NATIONELLT KURSPROV I
MATEMATIK KURS D
VÅREN 2010

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. **Vi rekommenderar att du använder högst 120 minuter för arbetet med Del I.**
Hjälpmedel	**Del I**: ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II**: Miniräknare, även symbolhanterande räknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 18 uppgifter. **Del I** består av 10 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras)* behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 10 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 44 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna. Undre gräns för provbetyget Godkänt: 13 poäng. Väl godkänt: 26 poäng varav minst 7 vg-poäng. Mycket väl godkänt: 26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de ¤-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Beräkna $\int_1^2 4x^3 \, dx$ (2/0)

2. Bestäm $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ då $f(x) = x - 3\cos x$ (2/0)

3. Bestäm den primitiva funktion F till $f(x) = 4e^x - x$ som uppfyller villkoret $F(0) = 1$ (2/0)

4. Derivera

a) $f(x) = e^{2x} - \sin x$ *Endast svar fordras* (1/0)

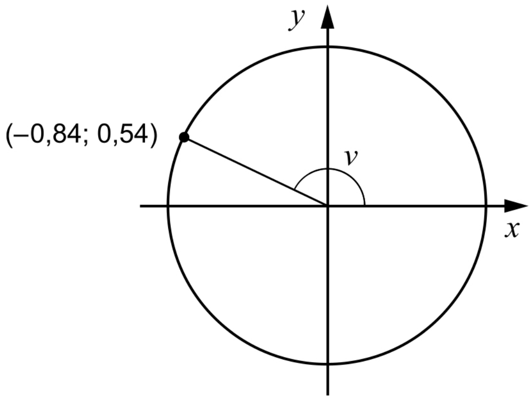
b) $g(x) = x \cdot e^x$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $h(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ *Endast svar fordras* (0/1)

5. Figuren visar en enhetscirkel

a) Bestäm $\sin v$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) Bestäm $\sin(v + 540°)$ *Endast svar fordras* (0/1)



6. Det gäller att $\cos 36° \approx 0{,}809$
Använd detta för att bestämma alla lösningar till ekvationen $\cos 3x = 0{,}809$ (2/1)

7. Förenkla $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$ så långt som möjligt. (1/1)

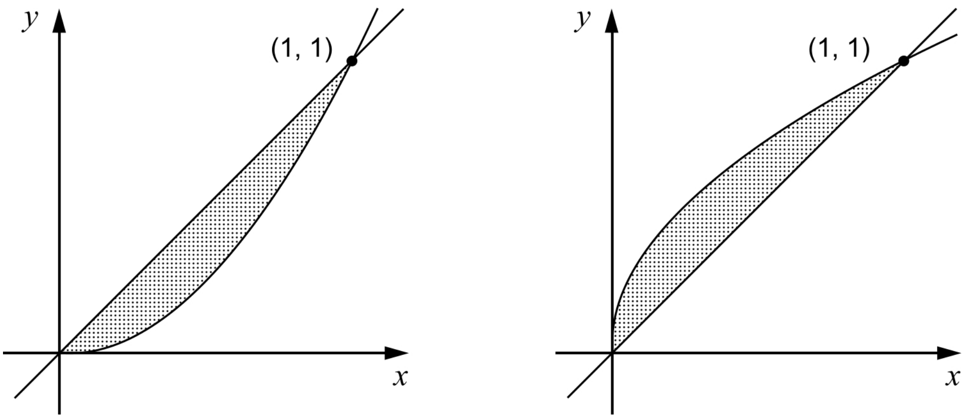
8. Ett område i första kvadranten begränsas av kurvan $y = \frac{1}{x}$, x-axeln samt linjerna $x = a$ och $x = 3a$. Visa att områdets area är oberoende av a. (0/2/¤)

9. Funktionen f är definierad genom $f(x) = x^2 + \sin x$
Visa att om f har någon extrempunkt så är det en minimipunkt. (0/2/¤)

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

10. I den här uppgiften ska du jämföra arean av området mellan $y = x$ och $y = x^k$ med arean av området mellan $y = x$ och $y = x^{\frac{1}{k}}$ där $k > 1$



Graferna till $y = x$ och $y = x^k$ Graferna till $y = x$ och $y = x^{\frac{1}{k}}$

I första punkten har vi valt $k = 2$

- Beräkna arean av området mellan $y = x$ och $y = x^2$ samt arean av området mellan $y = x$ och $y = x^{\frac{1}{2}}$ och jämför areorna.

- Jämför arean av området mellan $y = x$ och $y = x^k$ med arean av området mellan $y = x$ och $y = x^{\frac{1}{k}}$ för något/några andra värden på *k*.

- Formulera en slutsats utifrån dina jämförelser.

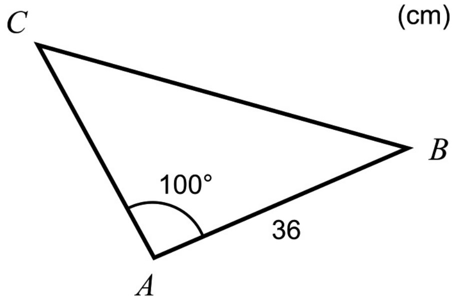
- Visa att din slutsats gäller oberoende av vilket värde på *k* du väljer.

(3/4/¤)

Del II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

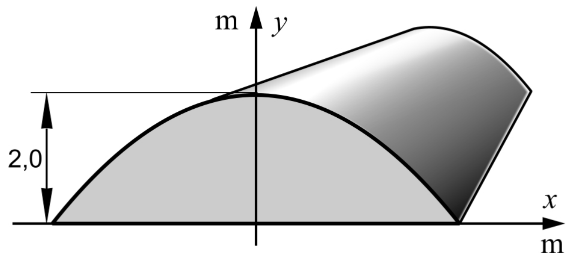
11.



Triangeln ABC har arean 520 cm^2. Hur lång är sidan AC? (2/0)

12. Intill en motorväg skall man anlägga en 2,0 m hög jordvall som bullerskydd. Jordvallens form kan beskrivas med en andragradskurva $y = 2{,}0 - 0{,}125x^2$

Beräkna hur många m^3 jord som kommer att behövas per kilometer jordvall.



(3/0)

13. Pilgrimsfalkens överlevnad var allvarligt hotad från 1950-talet fram till 1990-talet. I mitten av 1970-talet startade Naturskyddsföreningen ”Projekt Pilgrimsfalk” med syfte att rädda arten.

© Foto: Mats Hamrén

När projektet pågått en längre tid kunde situationen matematiskt beskrivas med differentialekvationen:

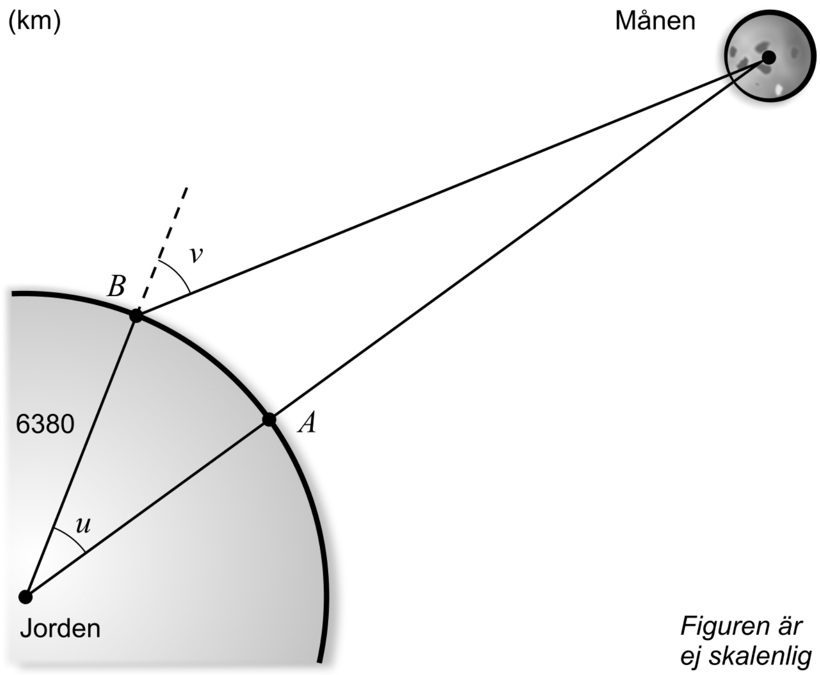
$\frac{dy}{dt} = 0{,}15 \cdot y$, där y är antalet pilgrimsfalkar vid tiden t år räknat från år 2001.

Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen i detta sammanhang. (1/1)

14. Greken Ptolemaios levde i Alexandria ca 150 e Kr. Han använde följande metod för att beräkna avståndet mellan jorden och månen.

Samtidigt som månen stod i zenit (rakt ovanför) i *A* mättes vinkeln *v* till månen från en annan plats *B* på långt avstånd från *A*. För att få samtidiga mätningar utfördes dessa under en månförmörkelse.

När vinkeln *v*, avståndet mellan *A* och *B* samt jordens radie var kända kunde avståndet mellan jordens och månens medelpunkter beräknas.



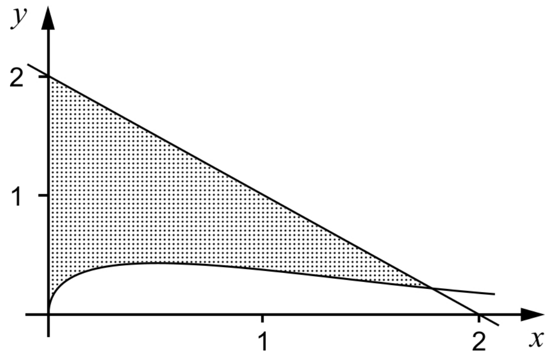
I tabellen redovisas uppmätta värden:

Vinkeln v	4,60°
Avståndet mellan *A* och *B* (längs jordytan)	500 km
Jordradien	6380 km

Med hjälp av dessa värden kan vinkeln *u* beräknas, $u = 4{,}49°$

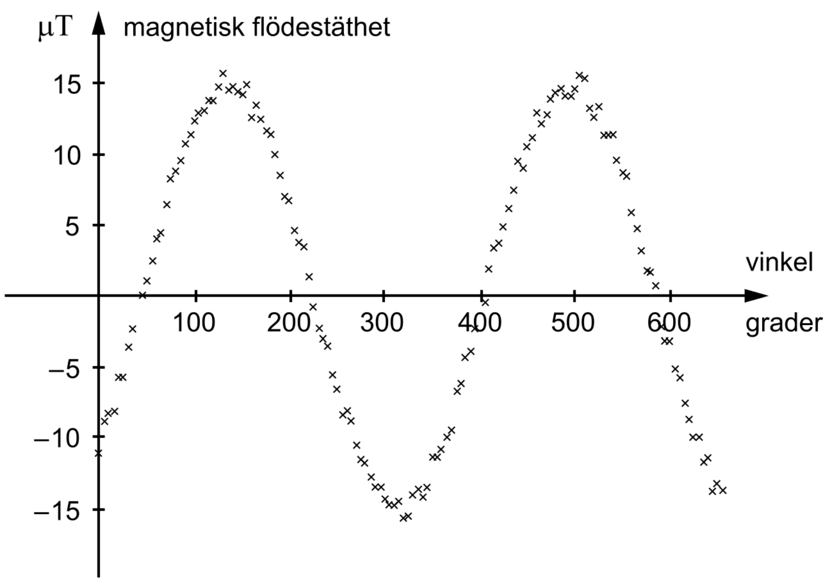
Beräkna avståndet mellan jordens och månens medelpunkter utifrån de i tabellen givna värdena och det beräknade värdet *u*. (2/0)

15. Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av kurvan $y = e^{-x}\sqrt{x}$, linjen $y = 2 - x$ och y-axeln.
Svara med minst tre värdesiffror. (0/2)



16. Nedanstående graf visar resultatet av en mätning av jordens magnetiska flödestäthet utförd i Uppsala. Flödestätheten är ett mått på magnetfältets styrka och anges i enheten Tesla (T).

Mätningen gick till så att man först mätte flödestätheten i en viss riktning utefter markytan och sedan vred man mätutrustningen $5°$ medurs och gjorde en ny mätning. Detta upprepades tills man gjort mätningar runt om under nästan två hela varv.

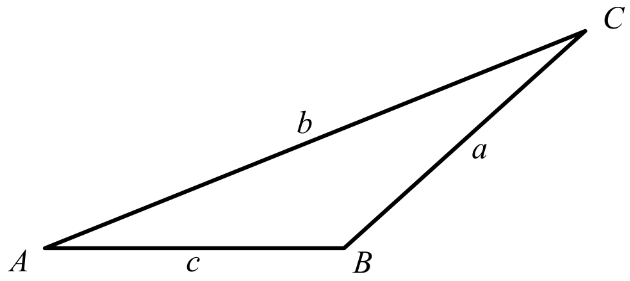


Den lodräta axeln visar den magnetiska flödestätheten i μT (mikrotesla) och den vågräta axeln visar mätapparaturens vridning i förhållande till utgångsläget.

Det maximala värdet på den magnetiska flödestätheten, $15\ \mu T$, uppmättes mot norr.

Bestäm en sinusfunktion som beskriver grafen ovan. (0/2)

17. I triangeln ABC är vinkeln B trubbig.

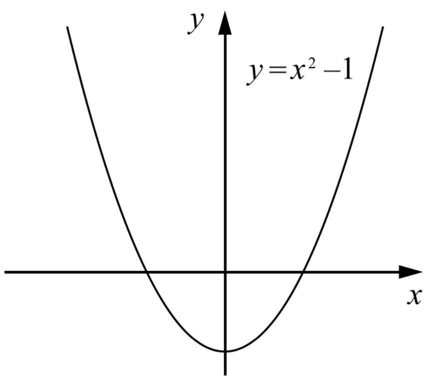


Visa, utan att använda sinussatsen, att $b \sin A = a \sin B$ (0/2/¤)

18. Undersök integralen $\int_a^b (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$ då $a < b$

a) Bestäm a och b så att integralens värde blir så litet som möjligt. (0/1)

b) Bestäm vilka värden integralen kan anta. (0/1/¤)



Innehåll

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 6, 8, 12, 14 och 15 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 7, 8, 9, 10, 13, 16, 17 och 18. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 och 18.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2010 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte).

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Uppgift nr	g poäng	vg poäng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänt				Väl godkänt						Mycket väl godkänt				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	2	0													x	x		x		x												
2	2	0					x				x							x		x												
3	2	0													x			x		x												
4a	1	0									x							x														
4b	1	0									x							x														
4c	0	1									x											x										
5a	1	0					x											x														
5b	0	1					x															x										
6	2	1					x		x									x	x	x		x			x							
7	1	1					x											x		x		x		x	x	x						
8	0	2	¤												x	x						x	x	x	x					x		
9	0	2	¤						x		x	x										x	x	x	x				x			
10	3	4	¤		x										x	x		x	x	x		x	x	x	x	x		x		x		
11	2	0								x								x		x												
12	3	0			x										x	x		x		x												
13	1	1												x				x	x	x		x	x	x								
14	2	0								x								x	x	x												
15	0	2											x		x		x					x	x	x	x							
16	0	2						x														x		x	x							
17	0	2	¤						x	x												x	x		x	x		x		x		
18a	0	1														x						x	x	x	x							
18b	0	1	¤													x						x	x	x	x			x	x			
Σ	23	21		1/1			10/6				12/14																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt:	13 poäng.
Väl godkänt:	26 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänt:	26 poäng varav minst 13 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter av de fyra MVG-kvaliteter som är möjliga att visa i detta prov.

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

	Uppgift				
MVG-kvalitet	8	9	10	17	18b
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○		
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		○			○
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	○		○	○	
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk			○		○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Bedömningsanvisningar (MaD vt 2010)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng

Del I

1.		**Max 2/0**
	Korrekt primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar (15)	+1 g
2.		**Max 2/0**
	Korrekt derivering, $f'(x) = 1 + 3\sin x$	+1 g
	med korrekt svar (4)	+1 g
3.		**Max 2/0**
	Korrekt allmän primitiv funktion, $F(x) = 4e^x - \frac{x^2}{2} + C$	+1 g
	med korrekt konstantbestämning $\left(F(x) = 4e^x - \frac{x^2}{2} - 3 \right)$	+1 g
4.		**Max 2/1**
	a) Korrekt svar ($f'(x) = 2e^{2x} - \cos x$)	+1 g
	b) Korrekt svar ($g'(x) = e^x + xe^x$)	+1 g
	c) Korrekt svar $\left(h'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2} \right)$	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
5.		**Max 1/1**
a)	Korrekt svar (0,54)	+1 g
b)	Korrekt svar ($-0{,}54$)	+1 vg
6.		**Max 2/1**
	Godtagbar bestämning av en lösning	+1 g
	med godtagbar bestämning av ytterligare en lösning	+1 g
	med godtagbar bestämning av fullständig lösning ($x \approx \pm 12° + n \cdot 120°$)	+1 vg
7.		**Max 1/1**
	Godtagbar ansats till förenkling, t ex utvecklar kvadraten och använder trigonometriska ettan eller formel för dubbla vinkeln	+1 g
	med korrekt slutförd förenkling (1)	+1 vg
8.		**Max 0/2/¤**
	Korrekt tecknat integraluttryck för arean, $\int_a^{3a} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	+1 vg
	med beräkning av integralen, $\ln 3a - \ln a$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	bevisa att områdets area är oberoende av a genom att förenkla integralens värde till $\ln 3$ och konstatera att värdet är oberoende av a.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
9.		**Max 0/2/¤**
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer $f''(x)$	+1 vg
	med godtagbar fortsättning, t ex utreder andraderivatans minsta värde	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att en extrempunkt måste vara en minimipunkt, t ex genom att motivera att $f''(x) > 0$ för alla x.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$f'(x) = 2x + \cos x$

$f'(x) = 0 \iff 2x + \cos x = 0$

$-\cos x = 2x$

Likheten ovan kan endast gälla för
x någonstans i intervallet $-0,5 \le x \le 0,5$
eftersom 2x aldrig får bli större än −1
eller 1. Dessa värden varierar −cos x inom.

	$-0,5$		$0,5$	x
f'	$-$		$+$	
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$f'(-0,5) < 0$

$f'(0,5) > 0$

Svar: Som man kan se har funktionen f en
minimipunkt i intervallet ovan.
Utanför intervallet kan likheten ovan
inte gälla och där finns därför
inga extrempunkter.

Kommentar: Eleven gör en godtagbar ansats genom att beräkna förstaderivatan och med hjälp av den göra ett teckenstudium. Eleven fortsätter med att undersöka derivatan genom att analysera begränsningarna för $\cos x$ -termen i relation till $2x$. Eleven påstår att om funktionen endast har en extrempunkt så måste den vara en minimipunkt. Men eleven har inte styrkt sitt påstående med beräkningar och har dessutom i sin lösning inte diskuterat om det kan finnas fler extrempunkter. Därför erhåller eleven inte MVG-kvaliteten.

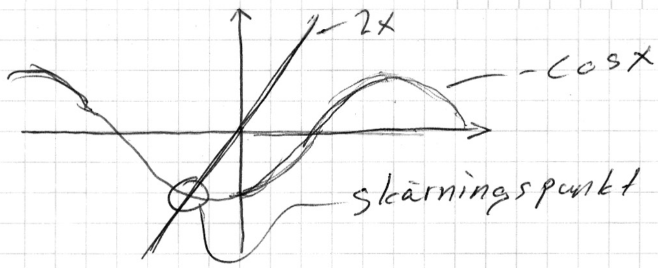
Elevlösning 2 (2 vg och en MVG-kvalitet)

$f(x) = x^2 + \sin x$

$f'(x) = 2x + \cos x$

Extrempunkter: $f'(x) = 0$

$2x = -\cos x$



Graferna skär varandra bara en gång.

Det betyder att det finns endast en extrempunkt.

Det är en minpunkt för att:

$f(-\pi) = \pi^2$

$f(0) = 0$

$f(\pi) = \pi^2$

V.S.V.

Kommentar: Eleven gör en godtagbar ansats genom att beräkna förstaderivatan och sedan med godtagbar metod bestämma att derivatan endast har en nollpunkt . Den grafiska metoden kan anses vara en tillräckligt god fortsättning eftersom båda funktionerna är godtagbart skissade och välkända. Eleven visar MVG-kvalitet genom att med hjälp sina slutsatser och en värdetabell visa att den enda extrempunkten är en minimipunkt.

Elevlösning 3 (2 vg och en MVG-kvalitet)

$f(x) = x^2 + \sin x$

$f'(x) = 2x + \cos x$

$f''(x) = 2 \div \sin x$

värdet för $2 - \sin x$ är alltid större en noll (det minsta värdet ges då $\sin x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 - 1 = 1$). Ifall andraderivatan är positiv, är den enda möjligheten att derivatan först är negativ och sedan blir positiv, dvs $f(x)$ bildar en minimipunkt.

Kommentar: Eleven visar en av MVG-kvaliteterna genom att med hjälp av andraderivatans minsta värde ge en heltäckande motivering till att om funktionen har någon extrempunkt så är det en minimipunkt. Analysen av andraderivatan är dock inte fullständig eftersom en funktion vars andraderivata är positiv kan sakna extrempunkt.

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

10. **Max 3/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven beräknar någon/båda av areorna i specialfallet då $k=2$ $\left(A=\frac{1}{6}\text{a.e.}\right)$ **1-2 g**	Eleven visar säkerhet i sin lösning av problemet genom att beräkna areorna för minst två specialfall. **2 g och 1 vg**	Eleven inleder en generell undersökning genom att ställa upp integraluttryck för de båda areorna samt bestämma de primitiva funktionerna korrekt. **2 g och 2 vg**	**2/2**
Matematiskt resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven kommenterar att areorna är lika stora utifrån korrekt areaberäkning i något specialfall. **1 g**	Eleven drar slutsatsen att areorna är lika stora, baserat på minst två specialfall eller en generell undersökning. **1 g och 1 vg**		**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är lätt att följa och förstå och det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	**0/1**
Summa				**3/4**

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	beräkna arean för båda områdena i det generella fallet, (t ex $\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}$ och $\frac{k}{1+k}-\frac{1}{2}$)
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	korrekt bevisa att areorna är lika stora för varje värde på k.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	utföra beviset med ett välstrukturerat och i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (3 g och 4 vg)

o $y = x$ och $y = x^2$ beräkna arean mellan dem,

$y = x$ är den övre funktionen
$y = x^2$ är således den undre

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \boxed{= \frac{1}{6} \text{ a.e}}$$

$y = x$ och $y = x^{\frac{1}{2}}$ beräkna arean

$y = x$ är den undre grafen
$y = x^{\frac{1}{2}}$ är den övre grafen

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x)\,dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 1^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{2 \cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{0^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} \boxed{= \frac{1}{6} \text{ a.e}}$$

c $y = x$ och $y = x^3$ | $y = x$ och $y = x^3$

övre funktion $y = x$ | $y = x^{(1/3)}$

undre funktion $y = x^3$ | $y = x$

Area $A = \int_0^1 (x - x^3)\,dx =$ | $A = \int_0^1 (x^{1/3} - x)\,dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \qquad = \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{4}\right) = \qquad = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0}{4} - \frac{0}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ a.e} \qquad = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \text{ a.e}$$

De är lika stora

Arean som bildas mellan graferna $y = x^k$ och $y = x$ är alltid lika stor som den area som bildas mellan $y = x$ och $y = x^{\frac{1}{k}}$

$y = x^k$ och $y = x$ $\quad$ $y = x^{\frac{1}{k}}$ och $y = x$

$x^k = x$ $\quad$ $x^{\frac{1}{k}} = x$ $\quad$ Skärningspunkter

Areorna genom integralberäkning

$$A = \int_0^1 (x - x^k)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^{k+1}}{k+1} - \frac{0^2}{2} + \frac{0^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}$$

$$A = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{k}} - x\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{1+k}{k}}}{\frac{1+k}{k}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{kx^{\frac{1+k}{k}}}{1+k} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k^{\frac{1+k}{k}}}{1+k} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} = \frac{k^{\frac{1+k}{k}}}{1+k} - \frac{1}{2}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	2/2	Elevens beräkningar av skärningspunkterna är inte ett krav.
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**3/4**	

Kommentar: Eleven beräknar arean av ett av områdena i det generella fallet korrekt men ej det andra, vilket innebär att eleven inte visar MVG-kvalitet för generella metoder.

Elevlösning 2 (3 g och 3 vg och en MVG-kvalitet)

$k=2$

- $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$ $\qquad$ $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$\frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{1{,}5}}{1{,}5}\right]_0^1$ $\qquad$ $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\frac{1}{1{,}5} - 0 = \boxed{\frac{1}{1{,}5}}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$k=4$

- $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \boxed{\frac{1}{5}}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$

$\int_0^1 x^{\frac{1}{4}}\,dx = \left[\frac{x^{1{,}25}}{1{,}25}\right]_0^1 = \frac{4}{5} - 0 = \boxed{\frac{4}{5}}$

$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$

$k=5$ $\quad \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\int_0^1 x^5 = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \boxed{\frac{1}{6}}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$\int_0^1 x^{\frac{1}{5}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{5}{6}}$ $\quad \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

- Areorna blir lika stora hela tiden.
- Area 1 $\quad \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \qquad \int_0^1 x^k = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$

$\boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{x^{(k+1)}}{(k+1)}}$

Area 2 $\quad \int_0^1 x^{\frac{1}{k}}\,dx = \left[\frac{x^{(1+\frac{1}{k})}}{(1+\frac{1}{k})}\right]_0^1 \qquad \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\boxed{\frac{x^{(1+\frac{1}{k})}}{(1+\frac{1}{k})} - \frac{x^2}{2}}$

Area 1 $\frac{x^2}{2} - \frac{x^{(k+1)}}{(k+1)}$

Area 2 $\frac{x^{(1+\frac{1}{k})}}{(1+\frac{1}{k})} - \frac{x^2}{2}$

Eftersom att intervallet hela tiden är 0 till 1 så försvinner det svar man får med nån alltid:

Area 1 $\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)}$

Area 2 $\frac{1}{1+\frac{1}{k}} - \frac{1}{2}$

De här uttrycken får man alltid, sedan får man stoppa in värdet på k. För att sedan kunna räkna ut det måste man sätta samma nämnare.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	2/2	
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	Lösningen är inte lätt att följa och förstå.
Summa		**3/3**	

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att beräkna arean för båda områdena i det generella fallet. Arean för området kallat ”Area 2” är ej förenklat så långt som möjligt men bedöms ändå vara tillräckligt för att anses visa MVG-kvalitet.

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg och tre MVG-kvaliteter)

• $A_1 = \int_0^1 (x - x^2) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ a.e.

$A_2 = \int_0^1 (x^{1/2} - x) = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

• $k = 3$

$y = x$ och $y = x^3$ begränsar arean

$A = \int_0^1 (x - x^3) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$y = x$ och $y = x^{1/3}$

$A_2 = \int_0^1 (x^{1/3} - x) = \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 0 =$

$= \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

• Slutsatsen är att arean alltid blir lika stor mellan $y = x$ och x^k, och $y = x$ och $y = x^{1/k}$

• $y = x$ och $y = x^k$ begränsar området

$A_1 = \int_0^1 (x - x^k) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1^{k+1}}{k+1} - 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-2}{2(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$ (mgn = $2(k+1)$)

$y = x$ och $y = x^{1/k}$ begränsar:

$A_2 = \int_0^1 (x^{1/k} - x) = \left[\frac{x^{(1+k)/k}}{(1+k)/k} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{k\,x^{(1+k)/k}}{1+k} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k \cdot 1^{(1+k)/k}}{1+k} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{k}{1+k} - \frac{1}{2} =$ (mgn = $2(k+1)$)

$= \frac{2k - 1(k+1)}{2(k+1)} = \frac{2k - k + 1}{2(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$

$A_1 = A_2$, alltså, oberoende på k-värde kommer A_1 och A_2 vara lika stora; $\frac{k-1}{2(k+1)}$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	2/2	
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**3/4**	

Kommentar: Eleven visar MVG-kvaliteter genom att behandla det generella fallet och visa att areorna blir lika stora oberoende av vilket *k* man väljer. Dessutom visar eleven MVG-kvalitet genom att redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är korrekt.

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**

Del II

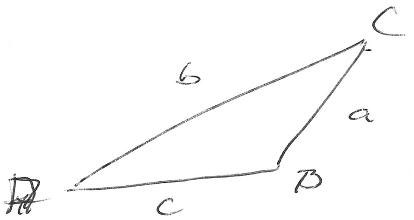
11.		**Max 2/0**
	Godtagbar ansats, t ex tecknar en ekvation för bestämning av x	+1g
	med i övrigt godtagbar lösning (29 cm)	+1g
12.		**Max 3/0**
	Korrekt tecknad integral, t ex $\int_{-4}^{4}(2{,}0-0{,}125x^2)\mathrm{d}x$	+ 1g
	med godtagbart beräknad area av snittytan	+1g
	med i övrigt godtagbar lösning (11000 m^3)	+1g
13.		**Max 1/1**
	Godtagbar ansats, t ex anger att antalet pilgrimsfalkar ökar	+1 g
	med i övrigt godtagbar förklaring (”Antalet pilgrimsfalkar ökar med hastigheten 15 % av det aktuella antalet per år”)	+1 vg
14.		**Max 2/0**
	Korrekt tecknad ekvation, t ex med hjälp av sinussatsen	+1 g
	med godtagbart svar (270 000 km)	+1 g
15.		**Max 0/2**
	Bestämmer x-koordinaten för kurvornas skärningspunkt och tecknar korrekt integraluttryck för arean, $\int_{0}^{1{,}774}(2-x-\sqrt{x}e^{-x})\mathrm{d}x$	+1 vg
	med godtagbar bestämning av arean (1,37 a.e.)	+1 vg
16.		**Max 0/2**
	Godtagbar bestämning av en funktion, t ex på formen $y = A\sin(kv-\delta)$ och bestämmer minst två av värdena A, k och δ	+1 vg
	Godtagbart svar, t ex på formen $y = 15\sin(kv-\delta)$, där δ är $40° \le \delta \le 50°$ och $k \approx 1$, med godtagbar motivering	+1 vg

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
17.		**Max 0/2/¤**
	Godtagbar ansats, t ex använder areasatsen på två vinklar	+1 vg
	med godtagbart slutfört bevis där vissa motiveringar kan vara bristfälliga eller saknas	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra beviset korrekt
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)



$$b \cdot \cancel{c} \cdot \sin A = \cancel{c} \cdot a \cdot \sin B$$

$$b \sin A = a \sin B$$

Kommentar: Eleven gör en godtagbar ansats genom att ställa upp ett korrekt samband vilket antas ha utgått från areasatsen och använd den på två vinklar. Beviset anses slutfört, men bristfälligt då eleven inte hänvisar till använda satser och hur den första likheten kommit till.

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
18.		**Max 0/2/¤**
	a) Korrekt svar med godtagbar lösning ($a = -1, b = 1$)	+1 vg
	b) Godtagbar beräkning av det minsta värdet $\left(-\frac{4}{3}\right)$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med ett godtagbart resonemang dra slutsatsen att integralen kan anta alla värden $\geq -\frac{4}{3}$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1a (0 vg)

a) grafen skär x-axeln vid:

$0 = x^2 - 1$

$1 = x^2$

$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

svar: $a = -1 \quad b = 1$

Kommentar: Eleven har i sin lösning inte motiverat varför skärningspunkterna beräknats. Lösningen kan därför inte anses vara godtagbar.

Elevlösning 1b (1 vg)

b) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1) - (-1)\right) =$

$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$

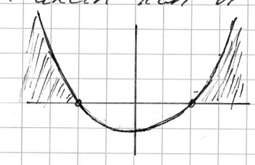
Det minsta värde integralen kan anta är $-\frac{4}{3}$
Däremot finns det inget största värde eftersom det inte finns någon punkt i en andragradsfunktion där derivatan är så stor att det inte längre sker någon förändring i x-led. Man kan alltså göra a oändligt litet och b oändligt stort

svar: $-\frac{4}{3} \leq \int_a^b (x^2-1)\,dx$

Kommentar: Eleven nämner i sin lösning att integralen saknar ett största värde, men säger inget om att integralen kan anta oändligt stora värden. Lösningen är därför ofullständig och eleven kan inte anses nå MVG-kvalitet i sin lösning.

Elevlösning 2a (1 vg)

a) Eftersom integralvärdet blir positivt då a och b översTiger respektive understiger kurvans skärningspunkter med x-axeln kan vi utesluta alla dessa värden.



positiva värden

När a och b väljs inom skärningspunkterna får vi ett negativt värde på integralen.
Det minsta värdet, dvs det mest negativa får vi då a och b är skärningspunkterna mellan kurvan och x-axeln. Dvs: $f(x)=0$

$x^2-1=0$

$x=\pm 1$

$\therefore$ $\underline{a=-1}$ och $\underline{b=1}$

Elevlösning 2b (1 vg och en MVG-kvalitet)

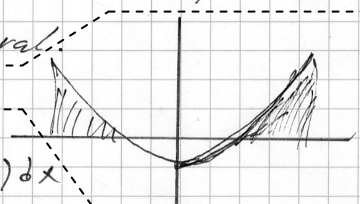
b) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}=\underline{-\frac{4}{3}}$ Detta är som sagt det minsta värdet integralen kan anta.

Eleven inser att integralen kan anta samtliga vär-den

Eftersom kurvan $f(x)=x^2-1$ aldrig kommer bli lodrät nedåt eller uppåt kommer integralens värde ständigt öka då a minskar och b ökar. Om vi sätter a som oändligt litet och b som oändligt stort kommer vi således få en oändligt stor integral.

Slutsatsen gäller bara integralens minsta värde och måste ses i kombination med resonemanget för MVG

Eleven visar i sitt resonemang att integralen kan anta oändligt stora vär-den



$\therefore -\frac{4}{3}\leq\int_a^b(x^2-1)\,dx$

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att bestämma integralens minsta möjliga värde och i sitt resonemang på ett godtagbart sätt beskriva hur integralens värde ständigt ökar (kontinuerligt) samt att integralen kan anta oändligt stora värden. Eleven uppvisar språkliga brister i övergången mellan resonemang och slutsats. Eleven använder dessutom i stor utsträckning ett vardagligt språk i sitt resonemang och kan därför inte anses uppnå MVG-kvalitet vad gäller redovisning och språk.

Elevlösning 3a (1 vg)

a) Integralens minsta värde finner vi mellan intervallet då funktionen skär x-axeln. I detta intervall är integralen negativ.

$f(x) = x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Detta ger att $a = -1$ och $b = 1$

Kommentar: Eleven ger en knapphändig men godtagbar motivering till integralens minsta värde.

Elevlösning 3b (1 vg och två MVG-kvaliteter)

b) Det minsta värdet på integralen ges av det a och b värde som bestämdes i a).

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Det största värde integralen kan anta går emot oändligheten. Jag integrerar funktionen med intervallet a och b.

$$\int_{a}^{b}(x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{a}^{b} = \frac{b^3}{3} - b - \left(\frac{a^3}{3} - a\right) =$$

$$= \frac{b^3}{3} - b - \frac{a^3}{3} + a$$

Desto större b-värde som väljs, desto större kommer värdet på integralen bli. Desto mindre a-värde som, dvs. ett negativt värde, kommer även integralens värde bli större. Detta ger att $\int_{a}^{b}(x^2-1)dx \to \infty$

SVAR: $\frac{4}{3} \le \int_{a}^{b}(x^2-1)dx$ samt $\int_{a}^{b}(x^2-1)dx \to \infty$

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att beräkna den allmänna integralen och utifrån resultatet behandla det gränsvärdesproblem som uppstår på ett knapphändigt men godtagbart sätt. Eleven visar också MVG-kvalitet genom att redovisa välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt (Ö)
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resone-mang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resone-mang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resone-mang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resone-mang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande			
Matematiska resone-mang			
Redovisning och matematiskt språk			
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	8	9	10	17	18b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	8	9	10	17	18b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (¤-märkt)					Övriga uppgifter
MVG-kvalitet	8	9	10	17	18b	
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Insamling av provresultat för matematik kurs D

Vårterminen 2010 deltar alla skolor i resultatinsamlingen genom att skicka in resultat för ett litet urval elever. Denna insamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om vårens prov **i slutet av augusti** Rapporten kommer att finnas tillgänglig på http://www.umu.se/edmeas/np. Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

När du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 5:e, 11:e, 24:e och 28:e i varje månad.** Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 28:e i varje månad**.

1. Gå in på http://www.umu.se/edmeas/np och klicka på rubriken **Resultatinsamling vt 2010** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **mar12sh** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 5:e, 11:e, 24:e och 28:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 28:e i varje månad** till:

Umeå universitet
Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap
Nationella prov
Att. Monika Kriström
901 87 Umeå

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av augusti måste vi ha alla resultat **senast 16 juni 2010.**

Förutom ovan nämnda resultatinsamling ska vissa skolor, de som ingår i Skolverkets urval, även lämna **uppgift om endast kurs**- och **provbetyg för alla elever** för varje undervisningsgrupp**.** Denna insamling sker via SCB:s hemsida. Separat information och anvisningar rörande denna insamling skickas direkt till de skolor som ingår i urvalet.