NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2009

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. **Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.**
Hjälpmedel	**Del I**: ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II**: Grafritande eller symbolhanterande räknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 18 uppgifter. **Del I** består av 10 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras)* behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 18 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 43 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt:	12 poäng.
Väl godkänt:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänt:	26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de ¤-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

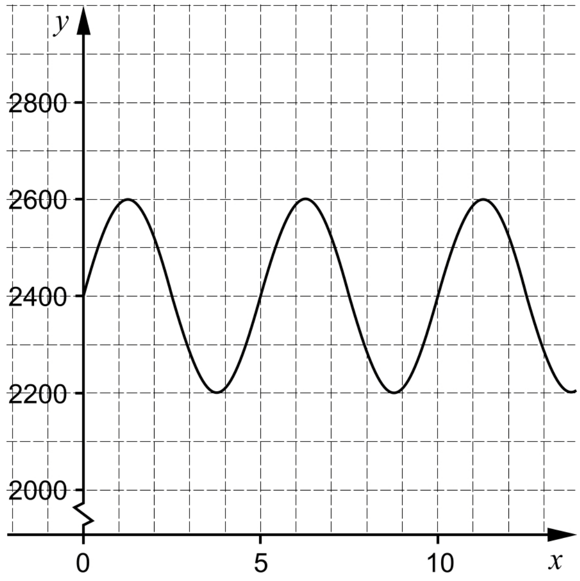
1. Bestäm en primitiv funktion F till $f(x) = 4x^3 + 8$ *Endast svar fordras* (1/0)

2. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x + \cos x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $g(x) = \ln(2x + 1)$ *Endast svar fordras* (0/1)

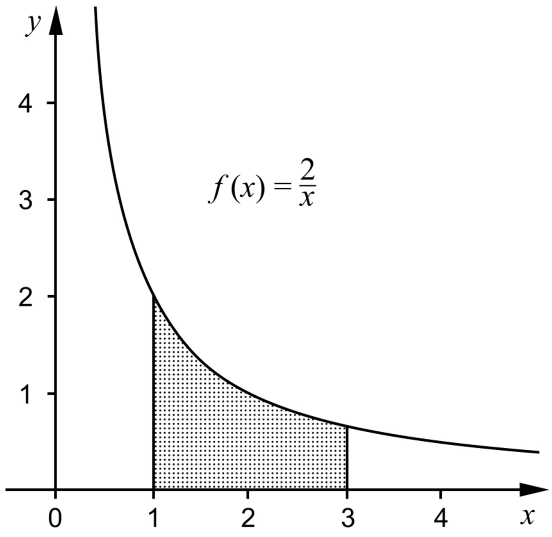
3. Under en normal andning varierar volymen luft i lungorna hos en försöksperson enligt diagrammet nedan. Om volymen luft efter tiden x sekunder betecknas med y ml kan volymen som funktion av tiden beskrivas med $y = A\sin 1{,}26x + B$



Bestäm värden på konstanterna A och B. *Endast svar fordras* (2/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{2}{x}$

Beräkna arean av det skuggade området. (2/0)



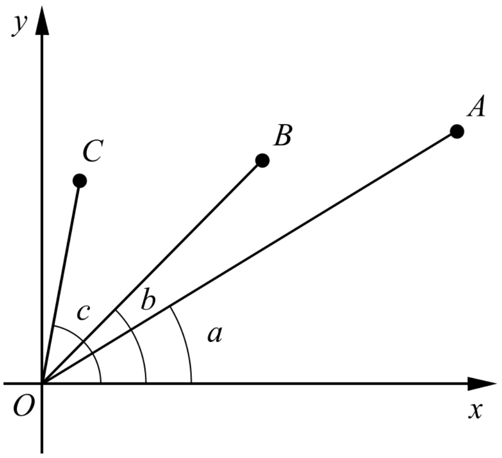
5. Dagen före midsommarafton mäter man trafikflödet vid ett visst ställe på Ölandsbron. Trafikflödet i bilar per minut beskrivs med hjälp av en funktion $f(t)$, där t är tiden i minuter räknat från kl 12.00

Förklara med ord vad $\int_{60}^{120} f(t)\mathrm{d}t = 3240$ innebär. (2/0)

6. Från punkterna *A*, *B* och *C* i koordinatsystemet har linjer ritats till origo. Linjerna bildar olika vinklar med *x*-axeln.

a = vinkeln mellan *AO* och *x*-axeln
b = vinkeln mellan *BO* och *x*-axeln
c = vinkeln mellan *CO* och *x*-axeln

Rangordna följande värden från det *minsta* till det *största*

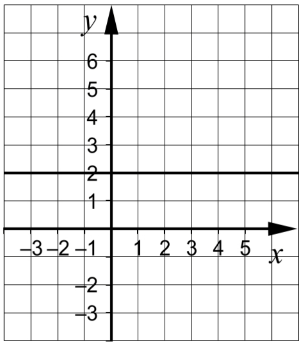


a) $\sin a$, $\sin b$ och $\sin c$ *Endast svar fordras* (1/0)

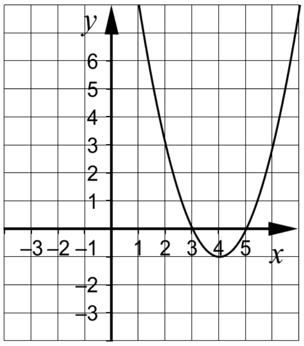
b) $\sin a$, $\cos a$, $\sin c$ och $\cos c$ *Endast svar fordras* (0/1)

7. Vilken av graferna *A*-*F* visar en primitiv funktion till $f(x) = 2x - 2$?
Glöm inte att motivera. (0/2)

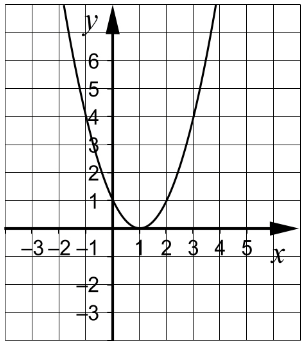
A



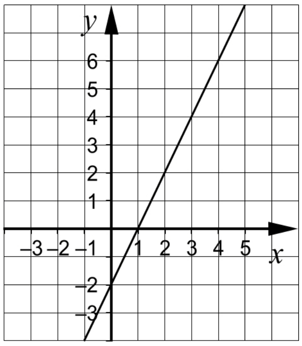
B



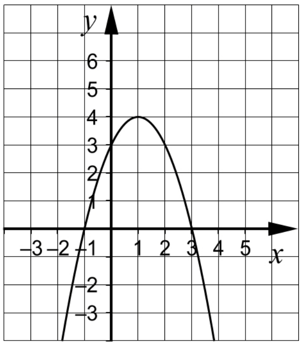
C



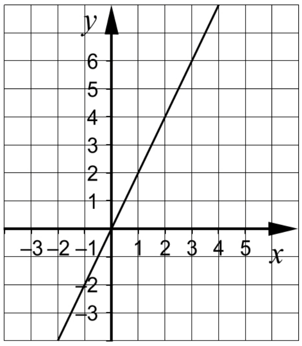
D



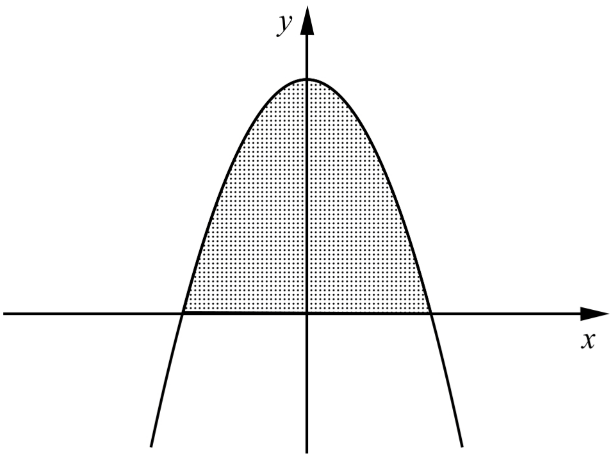
E



F



8. I figuren nedan visas grafen till funktionen $y = c - x^2$ för ett visst värde på *c* där $c > 0$



a) Teckna ett uttryck för arean av det skuggade området och beräkna det exakta värdet då $c = 3$ (1/1)

b) Bestäm *c* så att arean av det skuggade området blir 4 areaenheter. (0/2)

9. Funktionen f är definierad genom $f(x) = 3x + \cos 2x$

Bestäm eventuella nollställen till derivatan $f'(x)$ och
tolka vad derivatan säger om funktionen f (1/1/¤)

10. Senad och Marja har försökt lösa ekvationen $2\sin^2 x - \sin x = 0$
Så här blev deras lösning:

Vi börjar med att dividera båda leden med 2: $\sin^2 x - \dfrac{\sin x}{2} = 0$

Nu dividerar vi båda leden med sin *x*: $\sin x - \dfrac{1}{2} = 0$

Så här blir fortsättningen: $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

De har inte bestämt alla lösningar.
Förklara varför och bestäm samtliga lösningar. (1/1/¤)

Del II

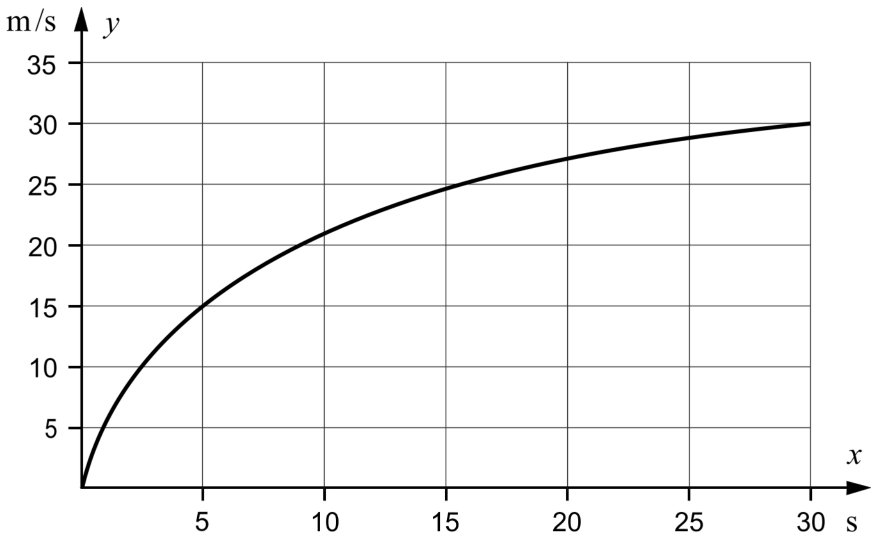
Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

11. I en triangel *ABC* är vinkel $A = 64,4°$ och vinkel $B = 41,4°$. Sidan *AC* är 137 cm.

Beräkna längden av sidan *BC*. (2/0)

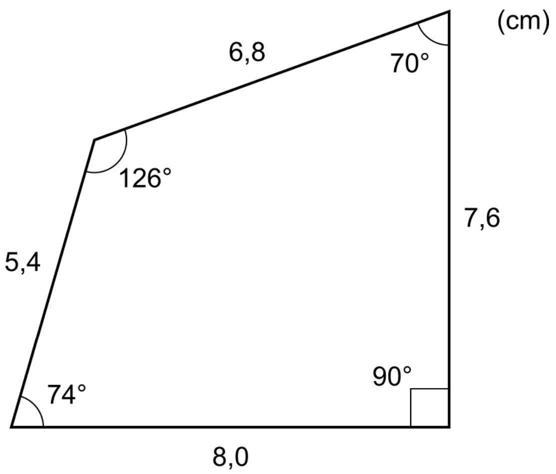
12. Figuren visar hastighetsgrafen för en bil som accelererar från stillastående till hastigheten 30 m/s under en tidsperiod på 30 s.

Uppskatta den sträcka bilen färdas under denna tidsperiod. (2/0)



13. I mitten på nittiotalet köpte Sven en stor fritidstomt. Han tänker sälja en del av sin tomt och sälja den till priset 130 kr/m^2. På en karta markerar han det område han tänker sälja och mäter sidor och vinklar (se figuren). Kartans skala är 1:500.

Hur mycket ska han begära för tomten? (3/0)

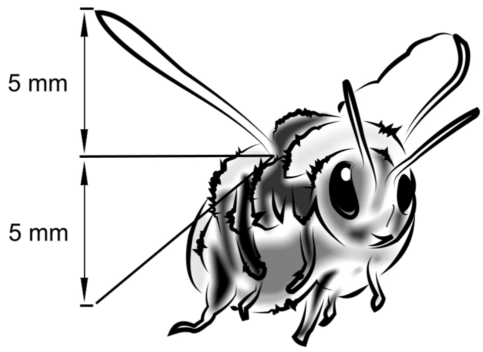


14. En humlas vingar rör sig periodiskt när den flyger. Vingspetsens rörelse i vertikalled kan beskrivas med funktionen

$y = 5 \cdot \sin 390\pi t$

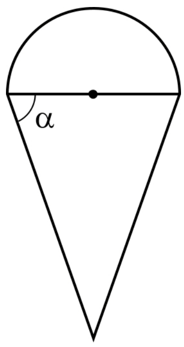
y = vingspetsens läge i vertikalled i mm
t = tiden i sekunder

Hur många vingslag per sekund gör humlan?
1 vingslag motsvarar 1 period.

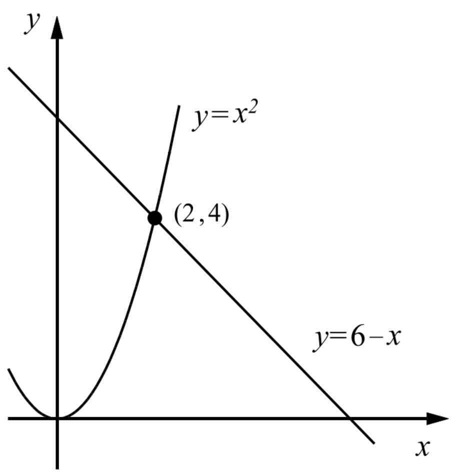


(1/1)

15. Figuren visar en halvcirkel och en likbent triangel, båda med lika stor area.
Bestäm $\tan\alpha$ (0/2/¤)



16. Figuren visar ett område som begränsas av kurvan $y = x^2$, linjen $y = 6 - x$ och x-axeln.



Bestäm områdets omkrets. Svara med tre värdesiffror.

Du får använda dig av att längden L av en kurva $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$

kan beräknas med formeln $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ (0/2)

17. För vilka x i intervallet $0 \le x \le 2\pi$ är $f(x) = \dfrac{1}{\tan x - 1}$ inte definierad? (1/1/¤)

Vid bedömning av ditt arbete med uppgiften kommer läraren att ta hänsyn till:
• Hur väl du utför dina beräkningar
• Hur väl du motiverar dina slutsatser
• Hur väl du redovisar ditt arbete
• Hur väl du använder det matematiska språket

18. Funktionen f är definierad genom $f(x) = x^k \mathrm{e}^{-x}$, där k är ett positivt heltal större än ett. Din uppgift är att undersöka hur maximi-, minimi- och terrasspunkter till f beror av värdet på k

- Börja med att rita grafen till f för några värden på k (se tabell nedan) och bestäm x-koordinaten för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter:

k	x-koordinat för eventuella maximipunkter	x-koordinat för eventuella minimipunkter	x-koordinat för eventuella. terrasspunkter
2			
3			
4			
5			

- Formulera en slutsats om sambandet mellan k och x-koordinaterna för maximi-, minimi- respektive terrasspunkterna till f

- Bevisa att dina slutsatser ovan gäller för alla positiva heltalsvärden på k
  Du får använda dig av att $f'(x) = x^{k-1}e^{-x}(k - x)$ (2/5/¤)

Innehåll

Sid nr

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 4, 5, 6, 8, 13, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17 och 18. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 14 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 4, 8, 9, 16, 17 och 18.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2009 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte).

Upp-gift nr	g po-äng	vg po-äng	¤	Kunskapsområde: Övr			Trigonometri				Diff & integral							Betygskriterium: Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	1	0													x			x		x												
2a	1	0									x							x														
2b	0	1									x											x										
3	2	0						x										x		x												
4	2	0													x	x		x	x	x												
5	2	0														x		x	x	x												
6a	1	0					x											x														
6b	0	1					x															x										
7	0	2													x							x	x	x	x							
8a	1	1					x		x						x	x		x	x	x		x		x	x							
8b	0	2			x										x	x						x	x	x	x							
9	1	1	¤		x			x	x		x							x		x		x		x	x	x		x				
10	1	1	¤						x									x		x		x	x	x	x				x	x		
11	2	0								x								x		x												
12	2	0															x	x	x	x												
13	3	0								x								x	x	x												
14	1	1						x										x		x		x		x	x							
15	0	2	¤				x			x												x	x	x	x			x				
16	0	2														x	x					x	x	x	x							
17	1	1	¤					x	x									x		x		x	x	x	x			x	x			
18	2	5	¤								x	x	x					x	x	x		x	x	x	x	x		x	x	x		
Σ	23	20		0/1			11/7				12/12																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt:	12 poäng.
Väl godkänt:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänt:	26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter.

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift				
MVG-kvalitet	9	10	15	17	18
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○		○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	○			○	○
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang		○			○
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk				○	○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD vt 2009)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
Del I			
1.			**Max 1/0**
		Korrekt svar (t ex $F(x) = x^4 + 8x$)	+1 g
2.			**Max 1/1**
	a)	Korrekt svar ($f'(x) = 2\cos 2x - \sin x$)	+1 g
	b)	Korrekt svar $\left(g'(x) = \dfrac{2}{2x+1} \right)$	+1 vg
3.			**Max 2/0**
		Korrekt svar (*A* = 200 och *B* = 2400)	+1-2 g
4.			**Max 2/0**
		Korrekt primitiv funktion	+1 g
		med korrekt svar ($2\ln 3$ a.e.)	+1 g
5.			**Max 2/0**
		Inser att integralen betyder antalet bilar som passerar	+1 g
		med i övrigt korrekt beskrivning (t ex ”3240 bilar passerar mellan 13.00 och 14.00”)	+1 g

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
6.			**Max 1/1**
	a)	Korrekt svar ($\sin a, \sin b, \sin c$)	+1 g
	b)	Korrekt svar ($\cos c, \sin a, \cos a, \sin c$)	+1 vg
7.			**Max 0/2**
		Korrekt graf (C)	+1 vg
		med godtagbar motivering	+1 vg
8.			**Max 1/3**
	a)	Tecknar ett godtagbart uttryck för arean	+1 g
		och beräknar värdet på arean ($4\sqrt{3}$ a.e.)	+1 vg
	b)	Tecknar ett godtagbart uttryck för arean	+1 vg
		och beräknar konstanten c ($c = 3^{2/3}$)	+1 vg
9.			**Max 1/1/¤**
		Bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x) = 3 - 2\sin 2x$	+1 g
		drar slutsatsen att $f'(x)$ saknar nollställen med godtagbar motivering, t ex ”sinus för en vinkel kan inte vara större än ett”	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med hjälp av derivatan dra slutsatsen att f är växande för alla x
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
10.		**Max 1/1/¤**
	Godtagbar ansats, t ex inser att även $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ är en lösning	+1 g
	bestämmer den fullständiga lösningen ($x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, $x = n \cdot \pi$)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	analysera den presenterade lösningen och förklara varför det inte är tillåtet att dividera ekvationen med $\sin x$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

$\sin^2 x - \frac{\sin x}{2} = 0$

$\sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$

Det innebär att

$\sin x = 0$

eller

$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$ lösningen ovan $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

Alternativt $x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi =$

$= \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n \cdot \pi = n \cdot \pi$

Kommentar: Eleven löser den givna uppgiften men kommenterar inte felaktigheterna i den givna lösningen.

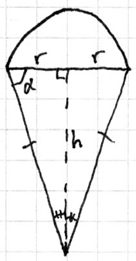
Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del II		
11.		**Max 2/0**
	Godtagbar ansats, t ex använder sinussatsen	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning (187 cm)	+1 g
12.		**Max 2/0**
	Godtagbar ansats, t ex väljer en lämplig numerisk metod	+1 g
	med godtagbar beräkning av sträckan (630 m – 700 m)	+1 g
13.		**Max 3/0**
	Godtagbar ansats, t ex delar in området i två trianglar och beräknar arean av en av dem	+1 g
	med godtagbar beräkning av hela områdets area (ej nödvändigt att skalan är utnyttjad)	+1 g
	med korrekt svar (150 000 kr)	+1 g
14.		**Max 1/1**
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer perioden	+1 g
	med i övrigt korrekt lösning och svar (195 vingslag per sekund)	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
15.		**Max 0/2/¤**
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer sambandet mellan radie och höjd	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)



$$\frac{r^2\cdot\pi}{2} = \frac{2r\cdot h}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{r}$$

Kommentar: Eleven sätter upp ett samband mellan de två areorna, vilket ger ansatspoängen.

Uppg. Bedömningsanvisningar **Poäng**

Elevlösning 2 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$$\begin{cases} A_o = \dfrac{\pi r^2}{2} \\ A_\Delta = \dfrac{2r \cdot \frac{r}{\tan A}}{2} \end{cases}$$

$$A_o = A_\Delta$$

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{2r \cdot \frac{r}{\tan A}}{2}$$

$$\pi r^2 = \frac{2r^2}{\tan A}$$

$$\pi = \frac{2}{\tan A}$$

$$\tan A = \frac{2}{\pi}$$

Kommentar: Eleven utför en felaktig ansats, men fullföljer lösningen och får det inverterade värdet. Lösningen tilldelas den andra vg-poängen och MVG-kvaliteten för generell metod.

16. **Max 0/2**

Tecknar ett korrekt integraluttryck för längden av kurvan	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning och svar (16,3 l.e.)	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
17.		**Max 1/1/¤**
	Bestämmer minst ett x-värde där f inte är definierad med godtagbar motivering	+1 g
	Bestämmer minst två x-värden där f inte är definierad med godtagbar motivering, t ex bestämmer de två x-värden då $\tan x = 1$ med motiveringen ”division med noll går ej”	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera funktionsuttrycket, dra korrekta slutsatser och formulera ett fullständigt och exakt svar $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} \text{ och } \frac{3\pi}{2}\right)$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett lämpligt och i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ enl. tabellen

division med noll är ej tillåtet,

samt, återigen enl. tabellen, $\frac{\pi}{2}$

där står det uttryckligen "ej def"

Kommentar: Eleven bestämmer två x-värden med godtagbar motivering.

Elevlösning 2 (1 g och 1 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$0 \leq x \leq 2\pi$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\tan(x) - 1}$

funktionen är ej definierad när tangens är 1 (0 i nämnaren)

$\tan(x) = 1$

$x_1 = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

Alltså $\dfrac{\pi}{4}$ och $\dfrac{5\pi}{4}$ i intervallet.

$\tan(x)$ är ej definierad vid

$\dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

Alltså $\dfrac{\pi}{2}$ och $\dfrac{3\pi}{2}$ i intervallet.

<u>Svar</u>: $f(x)$ är inte definierad då

$x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$ och $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom en fullständig beskrivning av de fall där funktionen inte är definierad med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

18. **Max 2/5/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Bestämmer korrekta värden i tabellen för minst två rader *eller* bestämmer korrekta värden i tabellen för en kolumn. **1 g**	Bestämmer samtliga värden i tabellen korrekt. **1 g och 1 vg**	Bestämmer samtliga värden i tabellen korrekt *och* bestämmer med hjälp av derivatan samtliga nollställen $x = k$ och $x = 0$ **1 g och 2 vg**	**1/2**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Drar **en** av följande slutsatser baserat på några värden på k 1. f har maximum för $x = k$ 2. f har minimum för $x = 0$ om k är jämnt. 3. f har terrass för $x = 0$ om k är udda. **1 g**	Drar **två** av följande slutsatser baserat på några värden på k 1. f har maximum för $x = k$ 2. f har minimum för $x = 0$ om k är jämnt. 3. f har terrass för $x = 0$ om k är udda. **1 g och 1 vg**	Drar följande slutsatser baserat på värden i en fullständigt ifylld tabell 1. f har maximum för $x = k$ 2. f har minimum för $x = 0$ om k är jämnt. 3. f har terrass för $x = 0$ om k är udda. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är lätt att följa och förstå, det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	**0/1**
Summa				**2/5**

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generella metoder för att visa minst en av slutsatserna i matrisen ovan.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	bestämma derivatans samtliga nollställen ($x = k$ och $x = 0$) och använda dessa för att dra slutsatserna i matrisen ovan.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	bevisa de tre slutsatserna i matrisen ovan, t ex genom teckenstudium av f'
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett lämpligt och i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 18

Elevlösning 1 (2 g)

Om k är ex 3 så blir maxpunkten ca 3
så vad du än sätter in i k så ~~blir~~ kommer
x att vara detsamma vid maximipunkten

k	x-koordinat för ev max	x kordinat för ev min	x koordinat för ev terass
2	≈ 2	X	
3	≈ 3	X	
4	≈ 4	X	
5	≈ 5	X	

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/0	
Matematiska resonemang	X	1/0	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	
Summa		**2/0**	

Elevlösning 2 (2 g och 1 vg)

$f'(x) = x^k e^{-x}$ $k = +$ heltal

-

k	x-koordinat för ev. max	x-koordinat för ev. min	x-koordinat för ev terass
2	$1{,}99 = 2$	$-1{,}23 \cdot 10^{-6}$	
3	$2{,}99 = 3$		FINNS
4	$3{,}99 = 4$	$6{,}357 \cdot 10^{-7}$	
5	5		FINNS

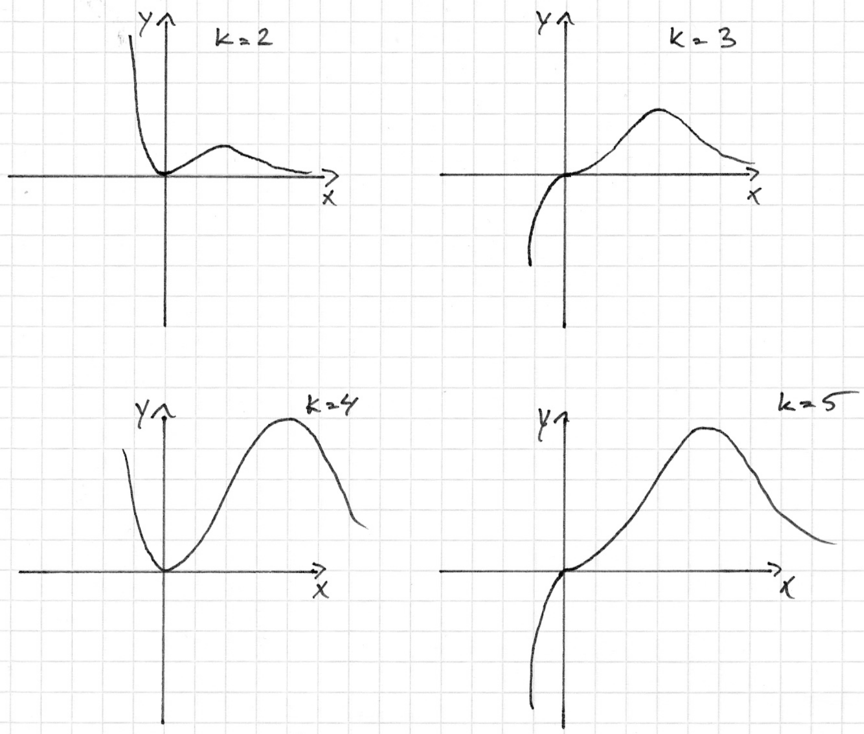
- Då k är ett udda heltal finns det en terasspunkt och ingen minipunkt. Då k är ett jämt heltal finns det en minipunkt men ingen terasspunkt. I bägge fallen finns det en maxpunkt.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/0	Ej helt korrekt ifylld tabell.
Matematiska resone-mang	X	1/1	Nedre gräns för godtagbara förklaringar.
Redovisning och matematiskt språk		0/0	
Summa		**2/1**	

Elevlösning 3 (2 g och 4 vg)

$f(x) = x^k e^{-x}$ k = positivt heltal



k	x-koordinat för ev max	x-koordinat för ev. min	x-koordinat för ev. terass
2	2	0	
3	3		0
4	4	0	
5	5		0

- SLUTSATS:

Alla funktioner med ett positivt heltal som k-värde har en maxkurva.
Jag drar slutsatsen av att det k-värde man sätter in i funktionen har samma x-värde (koordinat) för max

dvs är $k = 2$ är $x_{max} = 2$

Det jag också drar en slutsats om är att varje udda tal dvs. 3, 5, 7, ... osv har en terasskurva, medan varje jämt tal ex 2, 4, 6 har en minimikurva.

Man ser också att för varje ökat k-värde växer funktionens maxkurva.

- $f'(x) = x^{k-1} e^{-x} (k-x)$ Gäller alla k, $k = n$:te talet

$f'(x) = 0$

$f'(x) = x^{n-1} e^{-x} (n-x)$

$x^{n-1} e^{-x} (n-x) = 0$ $e^{x} > 0$

$n = x$-värde för maximipunkt

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/1	
Matematiska resonemang	X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/4**	

Elevlösning 4 (2 g och 5 vg och två av MVG-kvaliteterna)

k	x-koordinat för ev. max	x-koordinat för ev. min	x-koordinat för ev. terass
2	2	0	
3	3		0
4	4	0	
5	5		0

Varje kurva har ett maximivärde. Vilken x-koordinat som detta värde har beror på k. x-koordinaten är nämligen samma som värdet på k.
k har också en annan funktion, nämligen om kurvan f har en minimi- eller teraspunkt. Denna punkt ligger alltid i origo, oberoende av k-värdet. Om k är ett jämnt tal blir det en minimipunkt i origo. Om k är ett udda tal blir det istället en teraspunkt.

Detta bevisas genom derivatan av f som är $f'(x) = x^{k-1}e^{-x}(k-x)$. Av derivatans funktion framgår att f alltid har två extrempunkter. Dessa får vi fram genom nollproduktsmetoden:

$x^{k-1}e^{-x}(k-x) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = k = x$

Vi är, med andra ord, inte begränsade till heltal för att f ska ha en andra extrempunkt. Nu måste vi också bevisa att x_2 verkligen anger en maximipunkt. Då anv. vi andra derivatan.

Vi får: $f''(x) = x^{k-1} e^{-x} \cdot (-1) + x^{k-2} \cdot e^{-x} (k-x)^2$

(produktregeln)

Vi prövar andraderivatan då $k=3$. x_2 blir då 3

$3^{3-1} \cdot e^{-3} (-1) + 3^{3-2} \cdot e^{-3} (3-3)^2 = 3^2 \cdot e^{-3} (-1) + 3^1 \cdot e^{-3} \cdot 0^2 =$

$= -6e^{-3}$

Andraderivatan är negativ, vilket innebär att x_2 anger en maximipunkt. V.S.B

För att bedömma extrempunktens karaktär hos x_1 behöver man dock göra en teckenstudie eftersom extrempunkten kan vara en terasspunkt

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/2	
Matematiska resone-mang	X	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/5**	

Kommentar: Eleven visar en av MVG-kvaliteterna genom att bestämma derivatans samtliga nollställen även om eleven inte kommenterat faktorn e^{-x} och drar korrekta slutsatser av resultatet. Eleven visar en annan MVG-kvalitet genom att redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11.kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt(Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande			
Matematiska resonemang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	10	15	17	18	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	10	15	17	18	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	9	10	15	17	18	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Insamling av provresultat för matematik kurs D

Vårterminen 2009 deltar alla skolor i resultatinsamlingen genom att skicka in resultat för ett litet urval elever. Denna insamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om vårens prov **i slutet av augusti**. Rapporten kommer att finnas tillgänglig på http://www.umu.se/edmeas/np. Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

När du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 6:e, 14:e, 25:e och 26:e i varje månad.** Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 6:e i varje månad**.

1. Gå in på http://www.umu.se/edmeas/np och klicka på rubriken **Resultatinsamling vt 2009** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **ria10mo** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 6:e, 14:e, 25:e och 26:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 6:e i varje månad** till:

Umeå universitet
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Nationella prov
Att. Monika Kriström
901 87 Umeå

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av augusti måste vi ha alla resultat **senast 17 juni 2009.**

Förutom ovan nämnda resultatinsamling ska vissa skolor, de som ingår i Skolverkets urval, även lämna **uppgift om endast kurs**- och **provbetyg för alla elever** för varje undervisningsgrupp**.** Denna insamling sker via SCB:s hemsida. Separat information och anvisningar rörande denna insamling skickas direkt till de skolor som ingår i urvalet.