NATIONAL TEST IN MATHEMATICS COURSE D
SPRING 2007

Directions

Test time	240 minutes for Part I and Part II together. We recommend that you spend no more than 60 minutes on Part I.
Resources	**Part I:** ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C and D.” *Please note that calculators are not allowed in this part.* **Part II:** Calculators and ”Formulas for the National Test in Mathematics Courses C and D”.
Test material	The test material should be handed in together with your solutions. Write your name, the name of your education programme / adult education on all sheets of paper you hand in. *Solutions to Part I should be handed in before you retrieve your calculator. You should therefore present your work on Part I on a separate sheet of paper. Please note that you may start your work on Part II without a calculator.*
The test	The test consists of a total of 16 problems. **Part I** consists of 8 problems and **Part II** consists of 8 problems. For some problems (where it says *Only answer is required*) it is enough to give short answers. For the other problems short answers are not enough. They require that you write down what you do, that you explain your train of thought, that you, when necessary, draw figures. When you solve problems graphically/numerically please indicate how you have used your resources. Problem 16 is a larger problem which may take up to an hour to solve completely. It is important that you try to solve this problem. A description of what your teacher will consider when evaluating your work is attached to the problem. Try all of the problems. It can be relatively easy, even towards the end of the test, to receive some points for partial solutions. A positive evaluation can be given even for unfinished solutions.
Score and mark levels	The maximum score is 43 points. The maximum number of points you can receive for each solution is indicated after each problem. If a problem can give 2 ”Pass”-points and 1 ”Pass with distinction”-point this is written (2/1). Some problems are marked with ¤, which means that they more than other problems offer opportunities to show knowledge that can be related to the criteria for ”Pass with Special Distinction” in Assessment Criteria 2000. Lower limit for the mark on the test Pass: 12 points Pass with distinction: 25 points of which at least 6 ”Pass with distinction”-points. Pass with special distinction: 25 points of which at least 13 ”Pass with distinction”-points. You also have to show most of the “Pass with special distinction” qualities that the ¤-problems give the opportunity to show.

Part I

This part consists of 8 problems that should be solved without the aid of a calculator. Your solutions to the problems in this part should be presented on separate sheets of paper that must be handed in before you retrieve your calculator. Please note that you may begin working on Part II without your calculator.

1. Find one antiderivative F of $f(x) = 10x^4 - 8x + 16$

Only answer is required (1/0)

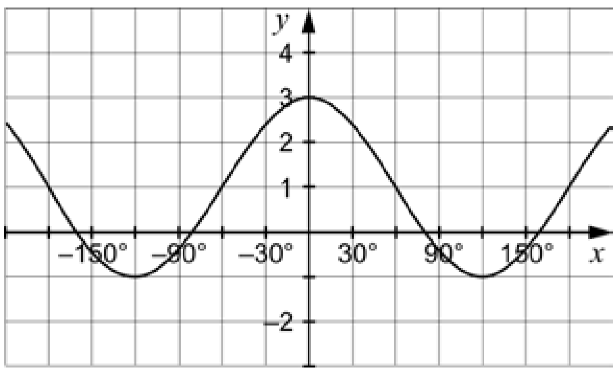
2. Differentiate

a) $f(x) = 5\cos 6x$ *Only answer is required* (1/0)

b) $g(x) = (2x+5)^6$ *Only answer is required* (1/0)

3. Evaluate $\int_1^2 (3x^2 - x)\mathrm{d}x$ (2/0)

4. The curve below can be written in the form $y = A\cos kx + b$



a) Determine the value of the constants A and b. *Only answer is required* (2/0)

b) Determine the value of the constant k. (0/1)

5. Determine the constant k so that $f'(3)=0$ when $f(x)=\ln x - kx$ (2/0)

6. The function f is defined by $f(x)=x^2-\sin 3x$

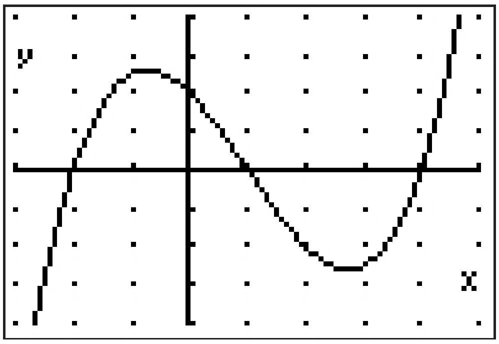
Find the largest possible value of the second derivative $f''(x)$. (1/1)

7. Arrange the following numbers according to size. Start with the smallest.

$A = \sin 2°$ $B = \sin 92°$ $C = \sin 182°$ $D = \sin 272°$

Only answer is required (0/1)

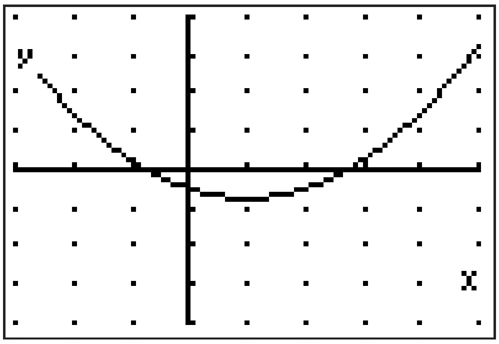
8. The figure to the right shows the graph of $y = f'(x)$
All figures in this problem are drawn to the same scale.



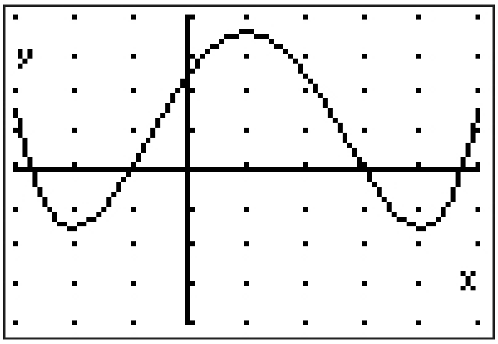
a) Which of the figures A – F best describes the graph of $y = f(x)$? Justify your choice. (0/2/¤)

b) Which of the figures A – F best describes the graph of $y = f''(x)$? Justify your choice. (0/2/¤)

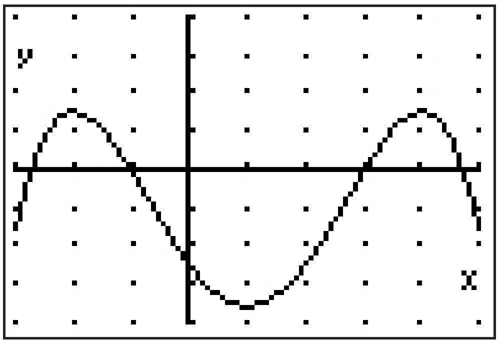
A



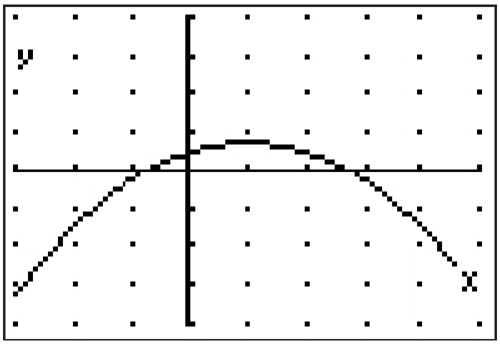
B



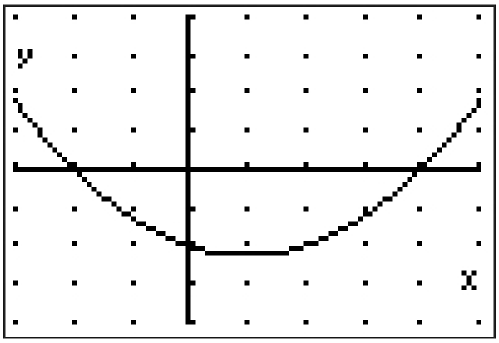
C



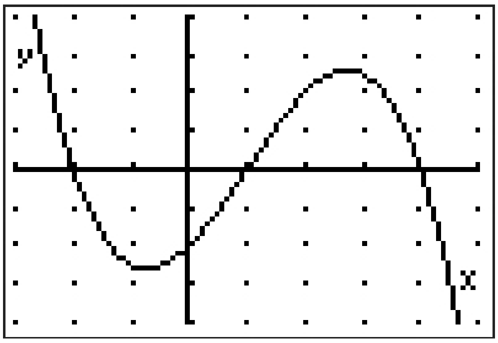
D



E



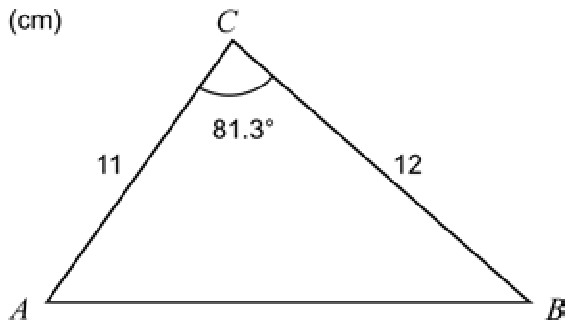
F



Part II

This part consists of 8 problems and you may use a calculator when solving them. Please note that you may begin working on Part II without your calculator.

9. The figure below shows the triangle *ABC*.



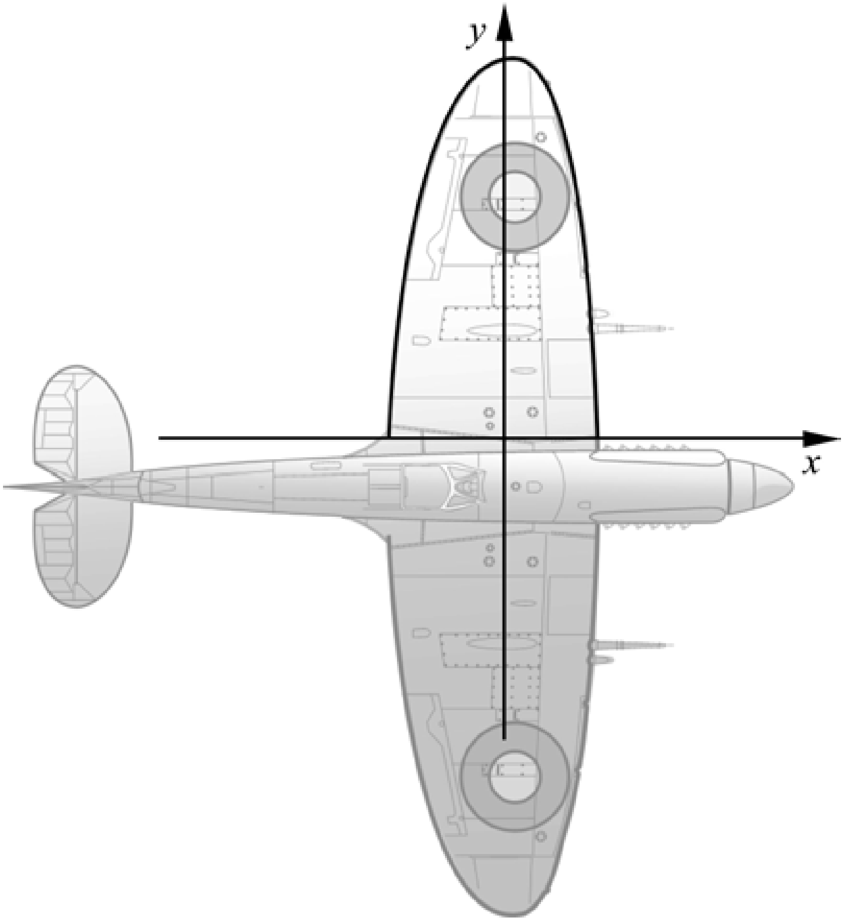
a) Calculate the length of the side *AB*. (2/0)

b) Calculate the area of the triangle. (1/0)

10. Find all the solutions to the equation $\sin 2x = 0.8$ (2/1)

11. The picture below shows a Spitfire aeroplane. If a coordinate system is placed as in the figure, then the shape of one of the wings can be described by the part of the curve $y = -x^4 - x^3 - x^2 + 0.3x + 5$ that is situated above the x-axis. x and y are in metres.

Calculate the area of the wing.
Give your answer in m^2 rounded to one decimal place. (3/0)



12. A function f has the properties:

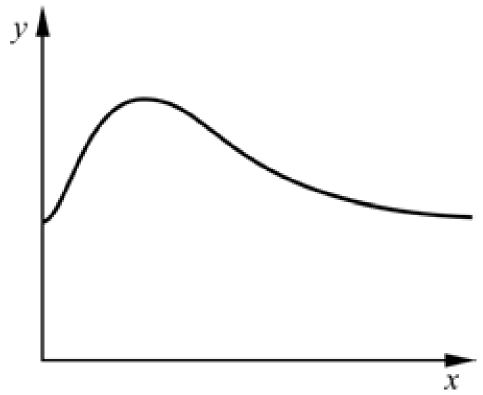
- $f'(x) = -2$
- $\int_0^3 f(x)\,dx = 3$

Determine $f(x)$ (0/2)

13. When Johan eats 50 grams of white bread for breakfast his blood sugar level changes. The blood sugar level is measured in millimol per litre (mmol/l).
The blood sugar level, y mmol/l can be described by the model

$$y = 0.032 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0.070x} + 4.0 \quad , \quad 0 \le x \le 120$$

where x is the number of minutes after Johan has had his breakfast.



You can see from the figure that the blood sugar level increases when Johan has had his breakfast.
The blood sugar level then reaches its maximum value and thereafter decreases.

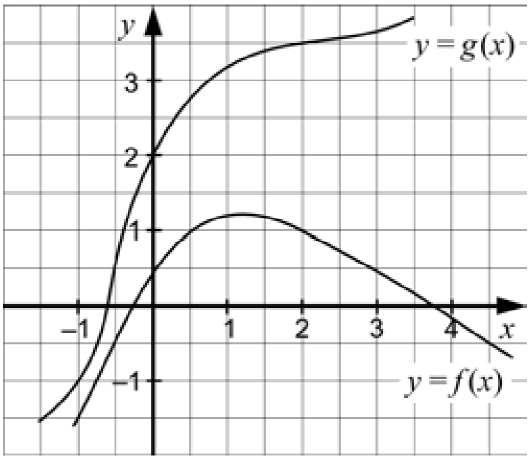
a) For how long is the blood sugar level above 6.0 mmol/l? (1/1)

b) How long after breakfast does the blood sugar level start to decrease? (1/0)

c) When does the blood sugar level decrease the fastest? (0/2)

14. Show that $\dfrac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x} = \tan x$ for all x where the expressions on both sides are defined. (0/1/¤)

15. The figure below shows the graphs of the functions $y = g(x)$ and $y = f(x)$



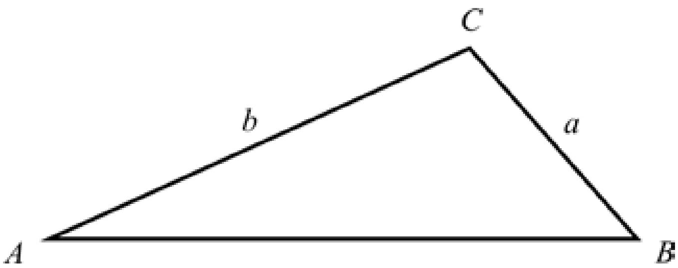
The function h is given by $h(x) = f(g(x))$
Use the figure to solve the following problems.

a) Determine $h(0)$ (0/1)

b) Determine $h'(0)$ (0/2/¤)

When assessing your work with this problem your teacher will take into consideration:
- How well you carry out your calculations
- How well you justify your conclusions
- How well you present your work
- How well you use mathematical language

16. In the triangle *ABC* the angle *B* is always twice as large as the angle *A*



- Determine $\frac{b}{a}$ if angle *A* is 25°
- Determine the angle *A* if $\frac{b}{a} = 1.5$
- Investigate how $\frac{b}{a}$ depends on the angle *A*. Specifically, write down which values $\frac{b}{a}$ can have. (2/4/¤)

Innehåll Sid nr

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15 och 16. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 1, 4, 5, 8, 10, 12, 14 och 15 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 7, 11, 12, 13 och 16.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2007 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Uppgift nr	g poäng	vg poäng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	1	0													x			x		x												
2a	1	0									x							x														
2b	1	0									x							x														
3	2	0													x	x		x	x	x												
4a	2	0						x										x		x												
4b	0	1						x														x		x								
5	2	0			x						x	x						x		x												
6	1	1						x			x							x		x			x	x								
7	0	1					x															x										
8a	0	2	¤												x	x						x	x	x	x			x	x			
8b	0	2	¤		x										x							x	x	x	x			x	x			
9a	2	0								x								x		x												
9b	1	0								x								x		x												
10	2	1					x											x	x	x		x	x	x								
11	3	0											x			x	x	x	x	x												
12	0	2													x	x						x	x	x		x						
13a	1	1											x					x		x		x		x								
13b	1	0									x							x	x	x												
13c	0	2									x	x										x	x	x								
14	0	1	¤						x													x	x	x	x					x		
15a	0	1									x											x										
15b	0	2	¤								x											x		x					x			
16	2	4	¤					x	x	x								x	x	x		x	x	x	x			x	x	x		
Σ	22	21		1/1			9/9				12/11																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	12 poäng.
Väl godkänd:	25 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	25 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa tre olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift				
MVG-kvalitet	8a	8b	14	15b	16
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning					
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	○	○		○	○
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang			○		○
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	○	○			○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ” Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+ 1g
med korrekt svar	+ 1g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD vt 2007)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
Del I			
1.			**Max 1/0**
		Korrekt svar ($F(x) = 2x^5 - 4x^2 + 16x$)	+1 g
2.			**Max 2/0**
	a)	Korrekt svar ($f'(x) = -30\sin 6x$)	+1 g
	b)	Korrekt svar ($g'(x) = 12(2x+5)^5$)	+1 g
3.			**Max 2/0**
		Korrekt primitiv funktion	+1 g
		med godtagbart svar (5,5)	+1 g
4.			**Max 2/1**
	a)	Korrekt svar (A = 2 och b =1)	+1-2 g
	b)	Godtagbar bestämning av k (k = 1,5)	+1 vg
5.			**Max 2/0**
		Korrekt derivering av *f*, $f'(x) = \frac{1}{x} - k$	+1 g
		med korrekt bestämning av k $\left(k = \frac{1}{3}\right)$	+1 g

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
6.		**Max 1/1**
	Korrekt bestämning av $f''(x)$, $f''(x) = 2 + 9\sin 3x$	+1 g
	med godtagbar motivering och korrekt svar (11)	+1 vg
7.		**Max 0/1**
	Korrekt svar (D, C, A, B)	+1 vg
8.		**Max 0/4/¤**
a)	Godtagbar motivering som utesluter minst tre av alternativen	+1 vg
	med korrekt alternativ (B)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera och tolka graferna och dra korrekta slutsatser med motivering som utesluter samtliga felaktiga alternativ.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa med korrekt och lämpligt matematiskt språk.

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

Elevlösning 1 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)

a) B. Först (från vänster) är derivatan negativ vilket
betyder att f(x):s k-värde är negativt, funktionen faller.
Sedan skär derivatan x-axeln och får då y-koordinaten
0 vilket betyder att f(x) har en minimipunkt. Sedan
är derivatan positiv och då stiger funktionen f(x) osv.
Derivatan = 0 för tre x-värden vilket medför att
funktionen f(x) ska ha tre extrempunkter.

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att ge en beskrivning av funktionen som utesluter alla alternativ utom alternativ B. Elevens redovisning och matematiska språk är nätt och jämnt tillräcklig för att anses uppnå MVG-nivå.

b)	Godtagbar motivering som utesluter minst tre av alternativen	+1 vg
	med korrekt alternativ (A)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera och tolka graferna och dra korrekta slutsatser med motivering som utesluter samtliga felaktiga alternativ.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa med korrekt och lämpligt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

Elevlösning 1 (1 vg)

b) $f'(x)$ har ett lokalt maximivärde och ett lokalt minimivärde. $f''(x)$ ska då skära x-axeln två ggr.
Funktionen $f''(x)$ skär x-axeln för samma x-värden som $f'(x)$ har sina extrempunkter.
Alltså graf D

Kommentar: Eleven ger en godtagbar motivering som utesluter tre alternativ men har ett felaktigt svar.

Elevlösning 2 (2 vg)

b) A eftersom där $f''(x)$ kurvan bryter x-axeln, är $f'(x)$:s max och min punkter. Detta visas i figuren. Denna illustrerar tydligt var $f'(x)$:s max och min punkter befinner sig

Kommentar: Eleven ger ett korrekt svar men har en motivering som inte utesluter samtliga felaktiga alternativ. Elevens motivering når därför inte upp till MVG-nivå.

Del II

9.			**Max 3/0**
	a)	Godtagbar ansats, t ex tecknar cosinussatsen korrekt	+1 g
		med godtagbar bestämning av sidan *AB* (15 cm)	+1 g
	b)	Godtagbar bestämning av arean (65 cm^2)	+1 g
10.			**Max 2/1**
		Godtagbar bestämning av en vinkel, 26,6º eller 63,4º	+1 g
		med godtagbar bestämning av ytterligare en vinkel, 26,6º eller 63,4º	+1 g
		med godtagbar bestämning av samtliga lösningar ($26{,}6° + n \cdot 180°,\ 63{,}4° + n \cdot 180°$)	+1 vg

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
11.			**Max 3/0**
		Godtagbar bestämning av integrationsgränserna	+1 g
		Godtagbar fortsättning, t ex tecknar ett uttryck för arean	+1 g
		med godtagbart svar (10,4 m^2)	+1 g
12.			**Max 0/2**
		Godtagbar ansats, t ex inser att f är en linjär funktion med $k = -2$	+1 vg
		med i övrigt godtagbar lösning ($f(x) = 4 - 2x$)	+ 1 vg
13.			**Max 2/3**
	a)	Godtagbar bestämning av en av tidpunkterna	+1 g
		med i övrigt godtagbar lösning (44 min)	+1 vg
	b)	Godtagbar lösning (29 minuter)	+1 g
	c)	Godtagbar ansats, t ex eleven inser att minimum av derivatan ska undersökas	+1 vg
		med i övrigt godtagbar lösning (49 min)	+1 vg
14.			**Max 0/1/¤**
		Eleven genomför ett ”bevis” som ej är formellt korrekt, t ex bygger på den likhet som skall bevisas	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra beviset formellt korrekt.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
15.		**Max 0/3/¤**
a)	Godtagbar lösning (1)	+1 vg
b)	Godtagbar ansats, t ex visar att $h'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning (-1)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med utgångspunkt från kedjeregeln hämta nödvändig information från figuren och sedan lösa problemet.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

* Eftersom denna uppgift kräver MVG-kvalitet för sin lösning så kommer godtagbara elevlösningar att ge vg-poäng och visa på MVG-kvalitet på samma gång.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

16. **Max 2/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

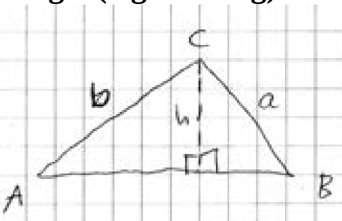
Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** Lägre →	Högre	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet*	Eleven beräknar förhållandet mellan sidorna a och b om vinkeln A är $25°$. $(\frac{b}{a} \approx 1{,}81)$ **1-2 g**	Eleven genomför punkt 1 och bestämmer vinkeln A enligt punkt 2. $(\wedge A = 41{,}4°)$ **2 g och 1-2 vg**	**2/2**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys ,reflektion, bevis och andra matematiska former av matematiska resonemang.*		Eleven inleder en allmän undersökning av förhållandet mellan sidorna t ex kommer fram till att $\frac{b}{a} = 2\cos A$ eller genom att eleven med numerisk eller grafisk metod kommer fram till hur $\frac{b}{a}$ beror av A **1 vg**	**0/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är lätt att följa och omfattar minst två av punkterna. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	**0/1**
Summa			**2/4**

MVG kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	inleda en allmän undersökning och motivera att $0° < \angle A < 60°$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att $1 < \frac{b}{a} < 2$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16

Elevlösning 1 (2 g och 4 vg)



$B = 2A$

$\sin A = \frac{h}{b}$ $\quad b \sin A = h$

$\sin B = \frac{h}{a}$ $\quad a \sin B = h$

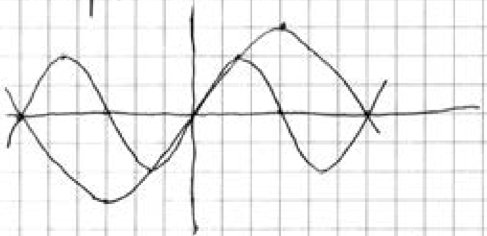
$a \sin B = b \sin A$

$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$ $\quad \sin B = \sin 2A$

$\frac{\sin 2A}{\sin A} = \frac{b}{a}$

- $A = 25^\circ$ $\quad \frac{\sin 50^\circ}{\sin 25^\circ} = 1{,}8$ $\quad \underline{\underline{\frac{b}{a} = 1{,}8}}$
- $\frac{b}{a} = 1{,}5$ $\quad \frac{\sin 2A}{\sin A} = 1{,}5$ $\quad \sin 2A = 1{,}5 \sin A$

Jag ritade upp funktionerna på min räknare och fick ut att



$\underline{\underline{A = 41{,}4^\circ}}$

- A finns i intervallet $0 < A < 90$

Ritar man upp funktionen $\frac{\sin 2A}{\sin A}$ som graf ser man att $\frac{b}{a}$ minskar ju större A blir

När A går mot 0 går $\frac{b}{a}$ mot 2

När A går mot 90° går $\frac{b}{a}$ mot 0

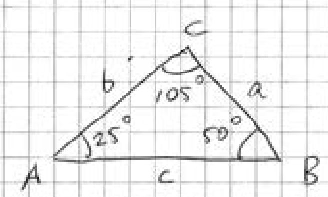
När $A = 60^\circ$ är $\frac{b}{a} = 1$

Bedömning

Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		X	2/2	
Matematiska resonemang		X	0/1	Eleven beskriver hur *b/a* beror av *A* med hjälp av grafisk metod men eleven har inte sett vinkelns begränsning i triangeln.
Redovisning och matematiskt språk		X	0/1	
Summa			**2/4**	

Elevlösning 2 (2 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

1.



sinussatsen: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$

$\frac{b}{a} = \frac{\sin 50°}{\sin 25°}$

$\frac{b}{a} = 1{,}81\ldots$ svar $\frac{b}{a} \approx 1{,}8$

2. $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$

$\frac{b}{a} = \frac{\sin 2A}{\sin A}$

$\frac{b}{a} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A}$

$\frac{b}{a} = 2 \cos A$

$\frac{1{,}5}{2} = \cos A$

$A = \cos^{-1} 0{,}75 = 41{,}4\ldots$ svar $A = 41{,}4°$

3. $B = 2A$ sinussatsen ger: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$

$\sin B = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\frac{b}{a} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A} = \frac{2 \cos A}{\sin A}$

slutsats: $\frac{b}{a} = 2 \cos A$

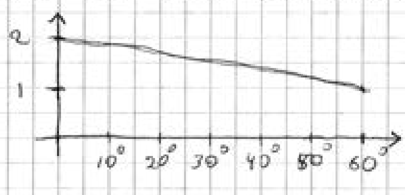
A	$= b/a$
10°	1,97
20°	1,88
30°	$\sqrt{3}$
40°	1,53
45°	$\sqrt{2}$
50°	1,29

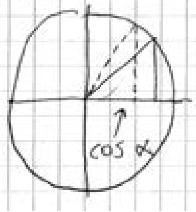
För att vinkeln C inte ska försvinna måste A+B vara mindre än 180°

$A+B < 180° \Leftrightarrow 3A < 180°$

$A < 60°$

Värdet på $\frac{b}{a}$ minskar när A ökar. Detta stämmer med enhetscirkeln





Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			X	2/2	
Matematiska resonemang			X	0/1	
Redovisning och matematiskt språk			X	0/1	
Summa				**2/4**	

Kommentar: Eleven visar MVG-kvaliteter genom att motivera att $A < 60°$ och genom att visa grafiskt att *b/a* ligger mellan 1 och 2. Elevens redovisning visar MVG-kvalitet även om eleven kunde ha varit tydligare när det gäller hur *b/a* varierar.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänd

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

	Kvalitativa nivåer			Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande					
Matematiska resonemang					
Redovisning och matematiskt språk					
Summa					

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	8a	8b	14	15b	16	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	8a	8b	14	15b	16	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	8a	8b	14	15b	16	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Insamling av provresultat

Vårterminen 2007 kommer resultat från alla skolor att samlas in. Denna insamling av **resultat sker på uppgiftsnivå för elever födda vissa datum**. Dessutom ombeds läraren att besvara en enkät och skicka in bedömda elevlösningar. Dessa resultat skickas till provinstitutionen.

Förutom ovan nämnda resultatinsamling ska vissa skolor, de som ingår i Skolverkets urval, även lämna **uppgift om endast kurs**- och **provbetyg för alla elever** för varje undervisningsgrupp**.** Denna insamling sker via SCB:s hemsida. Separat information och anvisningar rörande denna insamling skickas direkt till de skolor som ingår i urvalet.

För matematik kurs D gäller följande:

Elevresultat rapporteras **för elever födda den 8:e, 10:e, 17:e och 26:e varje månad** på en webbplats som nås via http://www.umu.se/edmeas/np. I samband med resultatredovisningen fyller varje lärare i en **lärarenkät** som finns på samma webbplats**.**

Bedömda elevlösningar till proven skickas in per post för **elever födda den 8:e i varje månad.**

De bedömda elevlösningarna skickas till:

Umeå universitet
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Nationella prov
901 87 Umeå

Mer information om insamlingen av resultat, lärarenkäter och elevlösningar medföljer provmaterialet. Där delges bland annat det lösenord som behövs för att kunna logga in på webbsidan för resultatredovisning.

För mer information kontakta:
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet
Monika Kriström, tel: 090-786 59 22, e-post: monika.kristrom@edmeas.umu.se