Skolverket

Enheten för Pedagogiska Mätningar
Umeå Universitet

PBMaE 01-12

PROV I MATEMATIK KURS E
FRÅN
NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-15

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.* Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1.
Provet	Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd".

Namn:____________________________________

Skola:____________________ Klass/program:____________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3§ sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen till och med utgången av år 2011.

© Skolverket 2001

Uppgift nr 1 (1769)
1/0 , 1/0 , 1/0 , 1/0

Låt $z = 5 + 5i$

a) Markera z i ett komplext talplan *Endast svar fordras*

b) Ange $\bar{z}$ *Endast svar fordras*

c) Bestäm $|z|$ *Endast svar fordras*

d) Skriv z på polär form *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (1858)
2/0

Utgå från talen $z_1 = 1{,}5(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ och $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$
Bestäm $z = z_1 \cdot z_2$ och svara på formen $a + bi$

Uppgift nr 3 (1771)
2/0

Skriv det komplexa talet $\frac{4i}{1+i} + i$ på formen $a + bi$

Uppgift nr 4 (1659)
2/0

Bestäm den allmänna lösningen till $9y'' + y = 0$

Uppgift nr 5 (1773)
2/0

Bestäm $y(1)$ *numeriskt* då $y' = y - x$ och $y(0) = 2$. Använd steglängden 0,5

© Skolverket 2001

Uppgift nr 6 (1774)
1/0 , 0/2

Ekvationen $z^3 - z^2 + 3z - 3 = 0$ är given.

a) Visa att ekvationen har roten $z = 1$

b) Bestäm ekvationens övriga rötter.

Uppgift nr 7 (1775)
0/3

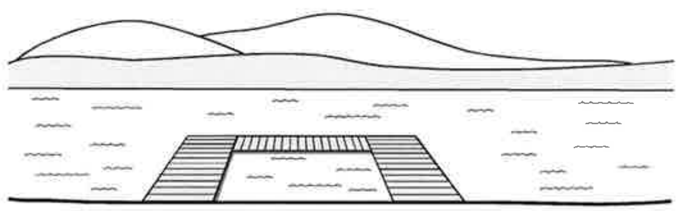
$y = ax^2 + bx$ är en lösning till differentialekvationen $6y'' + 4y' = 4x$.
Bestäm konstanterna a och b.

Uppgift nr 8 (1776)
0/2

Lös ekvationen $3i(1 - z) = z$
Svara på formen $z = a + bi$

Uppgift nr 9 (1777)
0/4

I en vik vill man göra en rektangulär brygganläggning. Den ska bestå av två bryggdelar från land med en tredje bryggdel som sammanbinder ytterändarna (se figur). Bryggdelarna är alla 1,0 meter breda.



Hur stor kan vattenytan innanför bryggdelarna högst bli om bryggorna och vattenytan innanför får uppta 128 m^2 av vikens yta?

© Skolverket 2001

Uppgift nr 10 (1778)
2/0

Bestäm den lösning till ekvationen $y' = 3x - 4$ som uppfyller villkoret $y(2) = 6$

Uppgift nr 11 (1779)
1/0 , 2/0

Ett mjölkpaket som innehåller 15 bakterier/ml ställs in i ett kylskåp. Antalet bakterier ökar med tiden. Tillväxthastigheten är i varje ögonblick proportionell mot antalet bakterier/ml. Låt y vara antalet bakterier/ml efter tiden x dygn i kylskåpet.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver bakterietillväxten.
Endast svar fordras

b) Efter 7 dygn tar man ut mjölkpaketet ur kylskåpet. Antalet bakterier/ml är då 50 000. Hur många bakterier/ml fanns i mjölken efter 3 dygn?

Uppgift nr 12 (1660)
4/0 , 1/1 , 0/1 , 0/2

a) Lös den homogena differentialekvation $y'' + 3y' + 2y = 0$ för vilken det gäller att $y(0) = 2$ och $y'(0) = 4$

b) Bestäm de lösningar till den inhomogena differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 2$ som går genom origo.

c) Motivera varför $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$ då y är den allmänna lösningen till $y'' + 3y' + 2y = 2$

d) Bestäm $\lim\limits_{x \to \infty} y$ då y är den allmänna lösningen till $y'' + 3y' + 2y = n$ där n är ett heltal.

© Skolverket 2001

Uppgift nr 13 (1781)
0/3

Bestäm z då $|z| = 6$ och $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$

Uppgift nr 14 (1782)
0/3

Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}i$ och $x > 0$

Uppgift nr 15 (1783)
2/0 , 0/2 , 0/3

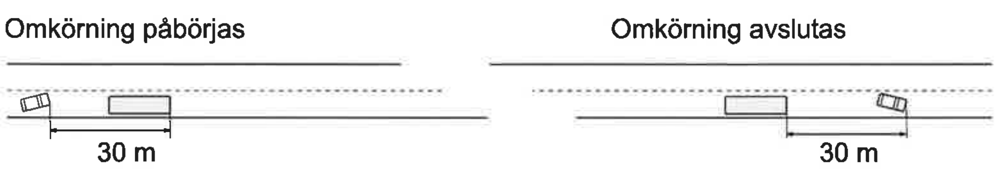
I reklamen för en ny bilmodell anges att accelerationen vid omkörning är anmärkningsvärt bra. Bilen uppges kunna accelerera från 60 km/h (16,7 m/s) till 100 km/h (27,8 m/s) på 10 sekunder på fjärde växeln.

Antag att hastigheten v m/s vid olika tidpunkter under accelerationen kan beskrivas med $v(t) = a\sqrt{t} + b$, där a och b är konstanter och t sekunder är den tid som bilen accelererat.

a) Bestäm konstanterna a och b.

b) Hur lång sträcka behövs enligt denna modell för en omkörning som tar 10 sekunder, om man från början kör 60 km/h.

c) En sådan bil ligger bakom en lastbil som kör 60 km/h och föraren ska köra om på en rak väg med god sikt. Hur lång tid tar omkörningen om bilen från början kör 60 km/h och omkörningen sker enligt bilderna nedan?



© Skolverket 2001

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Uppgift nr 1 (1769)

Max 4/0

a)	Korrekt markering av z i det komplexa talplanet	+1 g
b)	Korrekt svar $(5-5\mathrm{i})$	+1 g
c)	Korrekt svar $(\sqrt{50})$	+1 g
d)	Korrekt svar $\left(z=\sqrt{50}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$	+1 g

Uppgift nr 2 (1858)

Max 2/0

Redovisad godtagbar metod	+1 g
med korrekt svar (3i)	+1 g

Uppgift nr 3 (1771)

Max 2/0

Ansats med förlängning med $(1-\mathrm{i})$	+1 g
med korrekt svar $(2+3\mathrm{i})$	+1 g

Uppgift nr 4 (1659)

Max 2/0

Korrekt löst karakteristisk ekvation $\left(r=\pm\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)$	+1 g
med korrekt allmän lösning till differentialekvationen $\left(y=A\cos\frac{1}{3}x+B\sin\frac{1}{3}x\right)$	+1 g

© Skolverket 2001

Uppgift nr 5 (1773)

	Max 2/0
Redovisad godtagbar metod	+1 g
med godtagbart svar ($y(1) = 4{,}25$ (med Eulers metod))	+1 g

Uppgift nr 6 (1774)

		Max 1/2
a)	Godtagbart verifierande av rot	+1 g
b)	Redovisad godtagbar metod	+1 vg
	med korrekt svar ($\pm i\sqrt{3}$)	+1 vg

Uppgift nr 7 (1775)

	Max 0/3
Redovisad godtagbar metod	+1-2 vg
med korrekt bestämda konstanter $(a = 0{,}5$ och $b = -1{,}5)$	+1 vg

Uppgift nr 8 (1776)

	Max 0/2
Redovisad godtagbar metod	+1 vg
med korrekt svar $(z = 0{,}9 + 0{,}3i)$	+1 vg

Uppgift nr 9 (1777)

	Max 0/4
Godtagbar areafunktion i en variabel	+1 vg
med korrekt derivering och bestämning av maximala arean ($98\,m^2$)	+1-2 vg
med verifiering av maximum	+1 vg

© Skolverket 2001

Uppgift nr 10 (1778)

Max 2/0

	Korrekt allmän lösning $\left(y = \dfrac{3x^2}{2} - 4x + C \right)$	+1 g
	med korrekt svar $\left(y = \dfrac{3x^2}{2} - 4x + 8 \right)$	+1 g

Uppgift nr 11 (1779)

Max 3/0

a)	Korrekt tecknad differentialekvation $(y' = ky)$	+1 g
b)	Redovisad godtagbar metod	+1 g
	med godtagbar bestämning av antalet bakterier/ml efter 3 dygn (485 bakterier/ml)	+1 g

Uppgift nr 12 (1660)

Max 5/4

a)	Korrekt löst karakteristisk ekvation ($r_1 = -1$ och $r_2 = -2$)	+1 g
	med korrekt allmän lösning ($y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$)	+1 g
	Korrekt tecknat ekvationssystem	+1 g
	med korrekt svar ($y = 8e^{-x} - 6e^{-2x}$)	+1 g
b)	Korrekt allmän lösning ($y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + 1$)	+1 g
	med korrekt svar ($y = Ae^{-x} - (A+1)e^{-2x} + 1$)	+1 vg
c)	Godtagbar motivering	+1 vg
d)	Korrekt allmän lösning $\left(y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \dfrac{n}{2} \right)$	+1 vg
	med korrekt gränsvärde $\left(\dfrac{n}{2} \right)$	+1 vg

© Skolverket 2001

Uppgift nr 13 (1781)

Max 0/3

Redovisad godtagbar metod	+1 vg
med ett godtagbart värde på z	+1 vg
med ytterligare ett godtagbart värde på z $\left(\pm(\sqrt{18}-\sqrt{18}\,\mathrm{i})\right)$	+1 vg

Uppgift nr 14 (1782)

Max 0/3

Korrekt tecknad produkt $\left(\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{i}\right)\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{i}\right)\right)$	+1 vg
Godtagbart genomfört bevis	+1-2 vg

Uppgift nr 15 (1783)

Max 2/5

a)	Godtagbar konstantbestämning $\left(a=\frac{40}{3{,}6\cdot\sqrt{10}}\approx 3{,}51 \quad , \quad b=\frac{60}{3{,}6}\approx 16{,}7\right)$	+1-2 g
b)	Godtagbar ansats, t.ex. korrekt tecknad integral $\int_0^{10}(\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{t}}+b)dt$	+1 vg
	Godtagbar algebraisk eller numerisk beräkning med godtagbart svar (241 m)	+1 vg
c)	Godtagbar redovisad algebraisk eller numerisk lösningsmetod	+1-2 vg
	med godtagbart svar (9 s)	+1 vg

© Skolverket 2001