

Prov som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap. 4 § offentlighets- och sekretesslagen (2009:400). Avsikten är att detta prov ska kunna återanvändas t.o.m. 2018-06-30.
Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2012

Anvisningar

- Provtid 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. **Vi rekommenderar att du använder högst 135 minuter för arbetet med Del I.**
- Hjälpmedel **Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”.
Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.
Del II: Miniräknare, även symbolhanterande räknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs D”.
- Provmaterialet Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.
Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.
*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren.
Redovisa därför ditt arbete med Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
- Provet Provet består av totalt 17 uppgifter. **Del I** består av 10 uppgifter och **Del II** av 7 uppgifter.
Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.
Uppgift 10 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.
Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
- Poäng och betygsgränser Provet ger maximalt 43 poäng.
Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med \square , vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.
Undre gräns för provbetyget
Godkänt: 12 poäng.
Väl godkänt: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng.
Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 14 vg-poäng.
Du ska dessutom ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de \square -märkta uppgifterna ger möjlighet att visa.

Del I

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm $f'(\pi)$ för funktionen $f(x) = \sin x$ (2/0)

2. Derivera

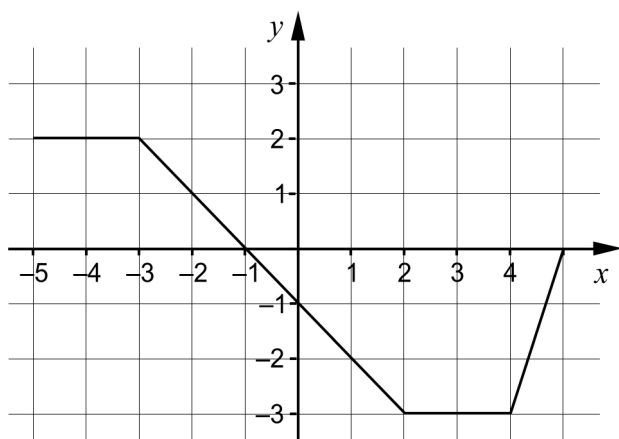
a) $f(x) = 2 \cos 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $g(x) = x^2 \cdot e^x$ *Endast svar fordras* (1/0)

3. Beräkna $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2x \right) dx$ och förenkla så långt som möjligt. (2/0)

4. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $2 \sin x = \sqrt{2}$ (2/0)

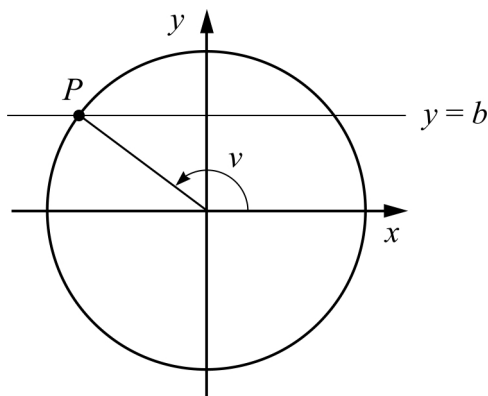
5. Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$ i intervallet $-5 \leq x \leq 5$



a) Bestäm $\int_{-5}^1 f(x) dx$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) Bestäm a så att $\int_{-5}^a f(x) dx = 0$ *Endast svar fordras* (0/1)

6. Funktionen $f(x) = 2 + (\sin x + \cos x)^2$ är given.
- a) Visa att $f(x) = 3 + \sin 2x$ (1/1)
- b) Bestäm det största och minsta värde funktionen f kan anta. (0/1)
7. Om funktionen f vet man att den har en extrempunkt i $(1, 2)$ och att andraderivatans är $f''(x) = 8 - 6x$
- a) Avgör om den givna extrempunkten är en maximipunkt eller en minimipunkt. (1/0)
- b) Bestäm $f(x)$ (0/2)
8. Visa att $\frac{2}{1 + \cos 2x} = 1 + \tan^2 x$ för alla x där uttrycken är definierade. (0/2/□)
9. Figuren visar en enhetscirkel där en vinkel v och en punkt P är markerade. Punkten P ligger i andra kvadranten och linjen $y = b$ går genom punkten P .

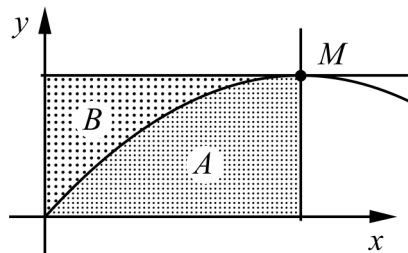


Bestäm $\tan v$ uttryckt i b . (0/2/□)

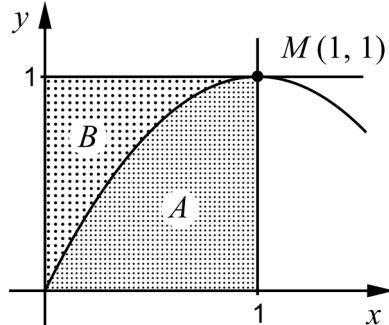
Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

10. I den här uppgiften ska du jämföra storleken av areorna av två områden A och B .
 Område A begränsas av positiva x -axeln, kurvan $y = 2kx - x^2$ och en lodrät linje genom kurvans maximipunkt M .
 Område B begränsas av positiva y -axeln, kurvan $y = 2kx - x^2$ och kurvans tangent i maximipunkten M .



- Börja med fallet $k = 1$. Då har punkten M koordinaterna $(1, 1)$



Beräkna areorna av A och B .

- Undersök nu fallen då $k = 2$ och $k = 3$
 Sammanfatta dina resultat i en tabell.

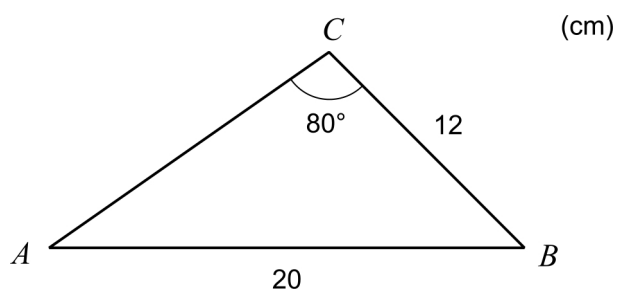
k	M	Arean av A	Arean av B
1	$(1, 1)$		
2			
3			

- Jämför areorna av A och B för samma värde på k .
 Formulera en slutsats av din jämförelse.
- Visa att din slutsats gäller för alla $k > 0$

Del II

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

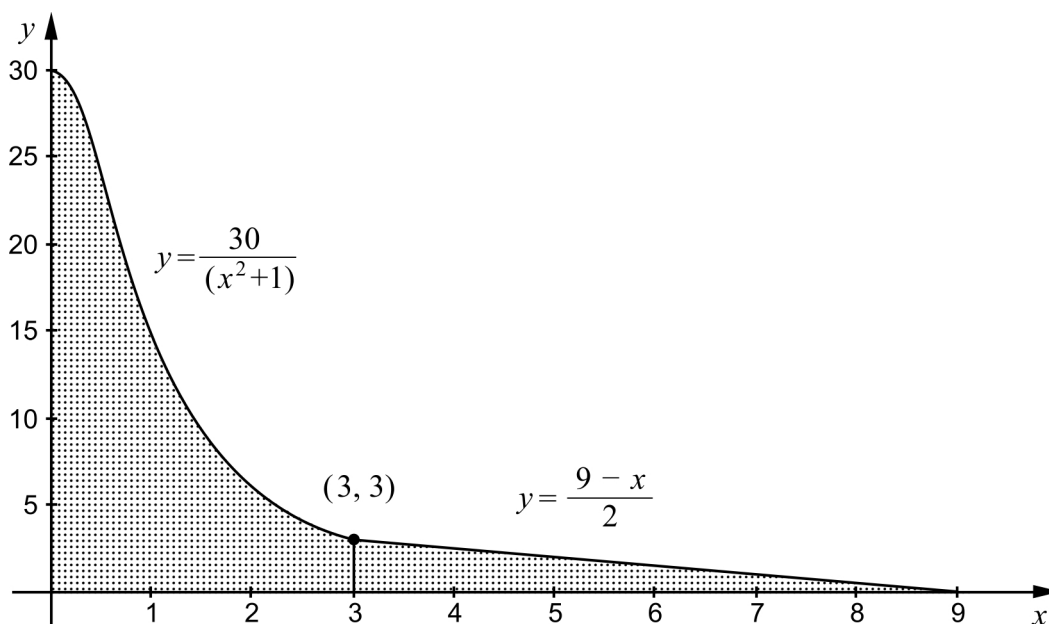
11. I triangeln ABC är vinkeln C 80° och sidorna AB och BC är 20 cm respektive 12 cm.



- a) Bestäm vinkeln A . (1/0)
- b) Beräkna triangelns area. (1/0)

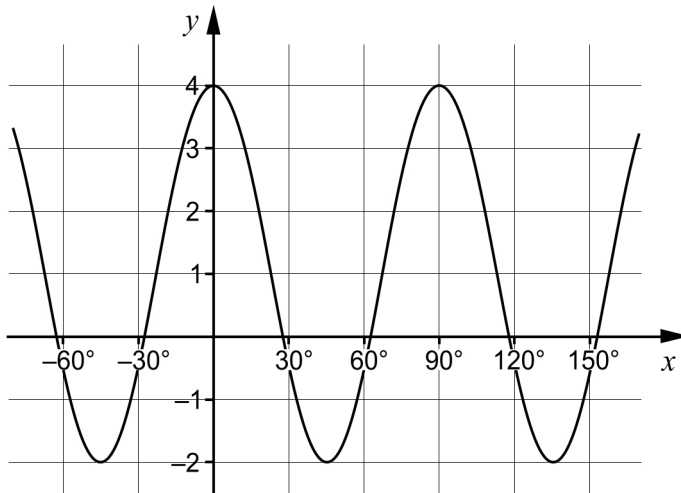
12. Figuren visar ett område som begränsas av kurvan $y = \frac{30}{x^2 + 1}$ i intervallet $0 \leq x \leq 3$,

linjen $y = \frac{9-x}{2}$ i intervallet $3 \leq x \leq 9$ samt koordinataxlarna.



Beräkna det markerade områdets area. Svara med minst tre värdesiffror. (3/0)

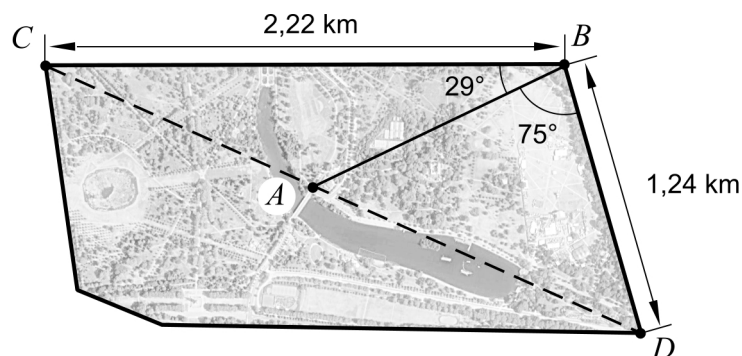
13. Ekvationen för kurvan nedan kan skrivas på formen $y = A + B \cos kx$.



Bestäm konstanterna A , B och k .

(1/1)

14. Steve tränar brevduvor. Vid en uppvisning i Hyde Park i London ska Steve låta en duva flyga från A till B . Punkten A ligger på diagonalen CD , se figur.



Steve vill veta hur långt det är mellan A och B för att kunna avgöra vilken av sina duvor han ska välja. Hjälプ honom att beräkna sträckan AB .

(2/1)

15. En luftfylld ballong med volymen 5000 cm^3 får en läcka. Enligt en förenklad modell minskar volymen med hastigheten $(20 - 0,01t) \text{ cm}^3/\text{s}$, där t är tiden i sekunder från den tidpunkt då läckan uppstår.

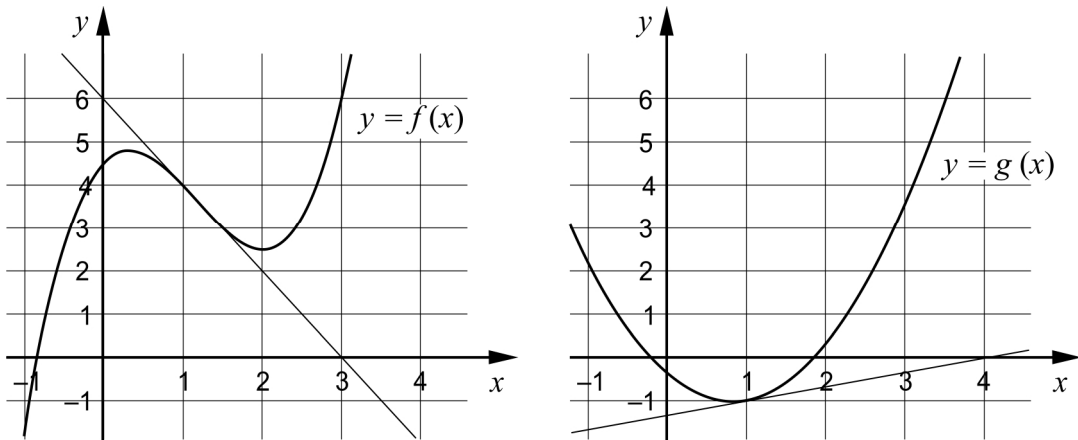
a) Hur stor volym luft läcker ut under de första 60 sekunderna?

(0/1)

b) Hur lång tid tar det innan ballongen är tom?

(0/2)

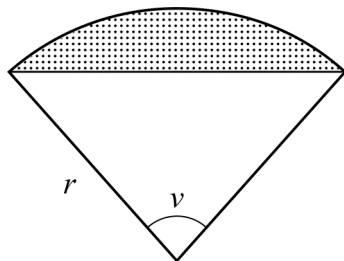
16. Figurena visar kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 1$



Sätt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ och bestäm $h'(1)$.

(0/2/□)

17. Figuren visar en cirkelsektor där ett cirkelsegment är markerat.



Bestäm vinkeln v , i intervallet $0 < v < \pi$, så att arean av cirkelsegmentet utgör 25 % av cirkelsektorns area. Svara med minst tre värdesiffror.

(0/2/□)

Innehåll	Sid nr
Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet	4
Kravgränser	5
Allmänna riktlinjer för bedömning	6
Bedömningsanvisningar del I och del II	7
Mål för matematik kurs D – Kursplan 2000	21
Betygskriterier 2000	22
Kopieringsunderlag för aspektbedömning	23
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter	24
Insamling av provresultat för matematik kurs D våren 2012	25

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbyggnad samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfinas och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,
10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygskriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Strävansmål 1 och 2 kan därför sägas beröra alla uppgifter i detta prov. Strävansmål 3 och 5 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 5, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15 och 16 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16 och 17. Strävansmål 6 berörs av uppgifterna 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13 och 16 som har inslag av reflektion kring begrepp och metoder. Strävansmål 8 som avser indikera elevernas kunskaper i modellering kan kopplas till uppgifterna 10, 14 och 15.

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2012 i förhållande till betygs Kriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längre bak i detta häfte).

Uppgift nr	g po-äng	vg po-äng	▫	Kunskapsområde											Betygs kriterium																					
				Övr			Trigonometri				Diff & integral				Godkänt				Väl godkänt						Mycket väl godkänt											
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5				
1	2	0					x					x					x		x																	
2a	1	0											x					x																		
2b	1	0															x																			
3	2	0																				x			x											
4	2	0					x																		x		x									
5a	1	0																						x												
5b	0	1																																		
6a	1	1										x													x											
6b	0	1										x																								
7a	1	0																																		
7b	0	2																																		
8	0	2	▫																																	
9	0	2	▫																																	
10	2	4	▫			x																														
11a	1	0																																		
11b	1	0																																		
12	3	0																																		
13	1	1																																		
14	2	1																																		
15a	0	1																																		
15b	0	2																																		
16	0	2	▫			x																														
17	0	2	▫																																	
Σ	21	22				0/2										9/9														12/11						

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 21 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänt: 12 poäng.

Väl godkänt: 25 poäng varav minst 7 vg-poäng.

Mycket väl godkänt: 25 poäng varav minst 14 vg-poäng.

Eleven ska dessutom ha visat prov på minst tre *olika* MVG-kvaliteter av de fyra MVG-kvaliteter som är möjliga att visa i detta prov.

De α -märkta uppgifterna i detta prov ger möjlighet att visa fyra olika MVG-kvaliteter, se tabellen nedan.

MVG-kvalitet	Uppgift				
	8	9	10	16	17
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning			○		○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet		○		○	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	○		○		
Värderar och jämför metoder/modeller					
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk			○		○

Allmänna riktlinjer för bedömning

1. Allmänt
Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.
2. Positiv bedömning
Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.
3. g- och vg-poäng
För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänt respektive Väl godkänt används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.
4. Uppgifter av kortsvarstyp (Endast svar fordras)
 - 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
 - 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.
5. Uppgifter av långsvarstyp
 - 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
 - 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2 g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen¹. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
 - 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.²
 - 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel³, formella fel och enklare räknefel.
6. Aspektbedömning
Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna ”Metodval och genomförande”, ”Matematiskt resonemang” samt ”Redovisning och matematiskt språk” som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.
7. Krav för olika provbetyg
 - 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
 - 7.2 Kravet för provbetyget Godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
 - 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänt uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
 - 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänt anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (α) uppgifter.

¹ Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

² Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation	+1 g
med korrekt svar	+1 g

³ Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

Prov som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap. 4 § offentlighets- och sekretesslagen (2009:400). Avsikten är att detta prov ska kunna återanvändas t.o.m. 2018-06-30. Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

Bedömningsanvisningar (MaD vt 2012)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
Del I		
1.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t ex deriverar $f(x)$ korrekt	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-1)	+1 g
2.		Max 2/0
a)	Korrekt svar ($f'(x) = -6 \sin 3x$)	+1 g
b)	Korrekt svar ($g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$)	+1 g
3.		Max 2/0
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer korrekt primitiv funktion	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (e^2)	+1 g
4.		Max 2/0
	Bestämmer en lösning till ekvationen	+1 g
	med i övrigt godtagbar bestämning av samtliga lösningar till ekvationen ($x = 45^\circ + n \cdot 360^\circ$ och $x = 135^\circ + n \cdot 360^\circ$)	+1 g

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
5.		Max 1/1
a)	Godtagbart svar (4)	+1 g
b)	Godtagbart svar ($a = 2,5$)	+1 vg
6.		Max 1/2
a)	Godtagbar ansats, t ex utvecklar kvadraten med i övrigt godtagbar lösning	+1 g +1 vg
b)	Korrekt bestämning av minsta respektive största värdet för funktionen f (2 respektive 4)	+1 vg
7.		Max 1/2
a)	Godtagbar motivering till att extrempunkten är en minimipunkt	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x) = 8x - 3x^2 - 5$ med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($f(x) = 4x^2 - x^3 - 5x + 4$)	+1 vg +1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg)

$$\begin{aligned}
 b.) \quad f''(x) &= 8 - 6x \\
 f'(x) &= 8x - 3x^2 + C \\
 f(x) &= 4x^2 - x^3 + Cx + D
 \end{aligned}$$

Kommentar: Eleven bestämmer det allmänna uttrycket för funktionen, vilket anses vara en godtagbar ansats. Sammantaget ger lösningen 1 vg-poäng.

Uppg. Bedömningsanvisningar**Poäng****8.****Max 0/2/□**

Godtagbar ansats, t ex skriver om det ena ledet till $\frac{1}{\cos^2 x}$

+1 vg

med godtagbart genomfört bevis där vissa motiveringar kan saknas

+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	genomföra beviset formellt korrekt.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)

$$\frac{2}{1+\cos 2x} = \tan^2 x + 1$$

$$\frac{2}{1+\cos 2x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{2}{1+\cos 2x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$2 \cos^2 x = 1 + 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x = 2 \cos^2 x \quad \text{V.S.V.}$$

Kommentar: Eleven har på fjärde raden utgått från den likhet som ska visas utan att motivera att ekvivalens gäller. Sammantaget ger lösningen 2 vg-poäng.

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

9.

Max 0/2/□

Godtagbar ansats, t ex anger att $\sin v = b$

+1 vg

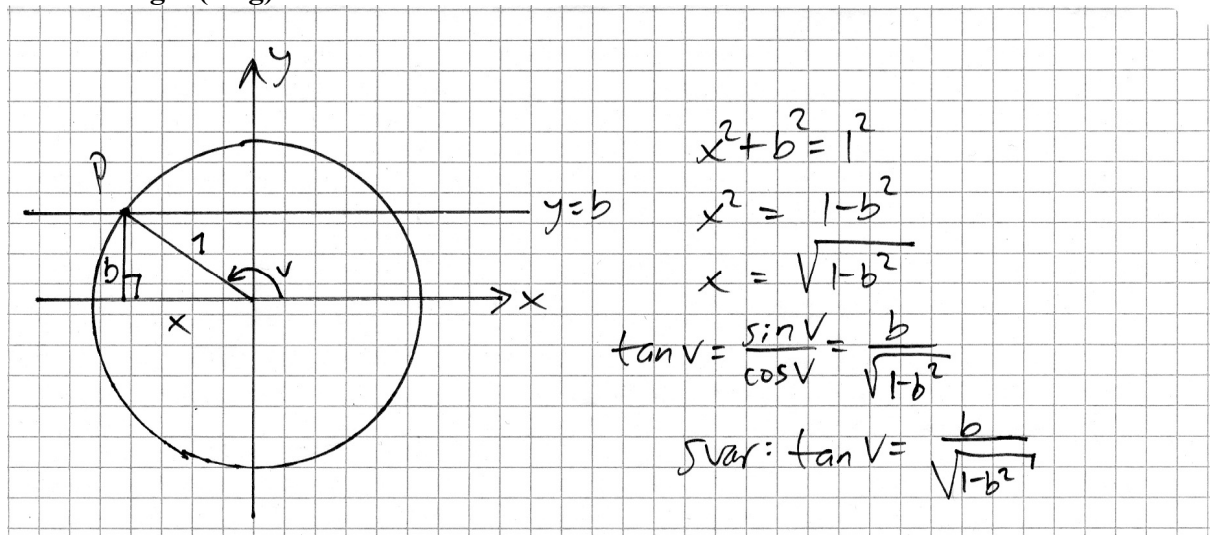
med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer $\cos^2 v$ uttryckt i b

+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra den korrekta slutsatsen att $\tan v = -\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}$ med motiveringen att "cos v är negativ eftersom P ligger i andra kvadranten".
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg)



Kommentar: I sin geometriska tolkning bestämmer eleven relevanta sträckor uttryckt i b men bortser från att x har två lösningar och inser därmed inte att x -koordinaten för P är negativ. Sammantaget ger lösningen 2 vg-poäng.

Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

10.

Max 2/4/□

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Total poäng
	Lägre	Högre		
<p>Metodval och genomförande <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	<p>Bestämmer båda areorna under punkt 1 korrekt ($A = \frac{2}{3}$ och $B = \frac{1}{3}$).</p> <p>1 g</p>	<p>Bestämmer alla areorna under punkt 1 och punkt 2 korrekt* ($k = 2 : A = \frac{16}{3}$ och $B = \frac{8}{3}$; $k = 3 : A = 18$ och $B = 9$).</p> <p>1 g och 1 vg</p>	<p>Bestämmer alla areorna under punkt 1 och punkt 2 korrekt och påbörjar en generell lösning, t ex bestämmer integrationsgränser för det generella fallet.*</p> <p>1 g och 2 vg</p>	1/2
<p>Matematiskt resonemang <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i></p>	<p>Drar slutsatsen att arean av A är dubbelt så stor som arean av B utifrån något av specialfallen.</p> <p>1 g</p>	<p>Drar slutsatsen att arean av A är dubbelt så stor som arean av B. Slutsatsen baseras på minst tre specialfall eller en generell lösning.</p> <p>1 g och 1 vg</p>		1/1
<p>Redovisning och matematiskt språk <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>		<p>Redovisningen är lätt att följa och förstå och omfattar större delen av uppgiften. Det matematiska språket är acceptabelt.</p> <p>1 vg</p>		0/1
Summa				2/4

*En elevlösning som innehåller en generell beräkning av areorna omfattar implicit specialfallen och ger 1 g- och 2 vg-poäng för metodval och genomförande.

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod och teckna ett korrekt integraluttryck för någon av areorna i det generella fallet.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa i det generella fallet att arean av A är dubbelt så stor som arean av B .
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen omfattar minst ett korrekt tecknat generellt uttryck för någon av areorna under punkt 4.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 g och 4 vg)

k	M	Arean av A	Arean av B
1	(1,1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	(2,4)	$\frac{16}{3}$	$\frac{8}{3}$
3	(3,9)	18	9

$$A_A = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = F(1)$$

$$A_B =$$

$$M = (1,1)$$

$$k=1$$

$$A: \int_0^1 \underbrace{2x - x^2}_{f(x)} dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1^2 - \frac{1^3}{3} - 0^2 - \frac{0^3}{3} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$B: 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$k=2 \quad M(2,4) \quad A+B=8 \text{ ae}$$

$$A: \int_0^2 2 \cdot 2x - x^2 dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3} = \frac{16}{3}$$

$$B: 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$k=3 \quad M(3,9) \quad A+B=27 \text{ ae}$$

$$A: \int_0^3 3 \cdot 2x - x^2 dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 3 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} = 18$$

$$B: 27 - 18 = 9$$

SLUTSATS: B kommer alltid att vara hälften av A.

Fortsättning på nästa sida.

MOTIVERING:

$$f(x) = 2kx - x^2$$

k kommer att påverka koordinaterna för M
 produkten av M s koordinater kommer att ge
 den sammanlagda arean (dvs $A_A + A_B$)

$$f'(x) = 2k - 2x$$

$$\begin{aligned} \text{Maximipunkt: } 2k - 2x &= 0 \\ 2x &= 2k \\ x &= k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2kx - x^2 = 4x - x^2$$

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \rightarrow A_A$$

$$M(x, 4x - x^2)$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	—	1/2	
Matematiska resonemang	—	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	—	0/1	
Summa		2/4	

Kommentar: Eleven påbörjar en generell lösning genom att bestämma x -koordinaten för M men använder sedan resultatet felaktigt. Det matematiska språket bedöms som i huvudsak korrekt men de generella resonemangen är inte tillräckligt omfattande för att visa MVG-kvalitet. Sammantaget ger lösningen 2 g- och 4 vg-poäng.

Elevlösning 2 (2 g och 4 vg och tre MVG-kvaliteter)

Bevis

$$y = 2kx - x^2 \quad k > 0$$

$$y' = 2k - 2x$$

$$y' = 0 = 2k - 2x = 0$$

$$2k = 2x$$

$$k = x$$

$$y(k) = 2 \cdot k \cdot k - k^2$$

$$2k^2 - k^2 = k^2$$

koordinater för Maxpunkt = (k, k^2)

$$A \int_0^k (2kx - x^2) dx = \left[kx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^k$$

$$k \cdot k^2 - \frac{k^3}{3} = k^3 - \frac{k^3}{3} = \frac{2k^3}{3}$$

$$B \quad \partial f = y = k^2$$

$$u f = y = 2kx - x^2$$

$$\int_0^k (k^2 - (2kx - x^2)) dx \quad \int_0^k (k^2 - 2kx + x^2) dx$$

$$\left[k^2x - kx^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^k = k^3 - k^3 + \frac{k^3}{3} = \frac{k^3}{3} \text{ ae}$$

$$\text{Area A} = \frac{2k^3}{3} \text{ ae}$$

A är dubbelt så stor som B.

$$\text{Area B} = \frac{k^3}{3} \text{ ae}$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	—	X → 1/2	
Matematiska resonemang	—	X → 1/1	
Redovisning och matematiskt språk	—	X → 0/1	
Summa		2/4	

Kommentar: Den generella lösningen innehåller implicit beräkningar av specialfallen. Sammantaget ger lösningen 2 g- och 4 vg-poäng och samtliga möjliga MVG-kvaliteter.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
--------------	------------------------------	--------------

Del II

11.		Max 2/0
------------	--	----------------

- | | | |
|--|---|------|
| | a) Godtagbar bestämning av vinkeln A ($36,2^\circ$) | +1 g |
| | b) Godtagbar bestämning av triangelns area (108 cm^2) | +1 g |

12.		Max 3/0
------------	--	----------------

- | | | |
|--|--|------|
| | Korrekt beräkning av den högra delens area, 9 a.e. | +1 g |
| | Korrekt uppställd integral för den vänstra delens area | +1 g |
| | med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (46,5 a.e.) | +1 g |

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (3 g)

$$A_{\text{triangel}} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ ae}$$

$$A_{\text{under kurvan}} = \int_0^3 \frac{30}{(x^2+1)} dx \approx 37,5 \text{ ae}$$

löses med räknaren

Total area: 46,5 ae svar: 46,5 ae

Kommentar: Eleven bestämmer den högra delens area korrekt. Bestämningen av integralens värde med hjälp av räknare anses vara tillräckligt motiverad. Sammantaget ger lösningen 3 g-poäng.

13.		Max 1/1
------------	--	----------------

- | | | |
|--|--|------|
| | Bestämmer minst en av konstanterna korrekt | +1 g |
| | med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($y = 1 + 3 \cos 4x$) | +1 g |

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
14.		Max 2/1
	Godtagbar ansats, t ex bestämmer längden av diagonalen CD	+1 g
	med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer någon relevant vinkel	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,2 km)	+1 vg
15.		Max 0/3
a)	Godtagbar bestämning av volymminskningen (1200 cm^3)	+1 vg
b)	Godtagbar ansats, t ex tecknar ekvationen $\int_0^x (20 - 0,01t) dt = 5000$	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (270 s)	+1 vg
16.		Max 0/2/□
	Godtagbar ansats, t ex anger att $h'(1) = f(1) \cdot g'(1) + f'(1) \cdot g(1)$	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,3)*	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera figurerna och med produktregeln som utgångspunkt hämta nödvändig information och lösa problemet.*
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

*MVG-kvaliteten gällande analys och slutsats utfaller samtidigt som den andra vg-poängen delas ut.

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
17.		Max 0/2/□
	Ställer upp en korrekt ekvation för bestämning av v^*	+1 vg
	med godtagbart svar (1,28)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod genom att ställa upp en ekvation för bestämning av den sökta vinkeln.*
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen omfattar även en motivering av bestämningen av den numeriska lösningen.

*MVG-kvaliteten gällande generella metoder utfaller samtidigt som den första vg-poängen delas ut.

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges på följande sidor. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (2 vg och en MVG-kvalitet)

$$\Delta A = \frac{r^2 \sin V}{2}$$

$$\text{Cirkelsektorns area} = \frac{V \cdot r^2}{2}$$

$$\text{Cirkelsegmentets area} = \frac{V \cdot r^2}{2} - \frac{r^2 \sin V}{2} = \frac{r^2 (V - \sin V)}{2}$$

$$\text{Ekv} = \frac{\frac{r^2 (V - \sin V)}{2}}{\frac{V \cdot r^2}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{r^2 (V - \sin V)}{2} \cdot \frac{2}{V \cdot r^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V - \sin V}{V} = \frac{1}{4}$$

$$V = 1,275 \quad V = -1,275 \text{ ej def.}$$

Svar: $V = 1,275$

Kommentar: Eleven ställer upp en ekvation för den sökta vinkeln och löser ekvationen utan att motivera den numeriska lösningen. Sammantaget ger lösningen 2 vg-poäng och MVG-kvaliteten för användning av generell metod.

Elevlösning 2 (2 vg och två MVG-kvaliteter)

$$A_{\text{triangel}} = \frac{r^2 \cdot \sin v}{2}$$

$$A_{\text{cirkelsektor}} = \frac{vr^2}{2}$$

$$\frac{A_{\text{triangel}}}{A_{\text{cirkelsektor}}} = 0,75$$

$$\frac{\frac{r^2 \cdot \sin v}{2}}{\frac{vr^2}{2}} = 0,75 \Rightarrow \frac{\sin v}{v} = 0,75$$

skriver in funktionerna $y = \frac{\sin v}{v}$ och $y = 0,75$

på räknaren och tar fram skärningspunkten med "Intersection".

$$\text{Svar: } v \approx 1,28$$

Kommentar: Eleven ställer upp en ekvation för den sökta vinkeln och motiverar den numeriska lösningen av ekvationen. Sammantaget ger lösningen 2 vg-poäng och samtliga möjliga MVG-kvaliteter.

Mål för matematik kurs D

Kursplan 2000

Trigonometri (T)

T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

Differential- och integralkalkyl (D)

D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

Övrigt (Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning,

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

Betygskriterier 2000

Kriterier för betyget Godkänt

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänt

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänt

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Kopieringsunderlag för aspektbedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	→		
Matematiska resonemang	→		
Redovisning och matematiskt språk	→		
Summa			

Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevens namn:	Uppgift (⌘-märkt)					Övriga uppgifter
	8	9	10	16	17	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (⌘-märkt)					Övriga uppgifter
	8	9	10	16	17	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevens namn:	Uppgift (⌘-märkt)					Övriga uppgifter
	8	9	10	16	17	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Insamling av provresultat för matematik kurs D

Från och med höstterminen 2011 utför SCB (Statistiska centralbyrån) på uppdrag av Skolverket en totalinsamling av elevresultat både vår- och hösttermin. Information om denna totalinsamling utgår från SCB. Förutom denna totalinsamling genomför provinstitutionen en egen urvalsinsamling. Denna urvalsinsamling ger värdefull information som är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat kommer vi också att kunna publicera en rapport om vårens prov i slutet av augusti. Rapporten kommer att finnas tillgänglig på <http://www.edusci.umu.se/np-pb/np/> Du kan, till din mailbox, få en länk till rapporten direkt när den är klar genom att ange din e-postadress i samband med att du skickar in resultat.

Urvalsinsamlingen

För urvalsinsamlingen gäller att när du genomfört provet och bedömt elevernas arbete så rapporterar du **resultat för elever födda den 9:e, 19:e, 25:e och 29:e i varje månad**. Detta görs på nedanstående webbplats. Sedan besvarar du en **lärarenkät** som finns på samma webbplats och skickar in en tydlig kopia av **elevlösningar för elever födda den 9:e i varje månad**.

1. Gå in på <http://www.edusci.umu.se/np-pb/np/> och klicka på rubriken **Resultatinsamling vt 2012** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp på sidan.
2. Skriv **maga6nu** i rutan för lösenord.
3. Fyll i några bakgrundsdata samt elevresultat för **elever födda den 9:e, 19:e, 25:e, och 29:e i varje månad** för en undervisningsgrupp som genomfört provet.
4. Fyll i lärarenkäten.
5. När du är färdig: tryck på Skicka filen.
6. Skicka en tydlig kopia av den bedömda elevlösningen för **elever födda den 9:e i varje månad** till:

<p>Umeå universitet Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap Nationella prov Att. Monika Kriström 901 87 Umeå</p>
--

Eftersom bakgrundsdata, och kanske även vissa svar i lärarenkäten, skiljer sig åt mellan grupper så måste du göra om proceduren ovan (steg 3-6) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av augusti måste vi ha alla resultat **senast 20 juni 2012**.