# NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2004

## Anvisningar

| | |
|---|---|
| Provtid | 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I. |
| Hjälpmedel | **Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.*<br>**Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. |
| Provmaterialet | Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.<br>Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.<br>*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.* |
| Provet | Provet består av totalt 16 uppgifter. **Del I** består av 8 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter.<br>Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.<br>Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.<br>Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning. |
| Poäng och betygsgränser | Provet ger maximalt 44 poäng.<br>Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. |

Undre gräns för provbetyget

| | |
|---|---|
| Godkänd: | 13 poäng. |
| Väl godkänd: | 26 poäng varav minst 6 vg-poäng. |
| Mycket väl godkänd: | Utöver kraven för Väl godkänd ska du ha visat *MVG-kvaliteter i minst en* av ¤-uppgifterna. Du ska dessutom ha minst 14 vg-poäng. |

Namn: ______________________________ Skola: ______________________________

Komvux/gymnasieprogram: ______________________________________________________

# Del I

**Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.**
**Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.**

**1.** Ekvationen $\sin x = \frac{1}{2}$ har två lösningar i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Den ena lösningen är $x = \frac{\pi}{6}$ . Bestäm den andra lösningen.

*Endast svar fordras* (1/0)

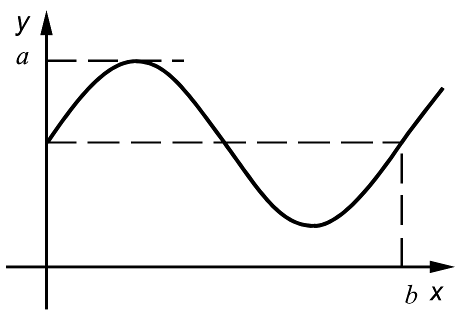
**2.** Beräkna $\int_1^2 x(1-x)\mathrm{d}x$ (2/0)

**3.** Låt $f(x) = \ln(2+x) - 2x$

a) Bestäm derivatan till funktionen *f*. *Endast svar fordras* (1/0)

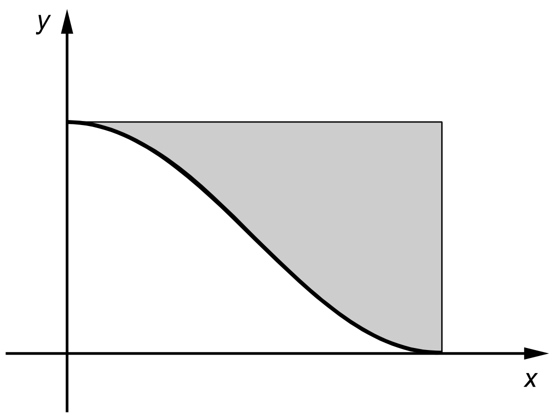
b) Lös ekvationen $f'(x) = 0$ (1/0)

**4.** Kurvan $y = 15 + 10\sin 4x$ är ritad i figuren.
Bestäm $a$ och $b$. *Endast svar fordras* (2/0)

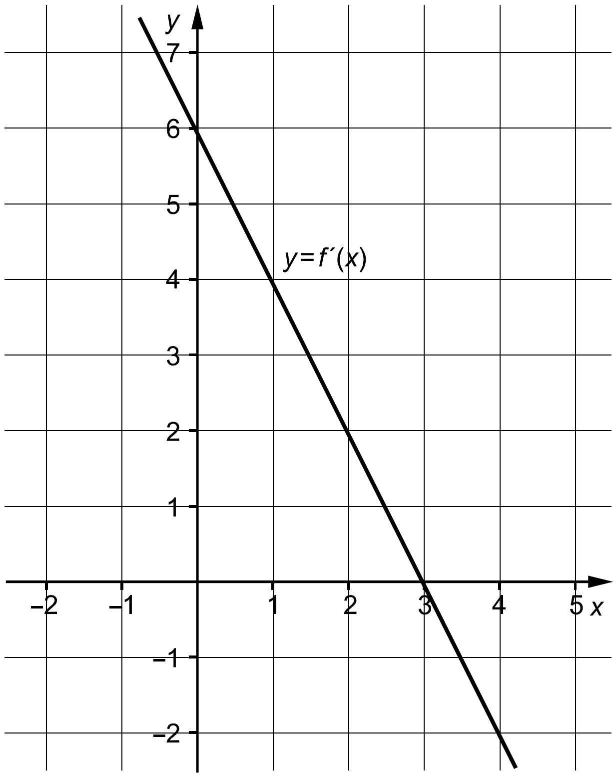


**5.** Det skuggade området i figuren begränsas av kurvan $y = 1 + \cos x$ och linjer genom kurvans skärningspunkter med koordinataxlarna. Dessa linjer är parallella med koordinataxlarna.

Beräkna det exakta värdet av arean av det skuggade området. (0/3)




**6.** Derivatan $y = f'(x)$ till funktionen $f$ är ritad i figuren nedan.

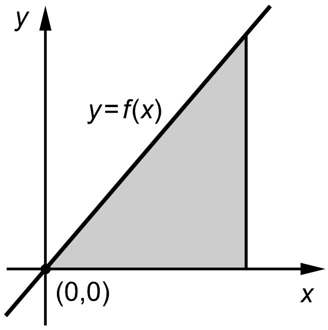



a) Funktionen $f$ har ett maximum. Använd grafen ovan för att motivera detta. (1/0)

b) Bestäm funktionen $f$ då funktionens maximivärde är 12. (1/2)

**7.** Det skuggade områdets area kan beräknas med integralen $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bestäm den linjära funktionen $y = f(x)$ om integralens värde är 20. (0/2)




**8.** a) Ange en trigonometrisk ekvation som har lösningarna $x_1 = 120°$ och $x_2 = 240°$ i intervallet $0° \leq x \leq 360°$ *Endast svar fordras* (0/1)

b) Ange en trigonometrisk ekvation som har exakt en lösning i intervallet $0° \leq x < 360°$ *Endast svar fordras* (0/1)

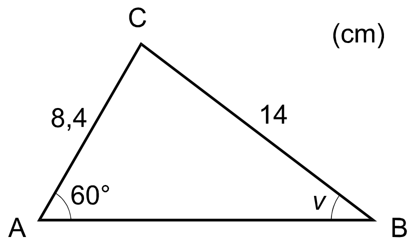
# Del II

**Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.**

**9.** Bestäm konstanten $a$ så att $y = \mathrm{e}^{3x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y'' - 3y = a\mathrm{e}^{3x}$ (2/0)

**10.** Bestäm vinkeln $v$. (2/0)

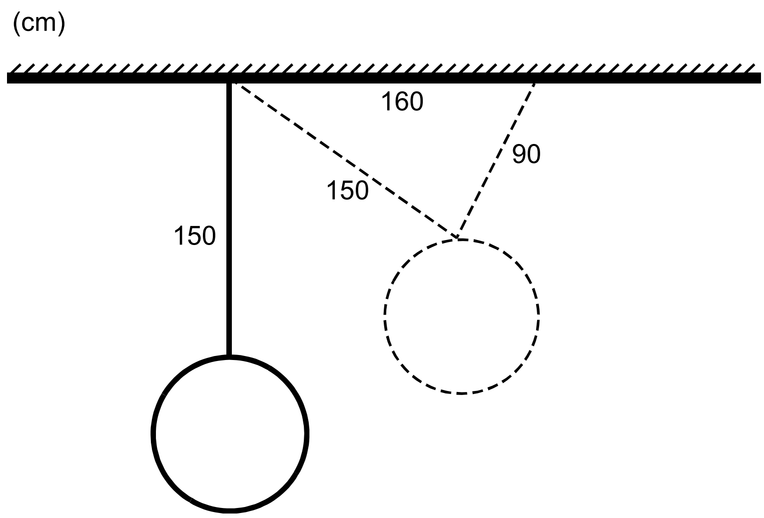
(Mätning i figur godtas ej)



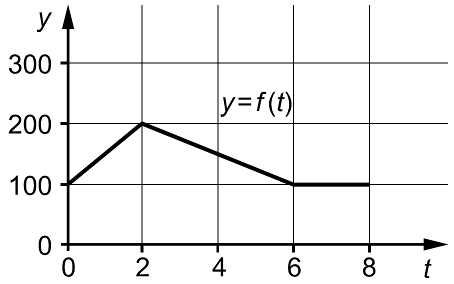

**11.** Stina och Nisse har en lampa över soffbordet. Ibland vill de höja lampan så att den inte skymmer sikten. Lampan hänger i taket i en lina som är 150 cm. På avståndet 160 cm från takfästet har de en krok och därifrån fäster de en 90 cm lång lina till lampan.

Hur mycket högre kommer lampan att hänga när man fäster den på det sättet? (3/0)

(Mätning i figur godtas ej)



**12.** Vid studier av arbetsmiljön i en fabrik undersökte man under en arbetsdag koncentrationen av skadligt stoft i luften som funktion av tiden. Diagrammet nedan visar hur koncentrationen $f(t)$ mg/m³ varierade med tiden $t$ h under åtta timmar.




a) Beräkna värdet av $\frac{1}{8}\int_0^8 f(t)\,\mathrm{d}t$ (2/0)

b) Ge en tolkning av vad värdet av $\frac{1}{8}\int_0^8 f(t)\,\mathrm{d}t$ säger om förekomsten av det skadliga stoftet. (1/1)

**13.** I tabellen nedan anges några värden för funktionerna $f$ och $g$ samt deras derivator.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $-4$ | $0$ | $4$ | $2$ |
| $g(x)$ | $1$ | $2$ | $0$ | $-2$ | $-1$ |
| $f'(x)$ | $-7$ | $2$ | $5$ | $2$ | $-7$ |
| $g'(x)$ | $3,5$ | $-1$ | $-2,5$ | $-1$ | $3,5$ |

a) Bestäm $h'(-2)$ då $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ (2/0)

b) Bestäm $s'(-1)$ då $s(x) = f(g(x))$ (0/2)

**14.** a) Bestäm med hjälp av din räknare värdet av $k$ så att

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = k\pi$$

*Endast svar fordras* (1/0)

b) Undersök funktionen $y = \sqrt{1-x^2}$ och ge en förklaring till värdet på $k$. (0/1)

**15.** Man kan härleda en formel för $\cos 2x$ genom att derivera funktionen $f(x) = \sin 2x$ på två olika sätt.

1) Med hjälp av kedjeregeln får man $f'(x) = 2\cos 2x$
2) Genom att utgå från sambandet $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ och tillämpa produktregeln får man
   $f'(x) = 2\cos x \cos x + 2\sin x(-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) =$
   $2(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)) = 2(2\cos^2 x - 1)$

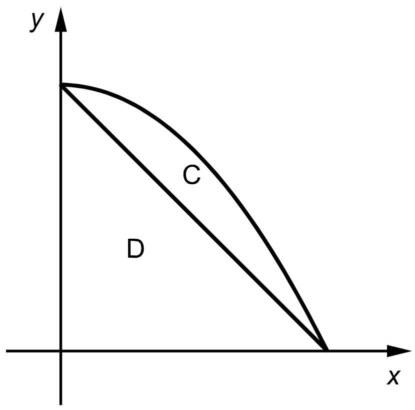
Eftersom de båda uttrycken för $f'(x)$ måste vara lika så följer att $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Vi har fått en formel för $\cos 2x$ som enbart innehåller potenser av $\cos x$.

Använd samma teknik för att härleda en formel för $\cos 3x$, genom att utnyttja sambandet $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Formeln ska bara innehålla potenser av $\cos x$.

(0/3/¤)

**Vid bedömning av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta extra hänsyn till:**
- hur generell din lösning är
- hur väl du redovisat ditt arbete
- hur väl du motiverat dina slutsatser
- hur väl du använt det matematiska språket

**16.** I figuren nedan visas grafen till en funktion $y = a^2 - x^2$ där $x \geq 0$ och $a > 0$, samt en linje genom grafens skärningspunkter med koordinataxlarna. *C* är arean av området som begränsas av funktionens graf och den räta linjen. *D* är arean av det område som begränsas av koordinataxlarna och den räta linjen.




- Beräkna kvoten $\dfrac{C}{D}$ för $a = 1$ och $a = 2$

- Använd resultatet ovan till att formulera ett generellt antagande om kvoten $\dfrac{C}{D}$ och undersök om ditt antagande gäller för alla värden på *a*.

- Undersök värdet av kvoten $\dfrac{C}{D}$ för funktioner av typen $y = a^2 - b^2x^2$

  där $b > 0$, $a > 0$ och $x \geq 0$ (2/4/¤)

**Innehåll** **Sid nr**

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000 .................................................. 3

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet.............................. 4
Kravgränser ............................................................................................... 4

Allmänna riktlinjer för bedömning............................................................... 5

Bedömningsanvisningar del I och del II.......................................................... 6

Mål för matematik kurs D - Kursplan 2000 ............................................................ 16

Betygskriterier 2000 ........................................................................................ 17

Kopieringsunderlag för aspektbedömning............................................................. 18

**Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000**

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 6, 7, 8, 10, 11, 15 och 16 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 4, 5, 6a, 7, 10, 11, 14b, 15 och 16. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 5, 7, 8, 11, 12b, 14b, 15 och 16 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 5, 6, 12, 15 och 16 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.

## Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2004 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

| | | | | Kunskapsområde | | | | | | | | | | | | | | Betygskriterium | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Uppgift nr | g poäng | vg poäng | ¤ | Övr | | | Trigonometri | | | | Diff & integral | | | | | | | Godkänd | | | | Väl godkänd | | | | | | Mycket väl godkänd | | | | |
| | | | | 1 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | | | | | x | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | | x | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 3a | 1 | 0 | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 3b | 1 | 0 | | | x | | | | | | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 2 | 0 | | | | | | x | | | | | | | | | | x | x | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0 | 3 | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 6a | 1 | 0 | | | x | | | | | | | | | | | | | | | | | x | x | | x | | | | | | | |
| 6b | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | | x | | | | | | | |
| 7 | 0 | 2 | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 8a | 0 | 1 | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | | x | | | x | | | | | | | |
| 8b | 0 | 1 | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | | x | | | x | | | | | | | |
| 9 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | x | | | | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 2 | 0 | | | | | | | | x | | | | | | | | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 3 | 0 | | | | | | | | x | | | | | | | | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 12a | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | x | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 12b | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | x | | | x | x | | | x | x | | | | | | | | |
| 13a | 2 | 0 | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 13b | 0 | 2 | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | x | | x | x | x | | | | | | |
| 14a | 1 | 0 | | | | | | | | | | | x | | | | x | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 14b | 0 | 1 | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 15 | 0 | 3 | ¤ | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | x | x | x | x | x | | x | | x | | |
| 16 | 2 | 4 | ¤ | | x | | | | | | | | | | | x | | | | | | x | x | x | x | | | x | x | x | | |
| Σ | 24 | 20 | | 3/1 | | | 8/7 | | | | 13/12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Kravgränser**

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 24 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

| | |
|---|---|
| Godkänd: | 13 poäng. |
| Väl godkänd: | 26 poäng varav minst 6 vg-poäng. |
| Mycket väl godkänd: | Utöver kraven för Väl godkänd ska eleven ha visat *MVG-kvaliteter i en* av ¤-uppgifterna. Eleven ska dessutom ha minst 14 vg-poäng. |

**Allmänna riktlinjer för bedömning**

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

| | |
|---|---|
| Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation | + 1g |
| med korrekt svar | + 1g |

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

# Bedömningsanvisningar (MaD vt 2004)

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

| Uppg. | | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|---|
| **Del I** | | | |
| **1.** | | | **Max 1/0** |
| | | Korrekt svar $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ | +1 g |
| **2.** | | | **Max 2/0** |
| | | Korrekt primitiv funktion | +1 g |
| | | med korrekt svar $\left(-\frac{5}{6}\right)$ | +1 g |
| **3.** | | | **Max 2/0** |
| | a) | Korrekt svar $\left(f'(x)=\frac{1}{2+x}-2\right)$ | +1 g |
| | b) | Korrekt lösning $\left(x=-\frac{3}{2}\right)$ | +1 g |
| **4.** | | | **Max 2/0** |
| | | Korrekt $a$ (25) | +1 g |
| | | Korrekt $b$ ($90°$) | +1 g |
| **5.** | | | **Max 0/3** |
| | | Redovisad godtagbar ansats, t ex bestämmer skärningspunkterna med koordinataxlarna | +1 vg |
| | | med i övrigt redovisad godtagbar lösning ($\pi$ a.e.) | +1-2 vg |

| Uppg. | | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|---|
| **6.** | | | **Max 2/2** |
| | a) | Redovisad godtagbar motivering för maximum ( $f'(3)=0$ , för $x$ mindre än 3 är funktionen växande eftersom derivatan är positiv och för $x$ större än 3 är funktionen avtagande eftersom derivatan är negativ, dvs $f(3)$ är ett maximum) | +1 g |
| | b) | Redovisad godtagbar ansats t ex tecknat uttrycket $f'(x)=-2x+6$ | +1 g |
| | | med redovisad godtagbar bestämning av funktionen $f$ ( $f(x)=-x^2+6x+3$ ) | +1-2 vg |
| **7.** | | | **Max 0/2** |
| | | Redovisad godtagbar lösning $\left(f(x)=\frac{8}{5}x\right)$ | +1-2 vg |
| **8.** | | | **Max 0/2** |
| | a) | Korrekt svar $\left(\text{t ex } \cos x=-\frac{1}{2}\right)$ | +1 vg |
| | b) | Korrekt svar (t ex $\sin x=1$) | +1 vg |
| **Del II** | | | |
| **9.** | | | **Max 2/0** |
| | | Redovisad godtagbar lösning ( $a=6$ ) | +1-2 g |
| **10.** | | | **Max 2/0** |
| | | Redovisad godtagbar lösning ( $v\approx 31°$ ) | +1-2 g |
| **11.** | | | **Max 3/0** |
| | | Redovisad godtagbar ansats, t ex beräknar en vinkel korrekt | +1 g |
| | | med i övrigt redovisad godtagbar lösning (67 cm) | +1-2 g |
| **12.** | | | **Max 3/1** |
| | a) | Redovisad godtagbar bestämning av arean | +1 g |
| | | med korrekt svar (137,5) | +1 g |
| | b) | Godtagbar ansats, t ex gör tolkningen ”det är ett medelvärde” | +1 g |
| | | Godtagbar tolkning (Koncentrationen av skadligt stoff är i genomsnitt 137,5 mg/m³ under arbetsdagen) | +1 vg |

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|
| **13.** | | **Max 2/2** |
| a) | Visar insikt om att $h'(-2) = f'(-2)\cdot g(-2) + f(-2)\cdot g'(-2)$ | +1 g |
| | med korrekt beräkning av derivatan ( $-14$ ) | +1 g |
| b) | Visar insikt om att $s'(-1) = f'(g(-1))\cdot g'(-1)$ | +1 vg |
| | med korrekt beräkning av derivatan (7) | +1 vg |
| **14.** | | **Max 1/1** |
| a) | Godtagbart svar (0,5) | +1 g |
| b) | Godtagbar förklaring (Integralen motsvarar arean av en halvcirkel med radien 1 l.e.) | +1 vg |
| **15.** | | **Max 0/3/¤** |
| | Korrekta deriveringar av uttrycken | +1 vg |
| | Redovisad godtagbar härledning av formeln ( $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ ) | +1-2 vg |
| | Eleven genomför beviset korrekt och använder ett i huvudsak korrekt och lämpligt matematiskt språk. | ¤ |

**Uppg.** **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

**16.** **Max 2/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

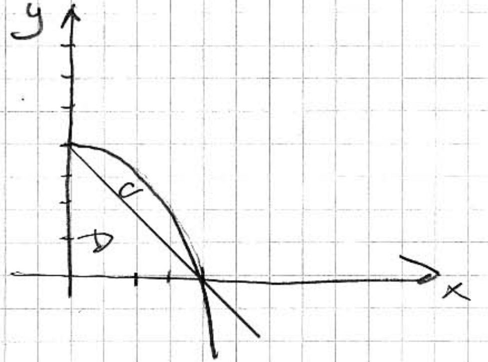
<table>
<tr><th>Bedömningen avser</th><th colspan="4">Kvalitativa nivåer<br>Lägre ⟶ Högre</th><th>Total-poäng</th></tr>
<tr><td>Metodval och genomförande<br>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.<br>Hur fullständig och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</td><td>Eleven tecknar integralen för ett specialfall för $a$,<br>t ex $\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x$<br>eller motsvarande<br>1 g</td><td colspan="2">Eleven beräknar kvoten $\frac{C}{D}$ för två värden på $a$ korrekt.<br>1 g och 1vg</td><td>Eleven inleder en generell undersökning i andra och/eller tredje punkten, t ex tecknar uttrycket<br>$\int_0^a (a^2-x^2)dx - \frac{a^3}{2}$<br>1g och 2 vg</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>Matematiska resonemang<br>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</td><td colspan="2">Eleven formulerar ett generellt antagande i punkt två baserat på de beräkningar eleven utfört.<br>1 g</td><td colspan="2">Eleven formulerar ett generellt antagande och visar att kvoten $\frac{C}{D}=\frac{1}{3}$ för funktioner av typen $y=a^2-x^2$<br>1 g och 1 vg</td><td>1/1</td></tr>
<tr><td>Redovisning och matematiskt språk<br>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt.<br>1 vg</td><td>0/1</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td colspan="4"></td><td>2/4</td></tr>
</table>

Eleven visar att kvoten $\frac{C}{D}=\frac{1}{3}$ gäller för alla $a>0$ och $b>0$ för funktioner av typen $y=a^2-b^2x^2$. Lösningen är fullständig och de generella resonemangen redovisas med klar tankegång. Det matematiska språket är i huvudsak korrekt. ¤

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16.**

**Elevlösning 1 (2 g och 1 vg)**

$y = a^2 - x^2$ där $x > 0,\ a > 0$




$a = 1$

$C = 0{,}1667$

$D = 0.5$

$\frac{C}{D} \approx 0{,}33$

$a = 2$

$C = 1{,}333$

$D = 4$

$\frac{C}{D} \approx 0.33$

Då en rätvinklig triangel står under en funktion $y = a^2 - x^2$ där $x > 0$, triangelns höjd och bas är funktionens skärningspunkter på x- och y-axeln så är kvoten av funktionens area med triangelns hypotenusa som botten, delat med triangelns area lika med 0,33

$a = 3$

$C = 4{,}5$

$D = 13{,}5$

$\frac{C}{D} \approx 0.33$

$a = 5$

$C = 20{,}83$

$D = 62.5$

$\frac{C}{D} = 0.33$

Det verkar som om det gäller alla funktioner av den typen.

*Bedömning*

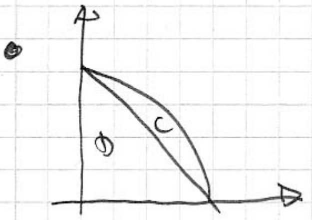
| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | X | 1/1 | Eleven har utfört beräkningar av kvoten C/D för flera fall. |
| Matematiska resonemang | X | 1/0 | |
| Redovisning och matematiskt språk | | 0/0 | Ofullständiga redovisningar av beräkningarna. |
| **Summa** | | **2/1** | |

**Elevlösning 2 (2 g och 1 vg)**

$a^2 - x^2 \quad , x \geq 0 \qquad a > 0$

$1^2 - x^2 = 0$

$x = \pm 1$




$a = 1$

$D_1 \quad A_T = \int_0^1 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

$C_1 \quad A = \int_0^1 1 - x^2 \, dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$a = 2 \quad D_2 = \int_0^2 = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

$C_2 = \int_0^2 4 - x^2 = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} = \frac{8 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

1\. Kvoten $\frac{C}{D} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$

förhållandet mellan C och D är 4/3

2\. $\frac{C}{D} = \frac{\frac{16}{3}}{4} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$

$a = 3 \quad D_3 = \int_0^3 = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13{,}5$

$C_3 = \int_0^3 9 - x^2 = \left[ 9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{27}{3} = \frac{54}{3} = 18$

Kvoten $\frac{C}{D} = \frac{18}{13{,}5} = 1{,}333 = \frac{4}{3}$

Det hindrar vilket talet som ersätter a $\Rightarrow$ förhållandet blir för alla $a > 0$ $\frac{4}{3}$

*Bedömning*

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | X | 1/0 | |
| Matematiska resonemang | X | 1/0 | Antagandet är baserat på elevens (ej korrekta) beräkningar. |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/1 | Redovisningen innehåller brister och små felaktigheter men kan ändock anses vara acceptabelt. |
| **Summa** | | **2/1** | |

**Elevlösning 3 (2 g och 4 vg och ¤)**

* Grafen $= a^2 - x^2 =$ (om $a = 1$ så är)

$= 1 - x^2$

$C + D = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = F(1) - F(0) =$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

$D = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

$C = (C + D) - D = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{C}{D} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 1} = \frac{1}{3}$

---

Grafen $= a^2 - x^2 =$ $a = 2$

$= 2^2 - x^2$

den korsar x axeln när $y = 0$

$0 = 2^2 - x^2$

$x^2 = 2^2$

$x = 2$

$C + D = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = F(2) - F(0)$

$4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24 - 8}{3} = 5\frac{1}{3}$

$D = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

$C = (C + D) - D = 5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Tes: Kvoten $\frac{C}{D}$ är alltid $\frac{1}{3}$

$$y = a^2 - x^2$$

$$y = 0 \Rightarrow \quad a^2 = x^2$$

$$a = x$$

$$C+D = \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = F(a) - F(0)$$

$$= a^3 - \frac{a^3}{3}$$

$$D = \frac{a^2 \cdot a}{2} = \frac{a^3}{2}$$

$$C = (C+D) - D = a^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} = a^3 - \frac{2a^3}{6} - \frac{3a^3}{6} =$$

$$= a^3 - \frac{5a^3}{6} = \frac{a^3}{6}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{a^3}{2}} = \frac{\cancel{a^3} \cdot 2}{6 \cdot \cancel{a^3}} = \frac{1}{3}$$

$$y = a^2 - b^2x^2$$

$$y = 0 \Rightarrow \quad a^2 = b^2x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$$

$$C+D = \int_0^{\frac{a}{b}} \left(a^2 - b^2x^2\right) dx = \left[a^2x - \frac{b^2x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{b}} = F\left(\frac{a}{b}\right) - F(0) =$$

$$= \frac{a^3}{b} - \frac{b^2\left(\frac{a}{b}\right)^3}{3} = \frac{a^3}{b} - \frac{\frac{\cancel{b^2}a^3}{\cancel{b^3}}}{3} = \frac{a^3}{b} - \frac{\frac{a^3}{b}}{3} = \frac{2a^3}{3b}$$

$$D = \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{b}}{2} = \frac{\frac{a^3}{b}}{2} = \frac{a^3}{2b}$$

$$C = (C+D) - D = \frac{2a^3}{3b} - \frac{a^3}{2b} = \frac{4a^3}{6b} - \frac{3a^3}{6b} = \frac{a^3}{6b}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{a^3}{6b}}{\frac{a^3}{2b}} = \frac{\cancel{a^3} \cdot 2\cancel{b}}{6\cancel{b} \cdot \cancel{a^3}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kvoten är fortfarande $\frac{1}{3}$.

*Bedömning*

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | X | 1/2 | |
| Matematiska resonemang | X | 1/1 | |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/1 | |
| **Summa** | | **2/4/¤** | |

*Kommentar*: Elevens lösning uppfyller de krav som ställs för mycket väl godkänt. ¤

## Mål för matematik kurs D

### Kursplan 2000

**Trigonometri (T)**
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

**Differential- och integralkalkyl (D)**
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

**Övrigt(Ö)**
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

## Betygskriterier 2000

### Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

### Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

### Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

## Kopieringsunderlag för aspektbedömning

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |