*Skolverket*

**Enheten för Pedagogiska Mätningar**
**Umeå Universitet**

PBMaE 00-12

# PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

## Del I: Uppgift 1-10

### Anvisningar

| | |
|---|---|
| Provtid | Enligt lärarens instruktioner. |
| Hjälpmedel | Endast formelblad. |
| Provmaterial | Provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in. |
| Uppgiftsformat | Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer därpå provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. |
| Provet | Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. |
| Betygsgränser | Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd". |

Namn:____________________

Skola:____________________ Klass/program:______________

Födelsedatum År:______ Månad:______ Dag:______

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

**Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3§ sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen till och med december 2010.**

---

Uppgift nr 1 (1197)
2/0

Bestäm $z \cdot \bar{z}$ då $z = 2 + 3i$

---

Uppgift nr 2 (1198)
2/0

Skriv det komplexa talet $\frac{12 + 5i}{2 + 3i}$ på formen $a + bi$

---

Uppgift nr 3 (1199)
2/0

Skriv $-2 + 2i$ på formen $r(\cos v + i \sin v)$ *Endast svar fordras*

---

Uppgift nr 4 (1200)
2/0

Bestäm den lösning till ekvationen $y' = 3x - 4$ som uppfyller villkoret $y(2) = 6$

---

Uppgift nr 5 (1201)
2/0

Ange en tredjegradsekvation som har rötterna $z = 2$, $z = i$ och $z = -i$.

---

Uppgift nr 6 (991)
2/0

Bestäm den allmänna lösningen till $4y'' + y' = 0$

---

Uppgift nr 7 (1210)
1/0 , 0/1 , 0/1

Ett komplext tal $z$ som har beloppet 1 och ett argument som är ungefär 30° är givet.

a) Rita en figur som visar läget av $z$ i det komplexa talplanet.

b) Visa i figuren hur man åskådliggör talet $z^2$

c) Visa också i figuren hur man åskådliggör talet $z^2 - 2$

---

Uppgift nr 8 (971)
0/3

$y = ax^2 + bx$ är en lösning till differentialekvationen $6y'' + 4y' = 4x$.
Bestäm konstanterna $a$ och $b$.

---

Uppgift nr 9 (1202)
0/2

Lös ekvationen $\mathrm{i}(1 - z) = z$

---

Uppgift nr 10 (1203)
0/3

För $z = x + \mathrm{i}y$ gäller att $x \cdot y = 1$. Bestäm det minsta värde $|z|$ kan anta.

---

Skolverket
**Enheten för Pedagogiska Mätningar**
**Umeå Universitet**

PBMaE 00-12

# PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

## Del II: Uppgift 11-15

### Anvisningar

| | |
|---|---|
| Provtid | Enligt lärarens instruktioner. |
| Hjälpmedel | Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad. |
| Provmaterial | Provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in. |
| Uppgiftsformat | Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer därpå provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. |
| Provet | Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. |
| Betygsgränser | Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd". |

Namn:____________________

Skola:____________________ Klass/program:_______________

Födelsedatum År:_______ Månad:_______ Dag:_______

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 11 (1204)
2/0

Lös ekvationen $z^2 - z + 1 = 0$

---

Uppgift nr 12 (1205)
1/0 , 2/0

Ett mjölkpaket som innehåller 15 bakterier/ml ställs in i ett kylskåp. Antalet bakterier $y$ ökar med tiden $x$ dygn. Tillväxthastigheten är i varje ögonblick proportionell mot antalet bakterier.

a) Uttryck detta med en differentialekvation. *Endast svar fordras*

b) Efter 7 dygn tar man ut mjölkpaketet ur kylskåpet. Antalet bakterier/ml är då 50 000. Hur många bakterier/ml fanns i mjölken efter 3 dygn?

---

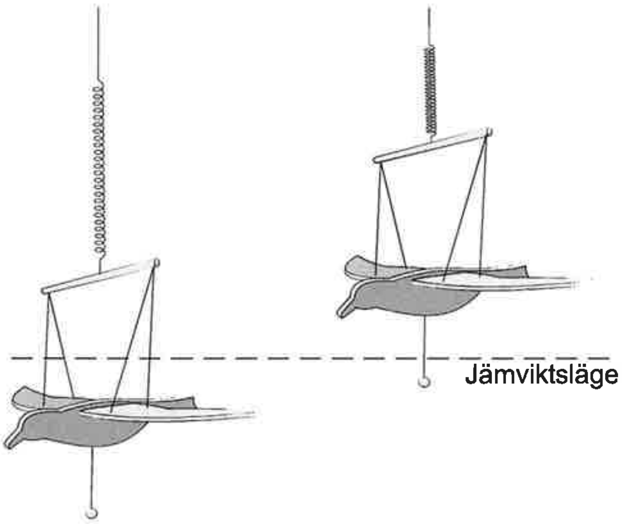
Uppgift nr 13 (1206)
0/3

Grafen till $y = \dfrac{15}{\sqrt{x^2+9}}$ begränsar tillsammans med de positiva koordinataxlarna och linjen $x = 4$ ett område. Beräkna den volym som uppstår då detta område roterar kring $y$-axeln.

---

Uppgift nr 14 (1207)
0/3 , 0/3

En prydnadssak består av en fågel som, upphängd i en mjuk spiralfjäder, svänger upp och ned. I en enkel modell är accelerationen för fågeln i varje ögonblick proportionell mot avståndet $y$ m från jämviktsläget. Detta kan beskrivas med differentialekvationen $y'' = -ky$ där $k > 0$ är en konstant.




a) Fågeln svänger upp och ned 5 gånger på 60 sekunder, och avlägsnar sig maximalt 0,30 m från jämviktsläget. Sätt $y(0) = 0{,}30$ och $y'(0) = 0$ som begynnelsevillkor och bestäm den lösning till $y'' = -ky$ som beskriver rörelsen.

b) Differentialekvationen $y'' + 0{,}01y' + 0{,}27y = 0$ är en bättre modell för den verkliga situationen. Lös differentialekvationen med samma begynnelsevillkor som i a) och förklara varför modellen är bättre.

---

Uppgift nr 15 (1208)
1/0 , 1/0 , 1/0 , 2/0 , 0/1/¤ , 0/2/¤ , 0/2/¤ , 0/2 , 0/1/¤

Funktionen $y = \arcsin x$ definieras av att $y$ är den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$, som uppfyller $\sin y = x$. Värdemängden för $y = \arcsin x$ är således $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

Eftersom det gäller att $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ följer av detta att $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

a) Lös ekvationen $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$

b) Vilken definitionsmängd har funktionen $y = \arcsin x$?

c) Vad blir $\arcsin(\sin 0{,}4) + \arcsin(\sin 0{,}6)$?

d) Rita en enkel figur som visar graferna $y = \arcsin x$ respektive $y = \arcsin(\sin x)$

e) $\arcsin(\sin x)$ är definierad för alla $x$ men vilken är den enklaste formen för detta uttryck om $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ?

f) I ekvationen $\sin y = x$ är vänster led en sammansatt funktion eftersom $y$ är en funktion av $x$. Bestäm derivatan av $y = \arcsin x$ genom att derivera båda leden i ekvationen $\sin y = x$ med avseende på $x$.

Det som vi gjorde för $\arcsin x$ kan vi göra på motsvarande sätt för $\arccos x$. Funktionen $y = \arccos x$ definieras så att $y$ är den vinkel mellan $0$ och $\pi$ som uppfyller $\cos y = x$

g) Bestäm derivatan av funktionen $y = \arccos x$

h) Rita en enkel figur som visar grafen $y = \arccos x$. Vilken definitionsmängd och värdemängd har funktionen?

i) Uttryck $\arccos(\cos x)$ på enklaste form om $x$ uppfyller $\pi < x < 2\pi$

==========================================================

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

==========================================================

Uppgift nr 1 (1197)

**Max 2/0**

| | |
|---|---|
| Korrekt metod (t.ex. korrekt $\bar{z}$) | +1 g |
| med korrekt beräknad produkt (13) | +1 g |

Uppgift nr 2 (1198)

**Max 2/0**

| | |
|---|---|
| Redovisning som anger lämplig metod (t.ex. förlängning med nämnarens konjugat) | +1 g |
| med korrekt genomförda förenklingar $(3-2\mathrm{i})$ | +1 g |

Uppgift nr 3 (1199)

**Max 2/0**

| | |
|---|---|
| Godtagbart svar $\left(\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ | +1-2 g |

Uppgift nr 4 (1200)

**Max 2/0**

| | |
|---|---|
| Korrekt allmän lösning $\left(y=\frac{3x^2}{2}-4x+C\right)$ | +1 g |
| med korrekt konstantbestämning ($C=8$) | +1 g |

Uppgift nr 5 (1201)

**Max 2/0**

| | |
|---|---|
| Lämplig metod (t.ex. faktorsatsen) | +1 g |
| med korrekt svar ($(z-2)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=0$) | +1 g |

Uppgift nr 6 (991)

**Max 2/0**

| | |
|---|---|
| Korrekt löst karakteristisk ekvation $k_1 = 0$ , $k_2 = -\frac{1}{4}$ | +1 g |
| med korrekt allmän lösning av differentialekvation $\left( y = C + De^{-\frac{x}{4}} \right)$ | +1 g |

Uppgift nr 7 (1210)

**Max 1/2**

| | | |
|---|---|---|
| a) | Redovisad godtagbar figur | +1 g |
| b) | Redovisad godtagbar figur | +1 vg |
| c) | Redovisad godtagbar figur | +1 vg |

Uppgift nr 8 (971)

**Max 0/3**

| | |
|---|---|
| Redovisad godtagbar metod | +1-2 vg |
| med korrekt bestämda konstanter $\left( a = \frac{1}{2} \text{ och } b = \frac{-3}{2} \right)$ | +1 vg |

Uppgift nr 9 (1202)

**Max 0/2**

| | |
|---|---|
| Godtagbar metod | +1 vg |
| med korrekt svar $\left( z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right)$ | +1 vg |

Uppgift nr 10 (1203)

**Max 0/3**

| | |
|---|---|
| Godtagbar metod | +1-2 vg |
| med korrekt svar ( $\sqrt{2}$ ) | +1 vg |

Uppgift nr 11 (1204)

**Max 2/0**

| | | |
|---|---|---|
| | Redovisad godtagbar metod | +1 g |
| | med korrekt svar $\left( z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right)$ | +1 g |

Uppgift nr 12 (1205)

**Max 3/0**

| | | |
|---|---|---|
| a) | Korrekt tecknad differentialekvation $(y' = ky)$ | +1 g |
| b) | Redovisad godtagbar metod | +1 g |
| | med korrekt bestämning av antalet bakterier efter 3 dygn (485) | +1 g |

Uppgift nr 13 (1206)

**Max 0/3**

| | | |
|---|---|---|
| | Korrekt uppställt uttryck för volymen med beräkningsbar integral $\left( \text{Cylindervolymen} + \pi \int_3^5 \left( \dfrac{225}{y^2} - 9 \right) \mathrm{d}y \right)$ | +1-2 vg |
| | med numeriskt eller exakt lösning (188,5 *ve* eller $60\pi$ *ve*) | +1 vg |

Uppgift nr 14 (1207)

**Max 2/4**

| | | |
|---|---|---|
| a) | Redovisad korrekt lösning av den karakteristiska ekvationen, $r = \pm i\sqrt{k}$ | +1 g |
| | med godtagbar bestämning av den allmänna lösningen, $y = A\cos t\sqrt{k} + B\sin t\sqrt{k}$ | +1 vg |
| | med i övrigt redovisad godtagbar lösning $(y = 0{,}3\cos\dfrac{\pi}{6}t)$ | +1 vg |
| b) | Redovisad korrekt bestämning av den allmänna lösningen, $y = e^{-0{,}005t}(C_1\cos 0{,}52t + C_2\sin 0{,}52t)$ | +1 g |
| | med redovisad godtagbar bestämning av funktionen, $y = e^{-0{,}005t}(0{,}3\cos 0{,}52t + 0{,}0029\sin 0{,}52t)$ | +1 vg |
| | Godtagbar förklaring ("Modellen är bättre eftersom svängningen blir mindre och mindre, precis som det är i verkligheten.") | +1 vg |

Uppgift nr 15 (1208)

**Max 5/8**

| | | |
|---|---|---|
| a) | Korrekt svar (0,5) | +1 g |
| b) | Godtagbar definitionsmängd $[-1, 1]$ | +1 g |
| c) | Korrekt svar (1) | +1 g |
| d) | Godtagbara grafer | +1-2 g |
| e) | Korrekt svar $(\pi - x)$ | +1 vg |
| f) | Redovisning som tyder på förståelse för problemet med godtagbar bestämning av $y'$ $\left(y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ | +1-2 vg |
| g) | Redovisning som tyder på förståelse för problemet med godtagbar bestämning av $y'$ $\left(y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ | +1-2 vg |
| h) | Godtagbar graf<br>med godtagbar värdemängd $[0, \pi]$ och definitionsmängd $[-1, 1]$ | +1 vg<br>+1 vg |
| i) | Korrekt svar ( $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$ om $(\pi \le x \le 2\pi)$ ) | +1 vg |