# NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2011

## Anvisningar

| | |
|---|---|
| Provtid | 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. **Vi rekommenderar att du använder högst 135 minuter för arbetet med Del I.** |
| Hjälpmedel | **Del I**: ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.*<br><br>**Del II**: Miniräknare, även symbolhanterande räknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”. |
| Provmaterialet | Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.<br><br>Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.<br><br>*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.* |
| Provet | Provet består av totalt 18 uppgifter. **Del I** består av 11 uppgifter och **Del II** av 7 uppgifter.<br><br>Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.<br><br>Uppgift 11 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.<br><br>Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning. |
| Poäng och betygsgränser | Provet ger maximalt 45 poäng.<br><br>Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.<br><br>Undre gräns för provbetyget<br>Godkänt: 13 poäng.<br>Väl godkänt: 26 poäng varav minst 7 vg-poäng.<br>Mycket väl godkänt: 26 poäng varav minst 14 vg-poäng. Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de ¤-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa. |

# Del I

**Denna del består av 11 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare.** Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

**1.** Beräkna $\int_0^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x$ (2/0)

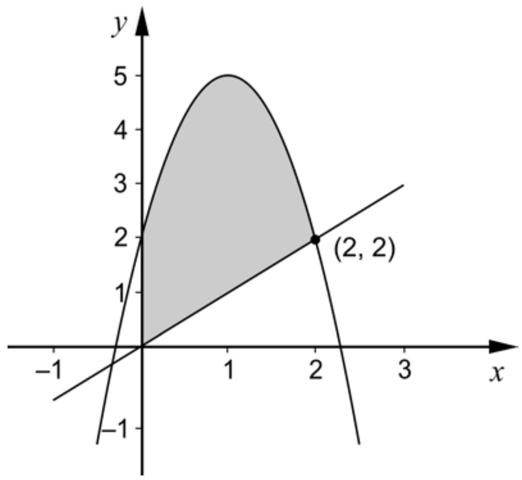
**2.** Derivera

a) $f(x)=\sin 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $g(x)=(1+2x)^{11}$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $h(x)=x^2\cdot \mathrm{e}^{3x}$ *Endast svar fordras* (0/1)

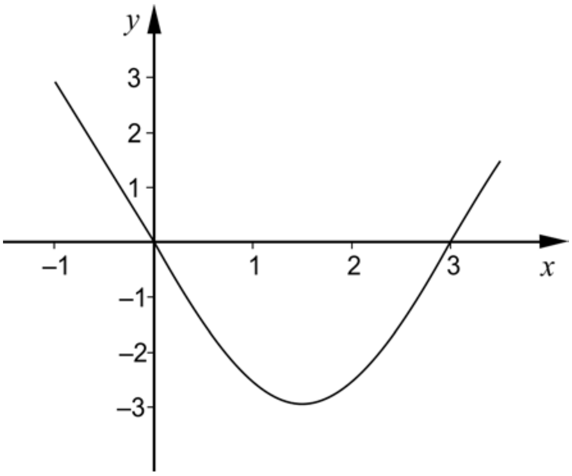
**3.** Figuren visar ett område som begränsas av $y$-axeln, kurvan $y=6x-3x^2+2$ och linjen $y=x$. Beräkna områdets area. (2/0)




**4.** Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till $f(x)=\dfrac{2}{x}+3$ som uppfyller villkoret $F(1)=5$ (2/0)

**5.** Lös ekvationen $\cos 2x = 0{,}9$ om $\cos 26° = 0{,}9$ (2/1)

**6.** Figuren visar grafen till funktionen *f*.




Ordna talen *A*, *B* och *C* i storleksordning. Börja med det *minsta*.

$A = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ $B = \int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ $C = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ *Endast svar fordras* (1/0)

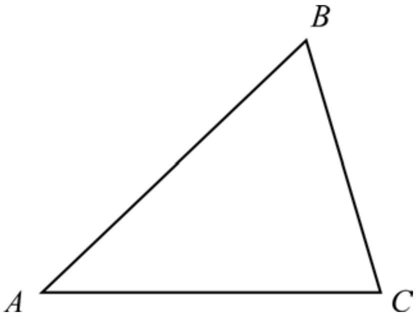
**7.** För funktionen *f* gäller att $f(2) = 3$ och $f'(x) = 0{,}5$ för alla *x*.

Beräkna $\int_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$. (0/2)

**8.** Visa att $\dfrac{\sin 2v + \sin v}{2\cos v + 1} = \sin v$

för alla *v* där uttrycken i båda led är definierade. (0/1/¤)

**9.** I den spetsvinkliga triangeln $ABC$ är $\sin A = 0{,}6$




a) Bestäm värdet av $\sin(B + C)$ (0/1)

b) Bestäm värdet av $\cos(B + C)$ (0/2/¤)

**10.** Timo och Peder har fått i uppgift att lösa följande problem utan räknare:

$F(x) = (x + 2)(x - 2)^3$ är en primitiv funktion till $f(x) = 4(x + 1)(x - 2)^2$

Beräkna $\int_{-2}^{3} (x + 1)(x - 2)^2 \mathrm{d}x$

Timo säger att han först tänker utveckla $(x + 1)(x - 2)^2$ och sedan beräkna integralen. Peder påstår att det finns ett snabbare sätt att lösa uppgiften.

a) Beskriv en metod som Peder kan ha tänkt använda. (0/1/¤)

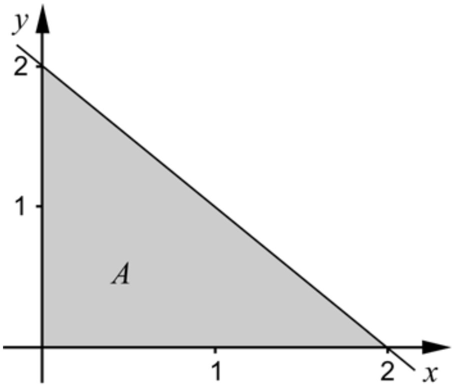
b) Lös uppgiften med valfri metod. (0/1)

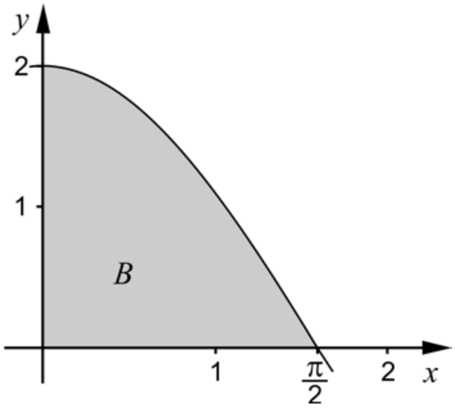
**Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:**
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

**11.** I den här uppgiften ska du jämföra storleken av areorna av två områden *A* och *B*.

Område *A* begränsas av positiva *y*-axeln, positiva *x*-axeln och linjen $y = 2 - kx$
Område *B* begränsas av positiva *y*-axeln, positiva *x*-axeln och kurvan $y = 2\cos kx$

Nedan visas areorna som bildas när $k = 1$




- Beräkna arean av de skuggade områdena *A* och *B* när $k = 1$, det vill säga då $y = 2 - x$ och $y = 2\cos x$

- Skriv av nedanstående tabell och beräkna de värden som saknas.

| *k* | Arean av *A* | Arean av *B* |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |

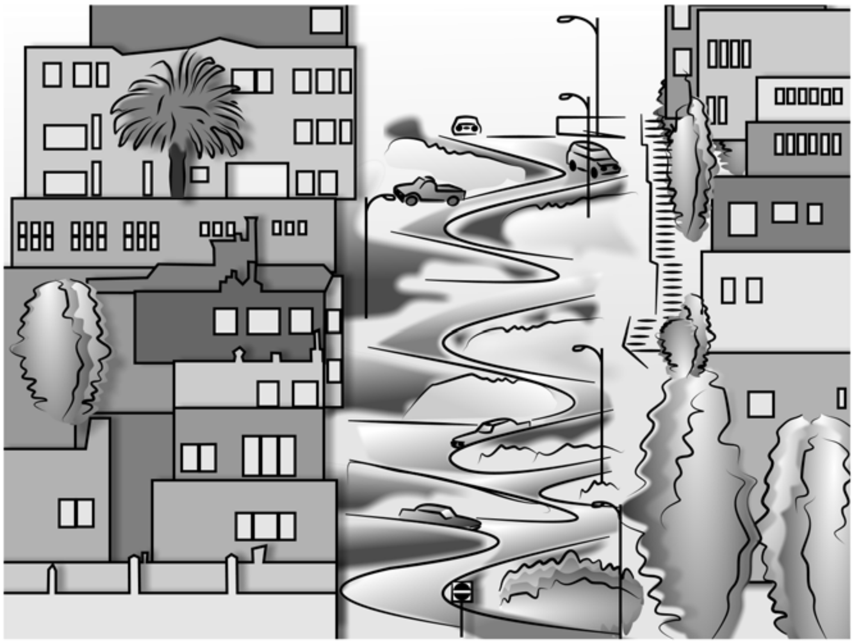
- Jämför areorna av områdena *A* och *B* för samma värde på *k*. Formulera en slutsats av din jämförelse.

- Visa att din slutsats gäller för alla $k > 0$ (2/4/¤)

# Del II

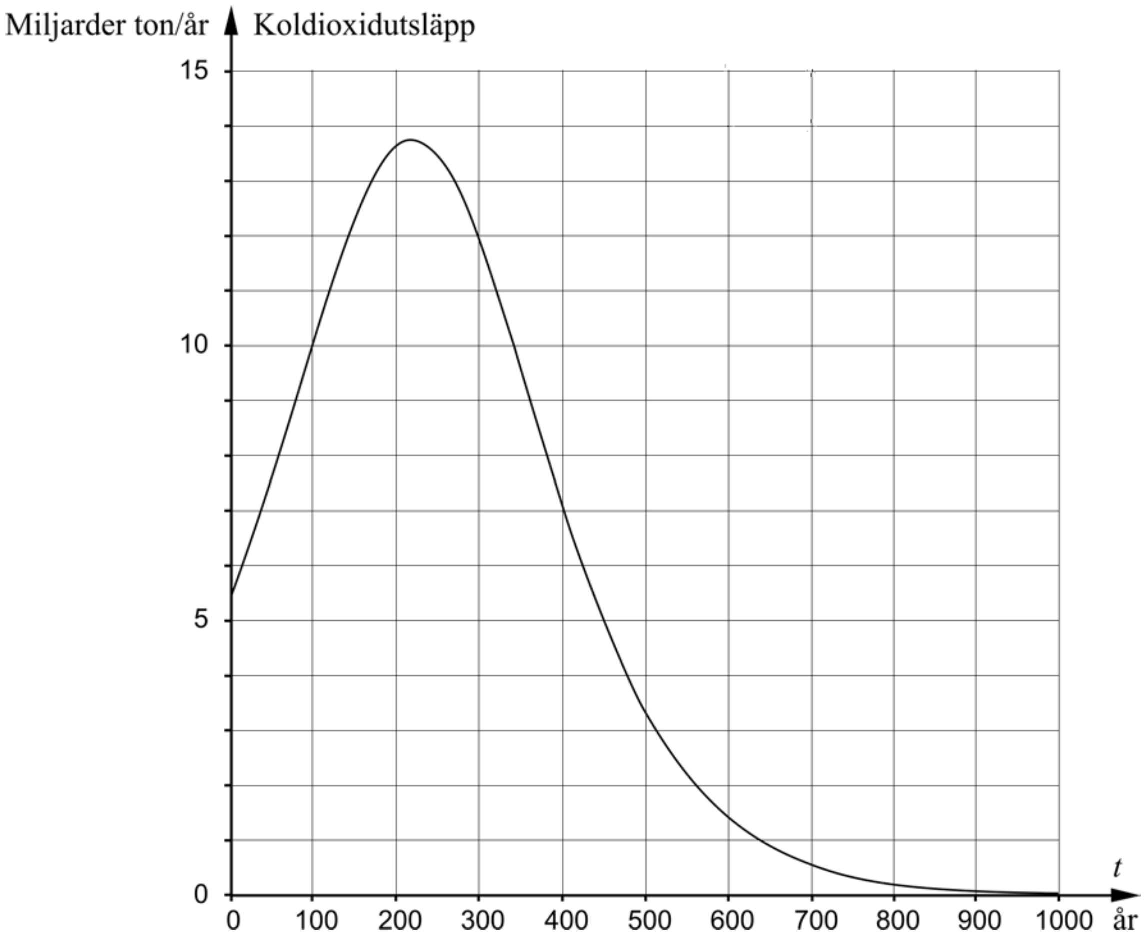
**Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.**
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

**12.** Lombard Street i San Fransisco är berömd för att den ligger på en sluttning som är så brant att vägen anlagts i sicksack.



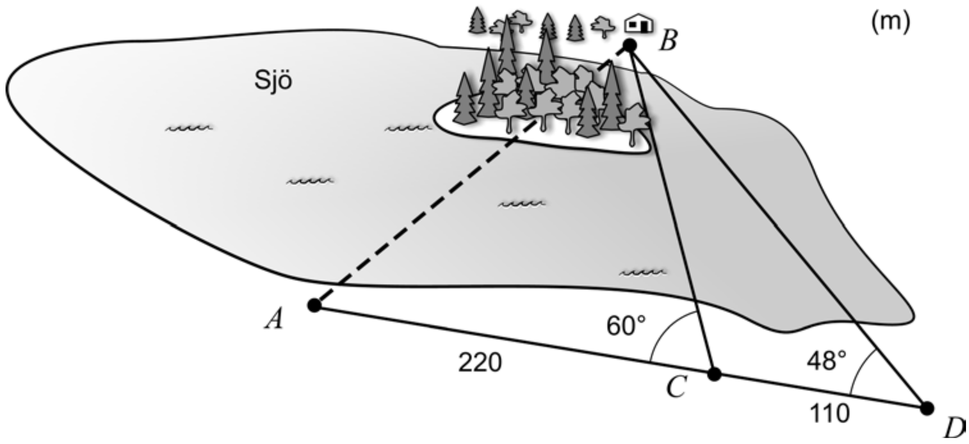
Den brantaste delen av sluttningen är 400 meter lång och på den sträckan är höjdskillnaden 182 meter.
Hur många grader lutar sluttningen mot horisontalplanet? (2/0)

**13.** En prognos för de årliga koldioxidutsläppen i världen för de kommande tusen åren beskrivs med hjälp av grafen nedan. Tiden $t = 0$ motsvarar år 2000.




Uppskatta med hjälp av grafen hur mycket koldioxid som kommer att släppas ut mellan åren 2100 och 2400. (2/0)

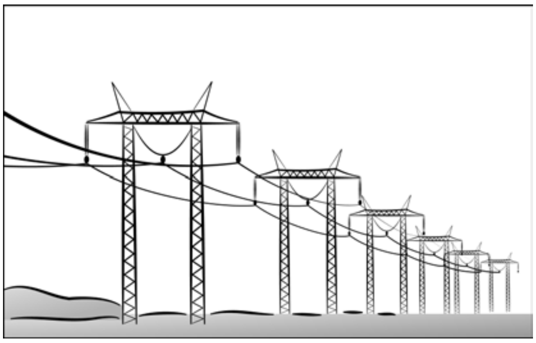
**14.** Avståndet mellan de två punkterna *A* och *B* på var sin sida om en sjö ska bestämmas, se figur.




En lantmätare som befinner sig i *A* kan inte se *B* som skyms av en trädbevuxen holme i sjön. Från de två punkterna *C* och *D*, som tillsammans med *A* ligger längs en rät linje, kan hon se *B*. Hon mäter upp vinkeln *ACB* till $60°$ och vinkeln *ADB* till $48°$ samt sträckan *AC* till 220 m och sträckan *CD* till 110 m.

Beräkna avståndet *AB*. (2/1)

**15.** Luftledningar tål större strömbelastning då det blåser.



För en viss luftledning ges den tillåtna strömbelastningen av funktionen

$S(x) = 342 \cdot (1 + 4x)^{0,25}$

där *x* är vindstyrkan i m/s och $S(x)$ är den tillåtna strömbelastningen i ampere, A.

a) Bestäm den tillåtna strömbelastningen när det är vindstilla. (1/0)

b) Vid vilken vindstyrka ökar den tillåtna strömbelastningen med en hastighet av 50 A/(m/s) ? (0/2)

**16.** Bestäm en funktion på formen $y = A\sin kx + B$ som uppfyller villkoren nedan:

- $A > 0$
- värdemängden är $-4 \leq y \leq 2$
- de lokala maximipunkterna har *x*-koordinaterna $x = \dfrac{\pi}{8} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ för alla heltal *n* (1/1)

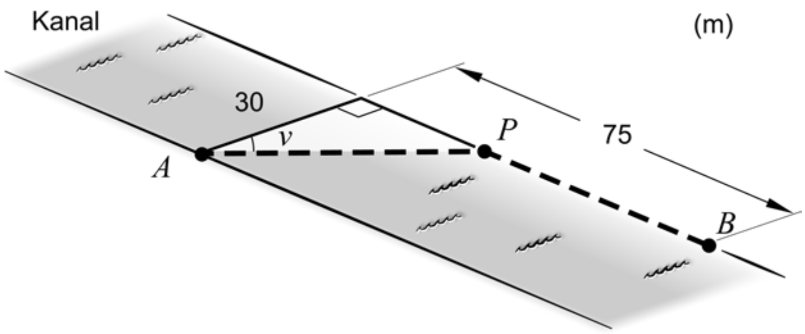
**17.**

Armand arbetar som silversmed och hans specialitet är smycken i form av olika geometriska figurer. Han har bestämt sig för att göra ett smycke i form av en triangel. Till sitt förfogande har han en $9{,}0\text{ cm}$ lång silvertråd som han kan böja och klippa.

Armand betecknar triangeln *ABC* och bestämmer sig för att vinkeln *A* ska vara $30°$, sidan *AB* 4,2 cm och sidan *BC* 3,2 cm.

Utred på vilket eller vilka sätt smycket kan utformas. (1/2/¤)

**18.** Punkterna *A* och *B* ligger på var sin sida av en $30\text{ m}$ bred kanal, se figur.




En kabel ska dras från punkt *A* till punkt *B*. Kabeln ska först gå genom vattnet till en punkt *P* och därefter på land längs kanalens kant till punkt *B*.
Kostnaden för kabeldragningen är $2500\text{ kr/m}$ i vattnet och $1500\text{ kr/m}$ på land.
Bestäm vinkeln *v* så att kostnaden för kabeldragningen blir så liten som möjligt. (0/3/¤)

## Innehåll

**Sid nr**

## Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,

2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,

3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,

4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,

5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,

6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,

7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,

8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,

9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 7, 9, 10, 11, 14, 16, 17 och 18 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17 och 18. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 12, 15, 17 och 18.

## Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2011 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte).

| | | | | **Kunskapsområde** | | | | | | | | | | | | | | **Betygskriterium** | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Uppgift nr | g poäng | vg poäng | ¤ | Övr | | | Trigonometri | | | | Diff & integral | | | | | | | Godkänt | | | | Väl godkänt | | | | | | Mycket väl godkänt | | | | |
| | | | | 1 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | x | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 2a | 1 | 0 | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 2b | 1 | 0 | | | | | | | | | x | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 2c | 0 | 1 | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | |
| 3 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | x | x | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | x | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 2 | 1 | | | | | | | x | | | | | | | | | x | x | x | | x | | | x | | | | | | | |
| 6 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 0 | 2 | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | x | x | x | | | | | | | | |
| 8 | 0 | 1 | ¤ | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | x | | | x | | | | | x | | |
| 9a | 0 | 1 | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | x | x | x | | | | | | | | |
| 9b | 0 | 2 | ¤ | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | | | | x | | | |
| 10a | 0 | 1 | ¤ | | | | | | | | x | | | | | x | | | | | | | x | | | | | | x | | | |
| 10b | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | x | x | | x | | | | | | | |
| 11 | 2 | 4 | ¤ | | | | | | x | | | | | | x | | | x | x | x | | x | x | x | x | x | | x | x | x | | |
| 12 | 2 | 0 | | | | | | | | x | | | | | | | | x | | x | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | x | x | x | x | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 2 | 1 | | | | | | | | x | | | | | | | | x | x | x | | x | x | x | x | | | | | | | |
| 15a | 1 | 0 | | | x | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| 15b | 0 | 2 | | | x | | | | | | x | | | | | | | | | | | x | x | | x | | | | | | | |
| 16 | 1 | 1 | | | | | | x | | | | | | | | | | x | x | x | | x | x | x | | | | | | | | |
| 17 | 1 | 2 | ¤ | | | | | | | x | | | | | | | | x | x | x | | x | x | x | x | | | x | x | | | |
| 18 | 0 | 3 | ¤ | | | | | | | x | x | | x | | | | | | | | | x | x | x | x | x | | x | | | | |
| Σ | 22 | 23 | | 1/1 | | | 9/11 | | | | 12/11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Kravgränser**

Detta prov kan ge maximalt 45 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

| | |
|---|---|
| Godkänt: | 13 poäng. |
| Väl godkänt: | 26 poäng varav minst 7 vg-poäng. |
| Mycket väl godkänt: | 26 poäng varav minst 14 vg-poäng.<br>Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre<br>*olika* MVG-kvaliteter av de fyra MVG-kvaliteter som är möjliga att visa i detta prov. |

De ¤-märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

| | Uppgift | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 8 | 9b | 10a | 11 | 17 | 18 |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | ○ | | ○ |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | ○ | ○ | | ○ | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | ○ | | | ○ | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | ○ | ○ | |

# Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
   Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
   För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)

4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.

4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

5. Uppgifter av långsvarstyp

5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.

5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen[1]. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.

5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.[2]

5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel[3], formella fel och enklare räknefel.

6. Aspektbedömning
   Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg

7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.

7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.

7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.

7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (¤) uppgifter.

---

[1] Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

[2] Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

| | |
|---|---|
| Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation | +1 g |
| med korrekt svar | +1 g |

[3] Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

## Bedömningsanvisningar (MaD vt 2011)

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

| Uppgg. | | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|---|
| **Del I** | | | |
| **1.** | | | **Max 2/0** |
| | | Godtagbar ansats, t ex tecknar korrekt primitiv funktion | +1 g |
| | | med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3) | +1 g |
| **2.** | | | **Max 2/1** |
| | a) | Korrekt svar ( $f'(x) = 3\cos 3x$) | +1 g |
| | b) | Korrekt svar $\left(g'(x) = 22(1+2x)^{10}\right)$ | +1 g |
| | c) | Korrekt svar $\left(h'(x) = 3x^2 e^{3x} + 2xe^{3x}\right)$ | +1 vg |
| **3.** | | | **Max 2/0** |
| | | Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt integraluttryck för arean | +1 g |
| | | med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (6 a.e.) | +1 g |

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **4.** | | **Max 2/0** |
| | Godtagbar ansats, tecknar korrekt allmän primitiv funktion | +1 g |
| | med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $F(x) = 2\ln x + 3x + 2$ ) | +1 g |

*Kommentar:* Om eleven utifrån en något felaktig primitiv funktion gör en korrekt konstantbestämning så ges lösningen totalt 1 g-poäng.

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 g)**

$$F(x) = -\frac{2}{x^2} + C$$

$$F(1) = -\frac{2}{1^2} + C = 5$$

$$-2 + C = 5$$

$$C = 7$$

Svar: $F(x) = -\frac{2}{x^2} + 7$

*Kommentar:* Den allmänna primitiva funktionen är felaktig men eleven bestämmer konstanten *C* korrekt utifrån sin primitiva funktion.

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | | **Max 2/1** |
| | Godtagbar bestämning av en lösning | +1 g |
| | med godtagbar bestämning av ytterligare en lösning | +1 g |
| | med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = \pm 13° + n \cdot 180°$) | +1 vg |

| | | |
|---|---|---|
| **6.** | | **Max 1/0** |
| | Korrekt svar (*B*, *A*, *C*) | +1 g |

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **7.** | | **Max 0/2** |
| | Godtagbar ansats, ritar grafen till *f* eller bestämmer $f(x) = 0{,}5x + 2$ | +1 vg |
| | med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (16) | +1 vg |
| **8.** | | **Max 0/1/¤** |
| | Godtagbart genomfört bevis där vissa motiveringar kan saknas eller där beviset t ex bygger på den likhet som ska visas | +1 vg |

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | genomföra beviset formellt korrekt. |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | |

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 vg)**

$$\frac{\sin 2V + \sin V}{2\cos V + 1} = \sin V$$

$$\sin 2V + \sin V = \sin V(2\cos V + 1)$$

$$\sin 2V + \sin V = 2\sin V \cos V + \sin V$$

$$\sin 2V + \sin V = \sin 2V + \sin V \quad \text{VSV}$$

*Kommentar:* Elevens lösning bygger på likheten som ska visas och uppvisar därför inte MVG-kvaliteten för bevis.

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **9.** | | **Max 0/3/¤** |
| a) | Godtagbar lösning med korrekt svar (0,6) | +1 vg |
| b) | Godtagbar ansats, t ex bestämmer att $\cos^2(B+C)=0{,}64$ | +1 vg |
| | med korrekt svar $(-0{,}8)$ | +1 vg |

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | motivera att $\cos(B+C)<0$ . |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | |

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (2 vg och en av MVG-kvaliteterna)**

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$0{,}6^2 + \cos^2 A = 1$

$\cos^2 A = 0{,}64$

$\cos A = \pm 0{,}8$ eftersom $A$ är spetsig är $\cos A = 0{,}8$

$B+C = 180 - A$

$\cos(B+C) = \cos(180-A) = -\cos A$

Svar: $\cos(B+C) = -0{,}8$

*Kommentar:* Eleven motiverar att $\cos(B+C)<0$ genom att poängtera att eftersom vinkeln $A$ är spetsig är $\cos A = 0{,}8$. Sammantaget ger lösningen 2 vg-poäng och MVG-kvaliteten för bevis.

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **10.** | | **Max 0/2/¤** |

a) Godtagbar ansats, t ex anger att $\frac{1}{4}F(x)$ är en primitiv funktion till den givna integranden +1 vg

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | dra slutsatsen att det sökta värdet är $\frac{1}{4}\left[F(x)\right]_{-2}^{3}$. |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | |

b) Godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{5}{4}\right)$ +1 vg

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **11.** | | **Max 2/4/¤** |

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

<table>
<tr><th>Bedömningen avser</th><th colspan="4">Kvalitativa nivåer<br>Lägre ⟶ Högre</th><th>Total poäng</th></tr>
<tr><td>Metodval och genomförande<br>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.<br>Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</td><td>Eleven bestämmer båda areorna under punkt 1 korrekt.<br>(2 a.e.)<br>1 g</td><td colspan="2">Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att bestämma areorna korrekt för de tre specialfallen.<br>(2 a.e., 1 a.e., $\frac{2}{3}$ a.e.)<br>1 g och 1 vg</td><td>Eleven påbörjar en generell lösning, t ex bestämmer de övre integrationsgränserna i de generella fallen.<br>$\left(\frac{2}{k} \text{ respektive } \frac{\pi}{2k}\right)$<br>1 g och 2 vg</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>Matematiska resonemang<br>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</td><td colspan="2">Eleven gör en relevant observation utifrån något av specialfallen, t ex ”Arean för områdena är lika stora”.<br>1 g</td><td colspan="2">Eleven drar slutsatsen att områdena har lika stora areor för respektive värde på k. Slutsatsen baseras på minst tre specialfall eller en generell lösning.<br>1 g och 1 vg</td><td>1/1</td></tr>
<tr><td>Redovisning och matematiskt språk<br>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt.<br>1 vg</td><td>0/1</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td colspan="4"></td><td>2/4</td></tr>
</table>

**MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.**

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | använda en generell metod för att teckna ett korrekt generellt uttryck för arean av något av områdena. |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | visa att areorna i det generella fallet är lika stora $\left(\frac{2}{k}\text{ a.e.}\right)$. |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen omfattar den generella behandlingen av uppgiften. |

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (2 g och 2 vg)**

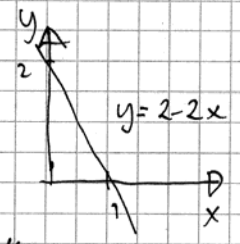
$\boxed{k=1}$

Arean av A : $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$

Arean av B : $\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx = \left[2\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2\sin \pi/2 = 2$

$\boxed{k=2}$

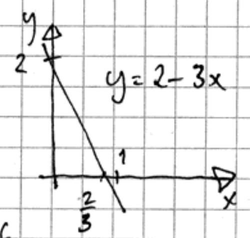
Arean av A : $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$




Arean av B : $\int_0^{\pi/4} 2\cos 2x\,dx = \left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \sin \pi/2 = 1$

$\boxed{k=3}$

Arean av A : $\frac{2\cdot 2/3}{2} = 2/3$




Arean av B : $\int_0^{\pi/6} 2\cos 3x\,dx = \left[\frac{2}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}$

| k | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2/3 | 2/3 |

Areorna är lika stora och

$A = B = \frac{2}{k}$

*Bedömning*

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | X | 1/1 | Eleven visar säkerhet genom att beräkna samtliga tre fall korrekt. |
| Matematiska resonemang | X | 1/1 | Eleven drar slutsatsen att areorna är lika stora. |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/0 | Skärningspunkterna med $x$-axeln är inte motiverade. |
| **Summa** | | **2/2** | |

*Kommentar:* Eleven beräknar areorna i de tre specialfallen och drar en slutsats om att areorna är lika stora, dock är motiveringen att det gäller oberoende av värde på *k* bristfällig. Lösningen anses inte uppnå vg-nivå för redovisning och matematiskt språk då skärningspunkterna med *x*-axeln inte är motiverade i något fall då $y = 2\cos kx$ .

**Elevlösning 2 (2 g och 3 vg och en av MVG-kvaliteterna)**

Triangel

$A = 2$ a.e

$k=2$

skär x-axeln då $x=1$

$A = 1$ a.e

$k=3$

skär x-axeln då $x=\frac{2}{3}$

$A=\frac{2}{3}$ a.e.

Kurva

$A=\left[2\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2$ a.e.

$k=2$

skär x-axeln då $\cos 2x = 0$, $x=\frac{\pi}{4}$

$A=\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = 1$ a.e.

$k=3$

skär x-axeln då $\cos 3x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$

$A=\left[\frac{2}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}$ a.e.

| k | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $2=2/1$ | $2=2/1$ |
| 2 | $1=2/2$ | $1=2/2$ |
| 3 | $2/3=2/3$ | $2/3=2/3$ |

Slutsats: När k har samma värde är areorna lika.

Areorna verkar bli $2/k$.

Bevis: $k=k$

skär x-axeln då

$2-kx=0$, $x=\frac{2}{k}$

$A=\frac{\frac{2}{k}\cdot 2}{2}=\frac{2}{k}$

$k=k$

skär x-axeln då

$2\cos kx=0 \Rightarrow kx=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{k}$

$A=\left[\frac{2}{k}\sin kx\right]_0^{\pi/k} = \frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{k} - 0 = \frac{2}{k}$

Areorna är $\frac{2}{k}$ i båda fallen

*Bedömning*

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | X | 1/2 | Eleven genomför en generell lösning i det ena fallet. |
| Matematiska resonemang | X | 1/1 | Eleven drar korrekt slutsats baserat på tre specialfall. |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/0 | Skärningspunkterna med *x*-axeln är inte tillräckligt väl motiverade. |
| **Summa** | | **2/3** | |

*Kommentar:* Eleven gör en generell lösning som är korrekt i fallet för område *A* men innehåller en felaktig beräkning för område *B*. Lösningen anses uppnå MVG-kvaliteten gällande användandet av generella metoder men uppnår inte MVG-kvaliteten gällande bevis eftersom det ena generella fallet inte är korrekt beräknat.

**Elevlösning 3 (2 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna)**

- A: $\int_0^2 (2-x)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4 - \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2}}$ ae

$k=1$

B: $\int_0^{\pi/2} (2\cos x)\,dx = \left[2\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin 0 = \underline{\underline{2}}$ ae

- A: $y = 2-2x$ skärning m. x-axeln $0 = 2-2x$ $x = 1$

$k=2$ $\int_0^1 (2-2x)\,dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 2-1-0 = \underline{\underline{1}}$ ae

B: $y = 2\cos 2x$ skärning m. x-axeln $0 = 2\cos 2x$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\pi/4} (2\cos 2x)\,dx = \left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \sin\frac{2\pi}{4} - \sin 0 = 1-0 = \underline{\underline{1}}$ ae

$k=3$ A: $y = 2-3x$ skärn. m. x-axeln $x = \frac{2}{3}$

$\int_0^{\frac{2}{3}} (2-3x)\,dx = \left[2x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{3\cdot\frac{4}{9}}{2} - 0 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ ae

B: $y = 2\cos 3x$ skärn. m. x-axeln $2\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 3x)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{6} - \frac{2}{3}\sin 0 = \frac{2}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ ae

- Slutsats: Areorna A & B är lika stora för samma värde på k!

- A: $y = 2-kx$ $0 = 2-kx$ $x = \frac{2}{k}$

$\int_0^{\frac{2}{k}} (2-kx)\,dx = \left[2x - \frac{kx^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{k}} = 2\cdot\frac{2}{k} - \frac{k}{2}\cdot\frac{4}{k^2} - 0 = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \underline{\underline{\frac{2}{k}}}$ a.e.

B: $y = 2\cos kx$ $0 = 2\cos kx$ $\cos kx = 0 \Rightarrow kx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2k}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2k}} (2\cos kx)\,dx = \left[\frac{2}{k}\sin kx\right]_0^{\pi/2k} = \frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2k} - \frac{2}{k}\sin 0 = \frac{2}{k} - 0 =$

$= \underline{\underline{\frac{2}{k}}}$ a.e.

För samma värde på k är arean A = arean B $= \underline{\underline{\frac{2}{k}}}$ a.e.

*Bedömning*

| Kvalitativa nivåer | | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | X | 1/2 | |
| Matematiska resonemang | X | 1/1 | |
| Redovisning och matematiskt språk | X | 0/1 | |
| **Summa** | | **2/4** | |

*Kommentar:* Eleven gör en generell lösning och drar korrekta slutsatser. Redovisningen är välstrukturerad och innehåller ett korrekt matematiskt språk. Lösningen anses uppnå samtliga möjliga MVG-kvaliteter.

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|

## Del II

**12.** **Max 2/0**

Godtagbar ansats, t ex ställer upp ekvationen $\sin v = \frac{182}{400}$ +1 g

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar $(27°)$ +1 g

**13.** **Max 2/0**

Godtagbar ansats, t ex uppskattar arean med hjälp av ruträkning +1 g

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar
$(3300 - 3600$ miljarder ton) +1 g

**14.** **Max 2/1**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer vinklarna i triangeln *BCD* +1 g

med godtagbar beräkning av sidan *BC* eller *BD* +1 g

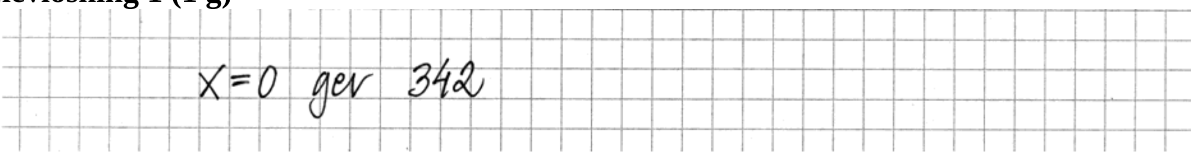
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (340 m) +1 vg

**15.** **Max 1/2**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar (342 A) +1 g

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 g)**




*Kommentar:* Eleven visar förståelse för att det värde som ska beräknas är när $x = 0$. Trots att enheten saknas ges lösningen 1 g-poäng. En elev som endast svarar ”342 A” visar ingen godtagbar lösning och anses därmed inte uppfylla kravet för att få poäng på uppgiften.

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|---|---|---|
| b) | Godtagbar ansats, t ex inser att det sökta värdet är lösning till $S'(x) = 50$ | +1 vg |
| | med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,0 m/s) | +1 vg |

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (0 vg)**

Jag har löst uppgiften med min räknare och fått svaret 3,0 m/s

*Kommentar:* Eleven ger endast rätt svar till uppgiften men motiverar inte på något sätt hur räknaren använts.

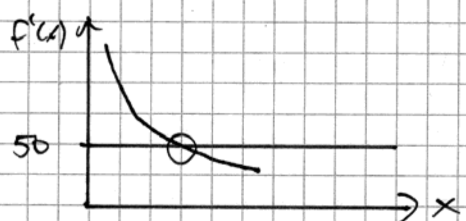
**Elevlösning 2 (1 vg)**

$S'(x) = 50$ ger $x = 3,0$ m/s med hjälp av räknaren.

*Kommentar:* Eleven inser att det sökta värdet är lösningen till $S'(x) = 50$ men motiverar inte på något sätt hur räknaren använts.

**Elevlösning 3 (2 vg)**

Jag ritar grafen till derivatan med hjälp av räknaren och bestämmer när värdet är 50. Se skiss.



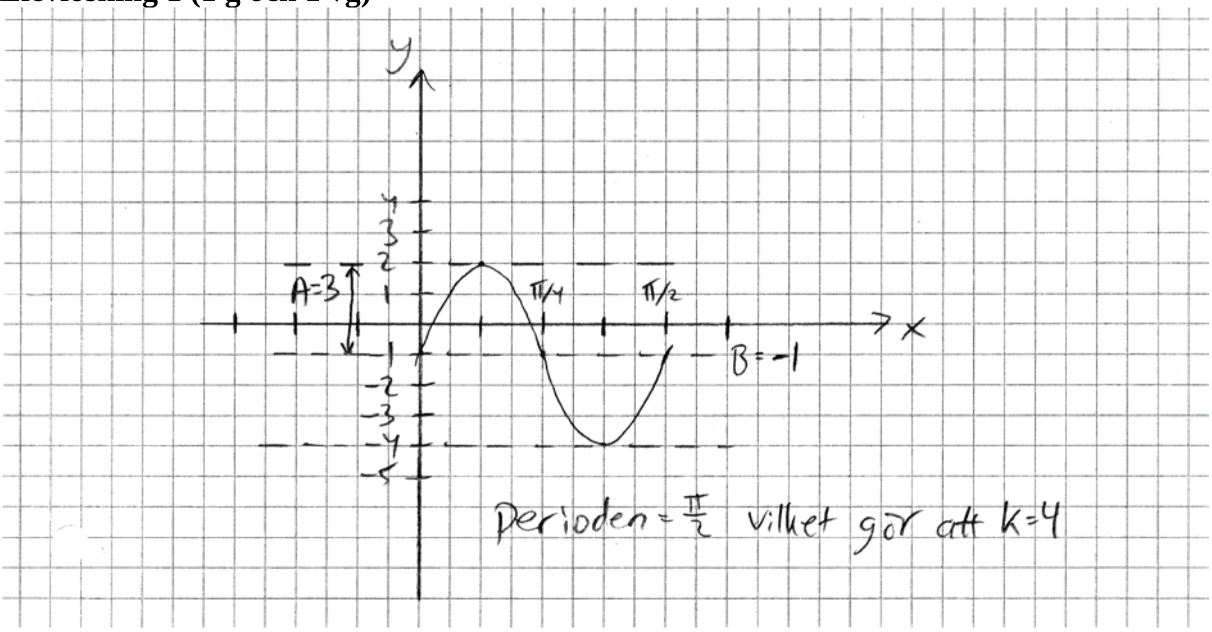

Svar: 3,0 m/s

*Kommentar:* Eleven inser att det sökta värdet är lösningen till $S'(x) = 50$ och motiverar med hjälp av en enkel skiss hur räknaren använts.

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **16.** | | **Max 1/1** |
| | Godtagbar ansats, bestämmer minst ett av värdena *A*, *B* eller *k* korrekt | +1 g |
| | med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(y = 3\sin 4x - 1)$ | +1 vg |

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)**




*Kommentar:* Eleven gör en grafisk lösning av uppgiften och bestämmer samtliga tre konstanter. Motiveringen av konstanternas värde är bristfällig och funktionsuttrycket är inte angivet. Trots detta anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kravet för att sammantaget ges 1 g- och 1 vg-poäng.

| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **17.** | | **Max 1/2/¤** |

*Kommentar:* Vid utprövning av denna uppgift har det visat sig att eleverna använder sig av två olika lösningsmetoder. Därför ges två alternativa bedömningsanvisningar, en för respektive metod.

**Alternativ 1** (Lösning med hjälp av sinussatsen)

| | |
|---|---|
| Godtagbar ansats, t ex bestämmer vinkeln $C$ till $41°$ | +1 g |
| med godtagbar beräkning av sidan $AC$ i fallet $C = 41°$, 6,1 cm | +1 vg |
| med godtagbar beräkning av sidan $AC$ i fallet $C = 139°$, 1,2 cm | +1 vg |

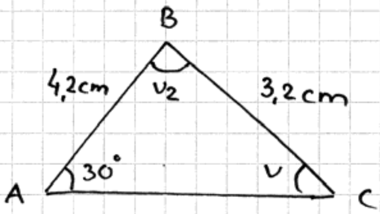
**Alternativ 2** (Lösning med hjälp av cosinussatsen)

| | |
|---|---|
| Godtagbar ansats, t ex ställer upp en ekvation för bestämning av sidan $AC$ | +1 g |
| med godtagbar bestämning av båda lösningarna till ekvationen, 1,2 cm och 6,1 cm | +1-2 vg |

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | dra slutsatsen att omkretsen av triangeln blir för stor i det ena fallet (6,1 cm) men att tråden räcker i det andra fallet (1,2 cm). |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. |

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)**




$$\frac{4,2}{\sin v} = \frac{3,2}{\sin 30}$$

$$\sin v = \frac{4,2 \cdot \sin 30}{3,2} = 0,65625$$

$$v = \sin^{-1}(0,65625) = 41,01449967 \approx 41^\circ$$

$$v_2 = 180^\circ - 30^\circ - 41^\circ = 109^\circ$$

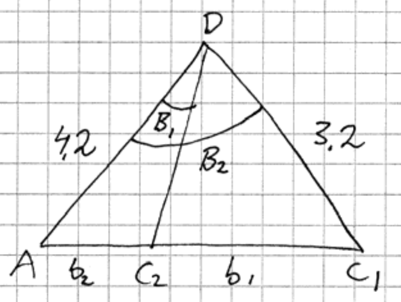
$$\frac{AC}{\sin 109^\circ} = \frac{3,2}{\sin 30^\circ}$$

$$AC = \frac{3,2 \cdot \sin 109}{\sin 30^\circ} = 6,051318884 \approx 6,0 \text{ cm}$$

Svar: Armand kan inte få ihop en triangel
han behöver längre silvertråd

*Kommentar:* Eleven beräknar den tredje sidan enbart för det ena fallet. Lösningen motsvarar därmed 1 g- och 1 vg-poäng.

**Elevlösning 2 (1 g och 2 vg och två av MVG-kvaliteterna)**




Omkrets $\leq 9$

$9 - 4,2 - 3,2 = 1,6$

$AC \leq 1,6$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{4,2}$$

$$C = \sin^{-1}\left(\frac{4,2 \cdot \sin 30^\circ}{3,2}\right)$$

$C_1 = 41,0^\circ \quad C_2 = 180 - C_1 = 180 - 41 = 139^\circ$

Vinkel $B_1 = 180 - 139 - 30 = 11^\circ$

Vinkel $B_2 = 180 - 41 - 30 = 109^\circ$

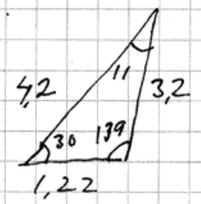
$$\frac{\sin B_1}{b_2} = \frac{\sin A}{a} \qquad \frac{\sin B_2}{b_1} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 11}{b_2} = \frac{\sin 30}{3,2} \qquad \frac{\sin 109^\circ}{b_1} = \frac{\sin 30^\circ}{3,2}$$

$$b_2 = \frac{3,2 \cdot \sin 11}{\sin 30} \qquad b_1 = \frac{3,2 \cdot \sin 109}{\sin 30}$$

$b_2 = 1,22$ cm $\qquad b_1 = 6,05$ cm

Eftersom sidan $AC \leq 1,6$ blir sidan AC 1,22cm eftersom $6,05 > 1,6$




*Kommentar:* Eleven redogör för båda fallen samt drar slutsatsen att tråden räcker till i endast ett av fallen. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig och det matematiska språket är i huvudsak korrekt trots att definitionen av $b_1$ är något otydlig i figuren. Sammantaget ger lösningen 1 g- och 2 vg-poäng samt båda möjliga MVG-kvaliteterna.

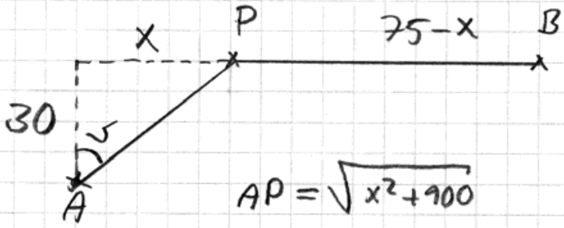
| **Uppg.** | **Bedömningsanvisningar** | **Poäng** |
|---|---|---|
| **18.** | | **Max 0/3/¤** |
| | Godtagbar ansats, t ex bestämmer kabelns längd i vatten och på land som funktion av *v* | +1 vg |
| | med korrekt tecknat funktionsuttryck för totala kostnaden som funktion av en variabel, t ex $K(v)=2500\cdot\frac{30}{\cos v}+1500\cdot(75-30\tan v)$ * | +1 vg |
| | med godtagbar bestämning av vinkeln *v*, t ex genom avläsning i grafen till kostnadsfunktionen $(v=37°)$ | +1 vg |

| MVG-kvalitet | visar eleven i denna uppgift genom att: |
|---|---|
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | använda en generell metod och uttrycka kostnaden som funktion av en variabel.* |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | |

*MVG-kvaliteten gällande generella metoder utfaller samtidigt som den andra vg-poängen delas ut.

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges på följande sida. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (3 vg och en av MVG-kvaliteterna)**



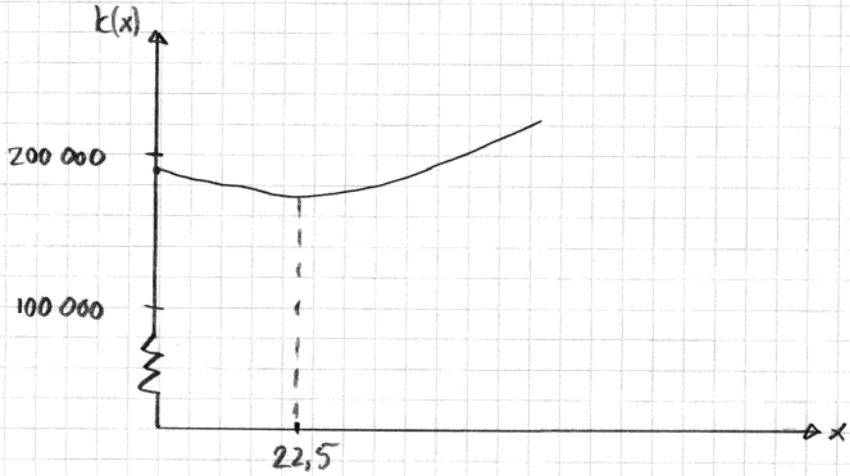

$\tan v = \frac{x}{30}$

$AP = \sqrt{x^2 + 900}$

$K(x) = 2500 \cdot \sqrt{x^2 + 900} + 1500 \cdot (75 - x)$

$0 \leq x \leq 75$

Ritar grafen på räknaren och söker minimum




När $x = 22{,}5$ blir kostnaden minimal

$\tan v = \frac{22.5}{30}$ ger $v \approx 36{,}9°$

Svar: Kostnaden blir minimal då $v = 37°$

*Kommentar:* Eleven löser uppgiften genom att använda Pythagoras sats. Lösningen innehåller ett korrekt funktionsuttryck för kostnaden tecknat i en variabel. Sammantaget ger lösningen 3 vg-poäng och MVG-kvaliteten för att använda en generell metod.

# Mål för matematik kurs D

## Kursplan 2000

**Trigonometri (T)**
T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

**Differential- och integralkalkyl (D)**
D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

**Övrigt (Ö)**
Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning,

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

# Betygskriterier 2000

## Kriterier för betyget Godkänt

G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

## Kriterier för betyget Väl godkänt

V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

## Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

## Kopieringsunderlag för aspektbedömning

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

| | Kvalitativa nivåer | Poäng | Motiveringar |
|---|---|---|---|
| Metodval och Genomförande | | | |
| Matematiska resonemang | | | |
| Redovisning och matematiskt språk | | | |
| **Summa** | | | |

## Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

| Elevens namn: ..................................................................... | Uppgift (¤-märkt) | | | | | | Övriga upp-gifter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 8 | 9b | 10a | 11 | 17 | 18 | |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | | | | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | | | | | | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | | | | | | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | | | | |


| Elevens namn: ..................................................................... | Uppgift (¤-märkt) | | | | | | Övriga upp-gifter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 8 | 9b | 10a | 11 | 17 | 18 | |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | | | | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | | | | | | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | | | | | | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | | | | |



| Elevens namn: ..................................................................... | Uppgift (¤-märkt) | | | | | | Övriga upp-gifter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MVG-kvalitet | 8 | 9b | 10a | 11 | 17 | 18 | |
| Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning | | | | | | | |
| Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet | | | | | | | |
| Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang | | | | | | | |
| Värderar och jämför metoder/modeller | | | | | | | |
| Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk | | | | | | | |

## Insamling av provresultat för matematik kurs D

Vårterminen 2011 deltar alla skolor i resultatinsamlingen genom att skicka in resultat för ett litet urval elever. Denna insamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om vårens prov i slutet av augusti Rapporten kommer att finnas tillgänglig på http://www8.umu.se/edmeas/np/index.html. Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

När du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 2:a, 13:e, 21:a och 27:e i varje månad.** Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 2:a i varje månad**.

1. Gå in på http://www8.umu.se/edmeas/np/index.html och klicka på rubriken **Resultatinsamling vt 2011** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **agna4es** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 2:a, 13:e, 21:a och 27:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 2:a i varje månad** till:

**Umeå universitet**
**Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap**
**Nationella prov**
**Att. Monika Kriström**
**901 87 Umeå**

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av augusti måste vi ha alla resultat **senast 17 juni 2011.**

Förutom ovan nämnda resultatinsamling ska vissa skolor, de som ingår i Skolverkets urval, även lämna **uppgift om endast kurs- och provbetyg för alla elever** för varje undervisnings-grupp**.** Denna insamling sker via SCB:s hemsida. Separat information och anvisningar rörande denna insamling skickas direkt till de skolor som ingår i urvalet.