbelt så stor area som i figur 5 det vill säga $2A$. Området begränsas av x -axeln, linjen $x = b$ och grafen till funktionen.



Figur 5



Figur 6

- Utgå från figurerna 5 och 6 och sätt $a = 1$ och $p = 3$. Bestäm sedan b så att arean i figur 6 blir dubbelt så stor som i figur 5.
- Skriv av den nedanstående tabellen och komplettera genom att beräkna kvoten $\frac{b}{a}$ för de olika värdena på p .

p	1	2	3
a	1	1	1
$\frac{b}{a}$			

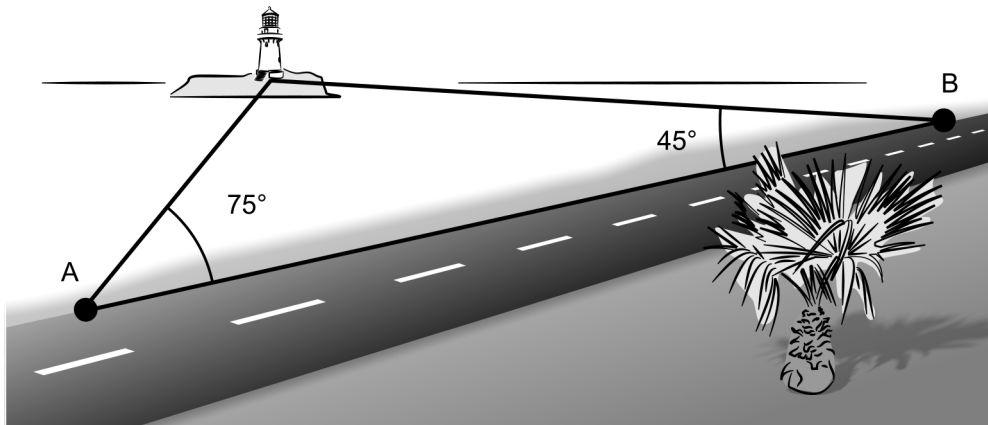
- Undersök kvoten $\frac{b}{a}$ och formulera en hypotes om hur värdet på $\frac{b}{a}$ beror av värdet på p .
- Visa att din hypotes gäller oberoende av vilket värde på a du väljer. (3/4/□)

Del II

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

11. En triangel har sidorna 4,0 cm, 6,0 cm och 7,0 cm. Bestäm triangelns area. (3/0)

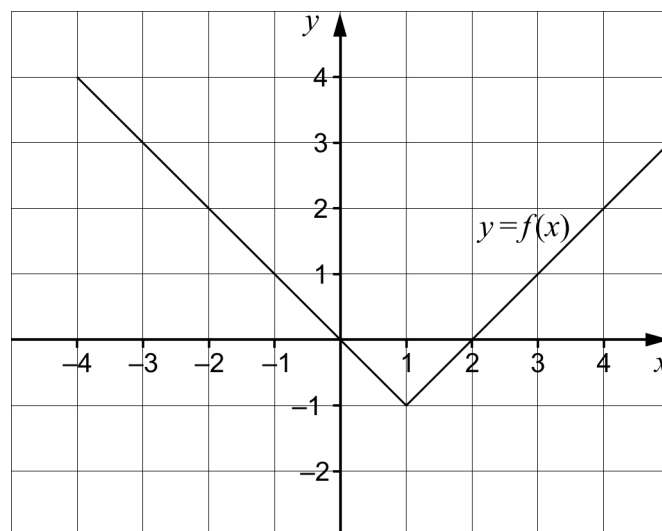
12.



Längs en strand löper en rak 4,0 km lång vägsträcka AB. När Amir befinner sig i ena änden av sträckan (A) ser han snett framför sig en fyr i 75 graders vinkel mot vägen. Vid andra änden av sträckan (B) ser Amir fyren snett bakom sig i 45 graders vinkel mot vägen.

Beräkna det vinkelräta avståndet från vägen till fyren. (2/0)

13. Bestäm $\int_{-2}^4 f(x) dx$ med hjälp av figuren. (1/1)

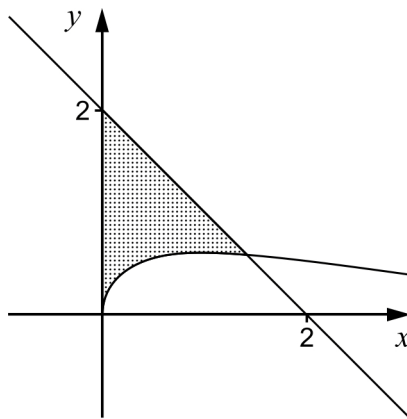


14. Vid ett laboratorieexperiment som pågår under 7 dygn mäts temperaturen i ett preparat regelbundet. Man har funnit att sambandet mellan tid och temperatur kan beskrivas genom

$y(x) = 122 + 20 \sin \frac{\pi(x+1,5)}{7}$, där $y(x)$ är temperaturen i °C och x är tiden i dygn från experimentets början.

- a) Vilken temperatur har preparatet när experimentet påbörjas? (1/0)
- b) Med vilken hastighet ändras temperaturen vid den tidpunkt då experimentet pågått i 5,0 dygn? (1/1)

15.



Ett område i första kvadranten begränsas av kurvan $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$, linjen $y = 2 - x$ och y -axeln.

Teckna ett integraluttryck för områdets area och bestäm arean med två decimalers noggrannhet.

(1/2)

16. Om polynomfunktionen f vet man följande:

- $f'(0) = 1$
- $f'(3) = -3$
- $f''(x) < 0$ för $x > 0$

Vilka slutsatser kan dras beträffande extrempunkter till f i intervallet $x > 0$? (0/2/□)

17. Funktionen $y = f(x)$ är definierad i intervallet $0 \leq x \leq 6$ och är en växande funktion. Följande funktionsvärden är kända:

x	$f(x)$
0	1,0
1	1,2
2	1,7
3	3,0
4	3,5
5	3,6
6	5,0

a) Använd samtliga värden i tabellen ovan för att beräkna ett närmevärde

till $\int_0^6 f(x) dx$ (2/0)

b) Stäng in värdet av $\int_0^6 f(x) dx$ i ett så litet intervall som möjligt, det vill säga bestäm ett så stort värde som möjligt på A och ett så litet värde som möjligt på B så att $A \leq \int_0^6 f(x) dx \leq B$ för alla funktioner $y = f(x)$ som är växande och har de värden som anges i tabellen. (0/2/□)

Innehåll	Sid nr
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet	4
Kravgränser	5
Allmänna riktlinjer för bedömning	6
Bedömningsanvisningar del I och del II	7
Mål för matematik kurs D – Kursplan 2000	21
Betygskriterier 2000	22
Kopieringsunderlag för aspektbedömning	23
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG- kvaliteter.....	24
Insamling av provresultat för matematik kurs D hösten 2009	25

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 6, 8, 12, 14 och 15 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 5, 8, 10, 13, 14, 16 och 17. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12 och 15 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 6, 8, 10, 15, 16 och 17.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik ht 2009 i förhållande till betygsriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte).

				Kunskapsområde											Betygskriterium																	
Uppgift nr	g po-äng	vg po-äng	□	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	2	0												x			x	x	x													
2	2	0												x			x	x	x													
3a	1	0								x							x															
3b	1	0								x							x															
3c	1	0								x							x															
4	1	0					x										x		x													
5	1	0						x									x															
6	1	2					x										x	x	x		x	x	x									
7	0	1					x														x											
8	0	3					x	x													x	x	x	x								
9	0	2	□						x												x			x						x		
10	3	4	□											x			x	x	x		x	x	x	x	x		x	x	x			
11	3	0								x							x	x	x													
12	2	0								x							x	x	x													
13	1	1													x	x	x	x	x		x		x									
14a	1	0							x								x															
14b	1	1							x		x						x	x	x		x	x		x								
15	1	2											x			x	x	x	x		x	x	x	x								
16	0	2	□								x										x	x	x	x			x		x	x		
17a	2	0														x	x	x	x													
17b	0	2	□													x					x	x	x	x			x		x			
Σ	24	20		0/0			9/9				15/11																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 24 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt: 12 poäng.

Väl godkänt: 25 poäng varav minst 6 vg-poäng.

Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 13 vg-poäng.

Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter av de fyra MVG-kvaliteter som är möjliga att visa i detta prov.

De ☐-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

MVG-kvalitet	Uppgift			
	9	10	16	17b
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning		○		○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		○		○
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	○	○	○	
Värderar och jämför metoder/modeller				
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk		○	○	

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)
 - 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
 - 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.
5. Uppgifter av långsvarstyp
 - 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
 - 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
 - 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
 - 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknefel.
6. Aspektbedömning
Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg
 - 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
 - 7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
 - 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
 - 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (α) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Prov som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap. 4 § offentlighets och sekretesslagen (2009:400). Avsikten är att detta prov ska kunna återanvändas t.o.m. 2015-12-31. Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

Bedömningsanvisningar (MaD ht 2009)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbart” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		Max 2/0
	Godtagbar bestämning av en primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar ($F(x) = 2x^4 + 2x^2 + 1$)	+1 g
2.		Max 2/0
	Korrekt primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar (8)	+1 g
3.		Max 3/0
a)	Korrekt svar ($6 \cos 3x$)	+1 g
b)	Korrekt svar ($3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$)	+1 g
c)	Korrekt svar ($12(2x + 1)^5$)	+1 g
4.		Max 1/0
	Korrekt svar (-2π)	+1 g
5.		Max 1/0
	Korrekt svar ($b > 3$)	+1 g

Uppg. Bedömningsanvisningar Poäng

6. Max 1/2

- Godtagbar bestämning av en lösning +1 g
- Godtagbar bestämning av ytterligare en lösning +1 vg
- Godtagbar bestämning av fullständig lösning
($x \approx 11^\circ + n \cdot 90^\circ, x \approx 34^\circ + n \cdot 90^\circ$) +1 vg

7. Max 0/1

- Korrekt svar (D: $(-\sin v, \cos v)$) +1 vg

8. Max 0/3

- Korrekt bestämning av konstanten $b \left(\frac{\pi}{4} \right)$ +1 vg
- Godtagbar ansats för bestämning av A , t ex tecknar $f'(1) = b \cdot A \cos b = \frac{1}{2}$ +1 vg
- med korrekt bestämning av $A \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$ +1 vg

9. Max 0/2/□

- Godtagbar ansats, t ex gör liknämngt +1 vg
- med godtagbar visad likhet även om formella brister kan förekomma +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra beviset korrekt.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****10.****Max 3/4/□**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Total-poäng
	Lägre		Högre	
Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.</i> <i>Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i>	Eleven beräknar b för minst ett värde på p för $a = 1$	Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att beräkna b för minst tre värden på p för $a = 1$	Eleven beräknar $\frac{b}{a}$ för något $a \neq 1$ eller inleder en generell undersökning t ex tecknar ekvationen $\int_0^b x^p dx = 2 \cdot \int_0^a x^p dx$	
	1-2 g	2 g och 1 vg	2 g och 2 vg	2/2
Matematiska resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</i>	Eleven drar någon slutsats om sambandet mellan b och p (t ex ” b blir mindre då värdet på p blir större”)	Eleven ställer upp ett godtagbart samband mellan $\frac{b}{a}$ och p grundat på en generell undersökning eller grundat på en undersökning av flera specialfall t ex där $a = 1$, $b = 2^{\frac{1}{p+1}}$		
	1 g	1 g och 1 vg		1/1
Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i>		Redovisningen är lätt att följa och förstå och det matematiska språket är acceptabelt		
		1 vg		0/1
Summa				3/4

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod, t ex tecknar ekvationen $\int_0^b x^p dx = 2 \cdot \int_0^a x^p dx$ och påbörjar en lösning av ekvationen.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	tolka resultaten av sin undersökning och formulera ett korrekt uttryck för $\frac{b}{a}$ grundat på en generell undersökning eller med hjälp av resultat från specialfall med $a \neq 1$.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att hypotesen gäller, dvs $\frac{b}{a} = 2^{\frac{1}{p+1}}$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur den poängsatts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (3 g och 3 vg)

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^b x dx = 1$$

$$\int_0^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{b^2}{2} = 1 \quad b^2 = 2 \quad b = \sqrt{2}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{3} = \frac{2}{3} \quad b^3 = 2 \quad b = 2^{1/3}$$

p	1	2	3
a	1	1	1
$\frac{b}{a}$	$\sqrt{2}$	$2^{1/3}$	$2^{1/4}$

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^b = \frac{b^4}{4} = \frac{1}{2} \quad b^4 = 2 \quad b = 2^{1/4}$$

Hypotes $\frac{b}{a} = 2^{1/(p+1)}$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	— — — — — X — — — — —	2/1	
Matematiska resonemang	— — — — — X — — — — —	1/1	Eleven ställer upp ett korrekt samband utifrån $a = 1$.
Redovisning och matematiskt språk	— — — — — X — — — — —	0/1	
Summa		3/3	

Elevlösning 2 (3 g och 4 vg och en av MVG-kvaliteterna)

- $A = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

$$2A = 1 = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2}$$

$$1 = \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = b$$

- $A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$$2A = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2A = \int_0^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{b^3}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} = b$$

- | | | | |
|---------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| p | 1 | 2 | 3 |
| q | 1 | 1 | 1 |
| $\frac{b}{a}$ | $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt[3]{2}}{1} = \sqrt[3]{2}$ | $\frac{\sqrt[4]{2}}{1} = \sqrt[4]{2}$ |

$$A = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$2A = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2A = \int_0^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^b = \frac{b^4}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{b^4}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} = b^4 \Leftrightarrow \sqrt[4]{2} = b$$

- Det ser ut som att $\frac{b}{a} = p\sqrt[p]{2}$

Om $a=2$ och $p=1$, stämmer det.

$$A = \int_0^2 x' dx = \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^2 = \frac{2^2}{2} = 2$$

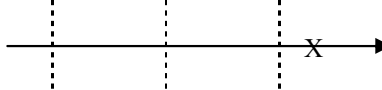
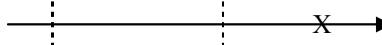
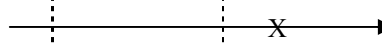
$$2A = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2A = \int_0^b x' dx = \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^b = \frac{b^2}{2}$$

$$4 = \frac{b^2}{2}$$

$$2 \cdot 4 = b^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = b \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande		2/2	Eleven beräknar kvoten för något $a \neq 1$, men inleder ej någon generell undersökning.
Matematiska resonemang		1/1	
Redovisning och matematiskt språk		0/1	
Summa		3/4	

Kommentar: Eleven visar en av MVG-kvaliteterna genom att formulera ett korrekt uttryck för $\frac{b}{a}$ med hjälp av resultat från specialfall med $a \neq 1$.

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och fyra av MVG-kvaliteterna)

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} + C - \underbrace{\left(\frac{0^2}{2} + C \right)}_{=0} = \frac{1}{2} = A$$

$$\int_0^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{b^2}{2} + C - \underbrace{\left(\frac{0^2}{2} + C \right)}_{=0} = \frac{b^2}{2} = 2A$$

$$1 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = b$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} = A$$

$$\int_0^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{3} = 2A$$

$$\frac{2}{3} = \frac{b^3}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{2} = b$$

Arean A i figuren 5, kan fås genom integrering:

$$\textcircled{5} \int_0^a x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^a = \frac{a^{p+1}}{p+1} + C - \underbrace{\left(\frac{0^{p+1}}{p+1} + C \right)}_{=0} = A$$

Arean $2A$ i figur 6 kan fås på samma sätt.

$$\textcircled{6} \int_0^b x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^b = \frac{b^{p+1}}{p+1} + C - \underbrace{\left(\frac{0^{p+1}}{p+1} + C \right)}_{=0} = 2A$$

Vi kan nu dubblera ⑤ och sätta den
lika med ⑥:

$$2. \frac{a^{(p+1)}}{(p+1)} = \frac{b^{(p+1)}}{(p+1)}$$

$$2a^{(p+1)} = b^{(p+1)}$$

För att få fram förhållandet mellan b och a så får man $(p+1)$ -roten ur båda leden:

$$^{(p+1)}\sqrt{2} \cdot ^{(p+1)}\sqrt{a^{(p+1)}} = ^{(p+1)}\sqrt{b^{(p+1)}} \Rightarrow$$

$$\sqrt[p+1]{2} \cdot a = b \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt[p+1]{2}$$

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande X	2/2	
Matematiska resonemang X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk X	0/1	
Summa	3/4	

Kommentar: Eleven formulerar ingen hypotes, men använder en generell metod och drar en korrekt slutsats. Lösningen är välstrukturerad och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Lösningen anses uppfylla samtliga möjliga MVG-kvaliteter.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
11.		Max 3/0
	Godtagbar ansats, t ex tecknar cosinussatsen korrekt	+1 g
	med godtagbar fortsättning, t ex beräknar en vinkel	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning (12 cm^2)	+1 g
12.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t ex använder sinussatsen för att beräkna längden på någon sida	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning (3,2 km)	+1 g
13.		Max 1/1
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer värdet av någon integral, t ex $\int_2^4 f(x)dx = 2$	+1 g
	med korrekt svar (3)	+1 vg
14.		Max 2/1
a)	Godtagbar lösning ($134 \text{ }^\circ\text{C}$)	+1 g
b)	Godtagbar ansats t ex inser att det sökta värdet ges av $y'(5)$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning ($-8,75 \text{ }^\circ\text{C/dygn}$)	+1 vg
15.		Max 1/2
	Godtagbar ansats, t ex beräknar x -koordinaten för skärningspunkten mellan kurvan och linjen, $x \approx 1,77$	+1 g
	med godtagbart tecknad integral, $\int_0^{1,77} (2 - x - \sqrt{x} \cdot e^{-x}) dx$	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning (1,37 ae)	+1 vg

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****16.****Max 0/2/□**

Godtagbar ansats, t ex visar insikt om att derivatan måste vara noll
någonstans mellan $x = 0$ och $x = 3$

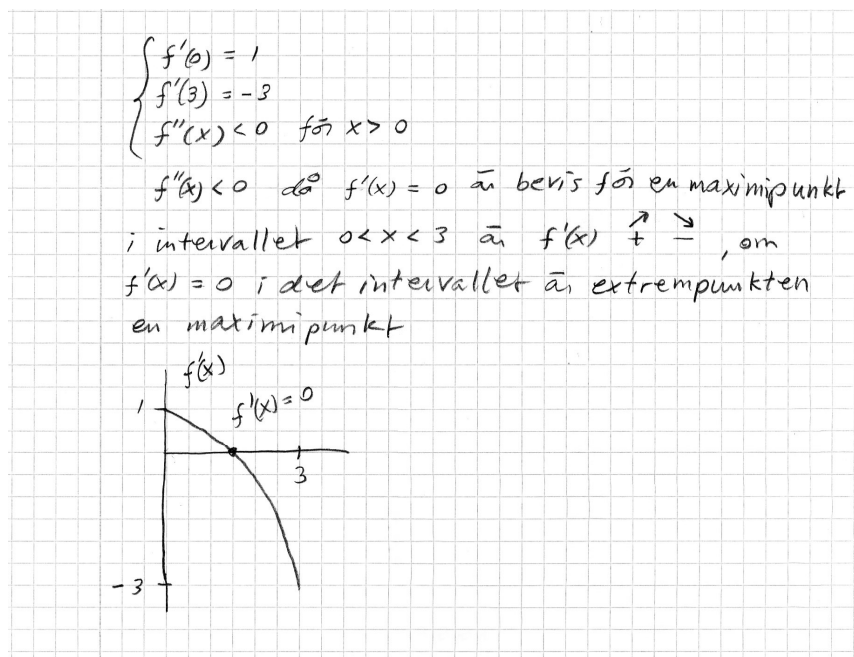
+1 vg

visar att det finns en maximipunkt mellan $x = 0$ och $x = 3$

+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa med hjälp av andraderivatan att funktionen endast har en extrempunkt för $x > 0$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa tydligt och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

Kommentar: Eleven ger ett korrekt svar men använder inte andraderivatan för att visa att funktionen endast har en extrempunkt för $x > 0$. MVG-kvaliteten som rör redovisning och matematiskt språk kan inte bedömas då redovisningen inte är tillräckligt omfattande.

Elevlösning 2 (2 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$f'(0) = 1 \quad f'(3) = -3 \quad f''(x) < 0 \text{ för } x > 0$$

Det finns en extrempunkt mellan $x=0$ och $x=3$. Det är en maxpunkt

Det finns endast en extrempunkt

Eleven gör ingen tydlig koppling till villkoren för derivatan.

f stiger vid $x=0$ och minskar vid $x=3$

En maxpunkt däremellan alltså. Då andraderivatan är under noll hela vägen efter $x=0$ vet man att första derivatan minskar hela tiden f kommer aldrig att stiga igen.

Eleven använder ett vardagligt språkbruk.

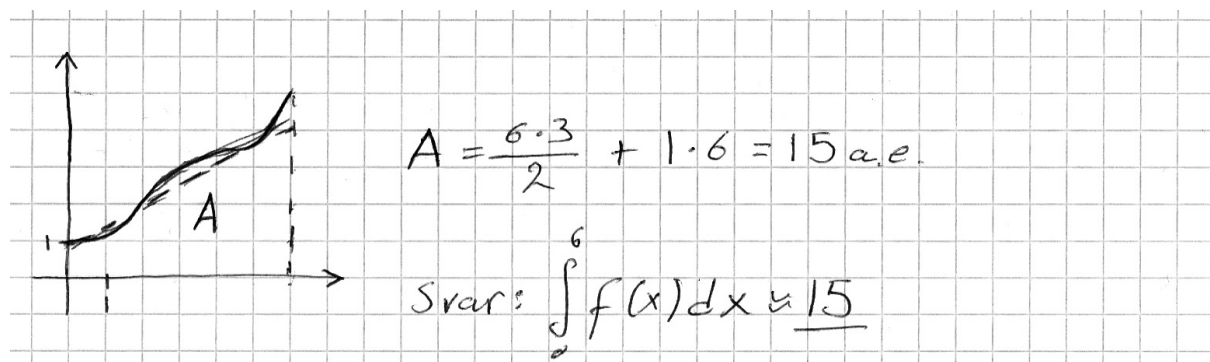
Elevens koppling mellan funktionen och dess derivata är ganska vag.

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att använda andraderivatan för att visa att funktionen endast har en extrempunkt för $x > 0$, men det matematiska språket är bristfälligt och tankegången är inte helt tydlig och klar. MVG-kvalitet för redovisning och matematiskt språk hade kunnat visas med någon eller några förbättringar i enlighet med kommentarerna ovan.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****17.****Max 2/2/□**

- a) Använder en godtagbar metod +1 g
 med bestämning av ett svar i intervallet $[14, 18]$ +1 g

Exempel på elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 g)

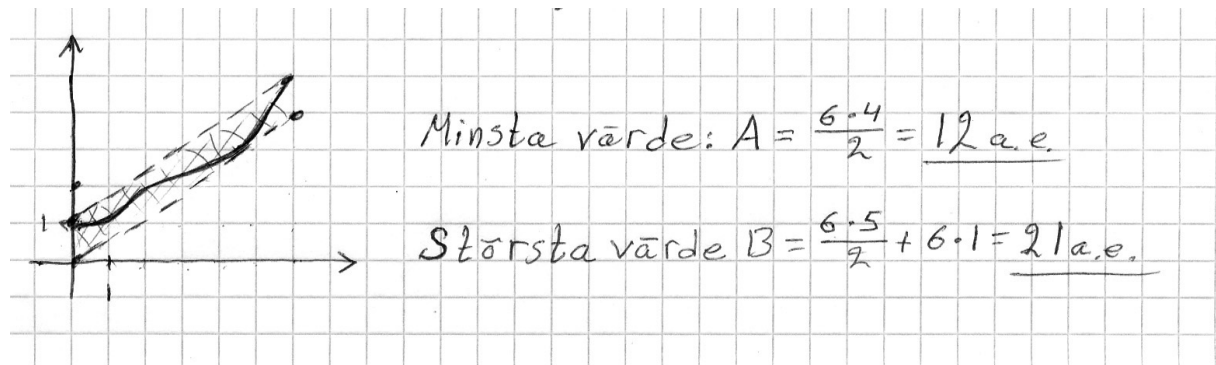
Kommentar: Eleven bestämmer ett närmevärde till integralen med en godtagbar metod.

- b) Använder en godtagbar metod, t ex bildar översumma +1 vg
 och undersumma
 med godtagbar beräkning av över- och undersumma utifrån vald metod +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	utveckla problemet genom att använda metoden över- och undersumma på bästa sätt, dvs genom att använda alla 6 delintervall.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att $B = 18$ genom att motivera att integralens värde kan komma godtyckligt nära 18 (eller motsvarande för $A = 14$).
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

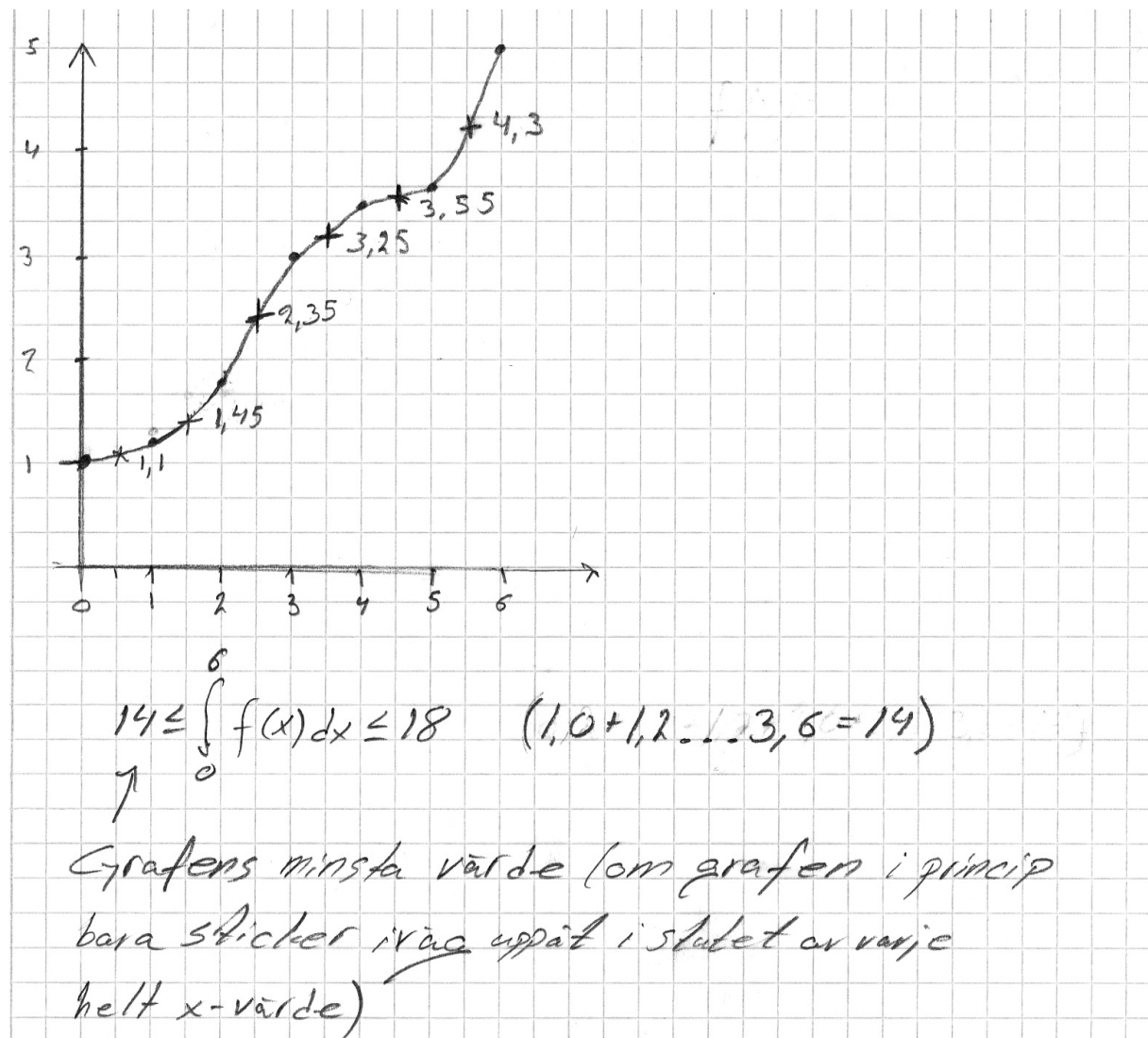
Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges på nästa sida. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)



Kommentar: Eleven stänger in värdet av integralen med en godtagbar metod där över och undersummor är rimliga.

Elevlösning 2 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna)



Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att dra slutsatsen att $A = 14$ genom att motivera att integralens värde kan komma godtyckligt nära 14. Eleven har dock inte redovisat någon metod för beräkning av översumma.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)

T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)

D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt (Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

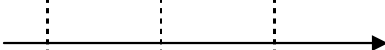
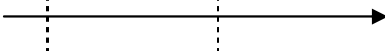
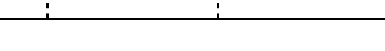
Kriterier för betyget Väl godkänt

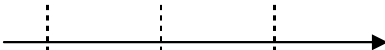
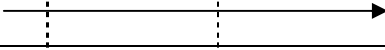
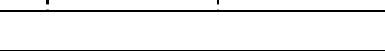
- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

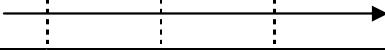
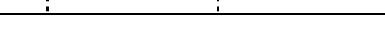
Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

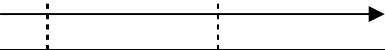
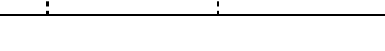
- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

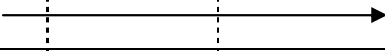
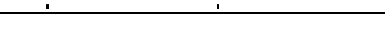
Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (☐-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	10	16	17b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Elevens namn:	Uppgift (☐-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	10	16	17b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Elevens namn:	Uppgift (☐-märkt)				Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	10	16	17b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet					
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang					
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk					

Insamling av provresultat för matematik kurs D

Höstterminen 2009 deltar alla skolor i resultatinsamlingen genom att skicka in resultat för ett litet urval elever. Denna insamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om höstens prov **i mitten av februari**. Rapporten kommer att finnas tillgänglig på <http://www.umu.se/edmeas/np>. Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

När du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 7:e, 8:e, 18:e och 25:e i varje månad**. Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 7:e i varje månad**.

1. Gå in på <http://www.umu.se/edmeas/np> och klicka på rubriken **Resultatinsamling ht 2009** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **rad11rk** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 7:e, 8:e, 18:e och 25:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 7:e i varje månad** till:

Umeå universitet
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Nationella prov
Att. Monika Kriström
901 87 Umeå

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i mitten av februari måste vi ha alla resultat **senast 22 januari 2010**.