

**PROV I MATEMATIK KURS E  
FRÅN  
NATIONELLA PROVBANKEN**

Del I: Uppgift 1-8

Del II: Uppgift 9-15

**Anvisningar**

- Provtid** Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
- Hjälpmedel** Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E"  
*Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.*  
Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
- Provmaterial** Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar.  
Skriv namn och klass på de papper du lämnar in.  
*Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
- Provet** Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1.  
  
Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges.  
Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
- Betygsgränser** Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänd" ska kraven för "Väl godkänd" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella □-uppgifter.

Namn: _____		
Skola: _____	Klass/program: _____	
Kvinna <input type="checkbox"/>	Man <input type="checkbox"/>	Annat modersmål än svenska <input type="checkbox"/>

**Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3§ sekretesslagen. För allt material som kommer ur provbanken gäller sekretessen tills annat meddelas (minst tio år, till och med utgången av år 2013).**

---

Uppgift nr 1 (2686)

2/0

Skriv  $(3 + 2i)^2$  på formen  $a + ib$ .

---

Uppgift nr 2 (2599)

2/0

Lös ekvationen  $z^2 - 4z + 13 = 0$ .

---

Uppgift nr 3 (2693)

2/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y' + y = 0$  vars graf går genom punkten  $(0, 2)$ .

---

Uppgift nr 4 (2570)

1/0 , 1/0 , 2/0

Låt  $z = 3i$  och  $w = -4$ .

- Markera talen  $z$  och  $w$  i ett och samma komplexa talplan
- Bestäm avståndet mellan  $z$  och  $w$
- Skriv de komplexa talen  $z$  och  $w$  på formen  $re^{i\varphi}$      *Endast svar fordras*

---

Uppgift nr 5 (2814)

3/0

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen  $y'' - 6y' + 34y = 0$ .

---

Uppgift nr 6 (2601)

2/0

Differentialekvationen  $y' = 1 + 4xy$  har en lösning  $y$  som uppfyller villkoret  $y(0) = 2$ .

Bestäm ett närmevärde till  $y(1)$  med hjälp av en numerisk metod, t ex Eulers stegmetod.  
Välj steglängden 0,5.

---

Uppgift nr 7 (2815)

0/2

Lös ekvationen  $i(3 - z) = z$  och svara på formen  $a + ib$ .

---

Uppgift nr 8 (2568)

0/3

Bestäm konstanten  $a$  så att funktionen  $f(x) = e^{x^3+ax^2}$  får en extrempunkt då  $x = 2$ .  
Avgör om extrempunkten är en maximi- eller minimipunkt.

Uppgift nr 9 (2600)

3/0

Lös differentialekvationen  $y'' - 10y' + 21y = 0$  med begynnelsevillkoren  $y(0) = 0$  och  $y'(0) = 4$ .

---

Uppgift nr 10 (2571)

1/0 , 2/0 , 1/0

Storskarv är en fågelart som oftast lever vid kusten. Många anser att dessa fåglar konkurrerar med människorna om fisken och de kan dessutom täcka hela öar med sin avföring. I Sverige har det skett en mycket kraftig ökning av antalet storskarvar under en 50-årsperiod. 1949 fanns det endast två storskarvar och 1999 fanns det ca 50 000 stycken.

Enligt en matematisk modell var ökningstakten (antal storskarvar/år) under dessa år proportionell mot antalet storskarvar.

Låt  $N$  beteckna antalet storskarvar  $t$  år efter 1949.

- Teckna en differentialekvation som beskriver ökningen av antalet storskarvar.
- Bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoren ovan.

En del fiskare och skärgårdsbor är bekymrade för hur vår skärgård kommer att påverkas om ökningen av antalet storskarvar fortsätter på samma sätt.

- Vilket år kommer vi att ha ungefär lika många storskarvar som det finns människor i Sverige idag (ca 9 miljoner), om vi antar att ökningen kommer att fortsätta enligt samma modell?

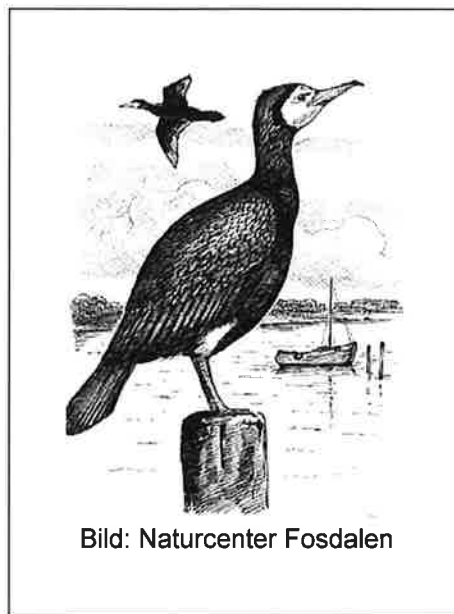


Bild: Naturcenter Fosdalen

Uppgift nr 11 (2602)

0/1 , 0/2 , 0/1

- a) Rita grafen till funktionen  $y = \sqrt{x-1}$  i ett koordinatsystem. Rita även in en linje,  $x = a$ , så att linjen, grafen och  $x$ -axeln tillsammans avgränsar ett begränsat område.
- b) Låt området rotera kring  $x$ -axeln. Ställ upp en integral för volymen av den rotationskropp som uppkommer.
- c) Bestäm  $a$  så att rotationskroppens volym blir  $8\pi$  volymsenheter.

---

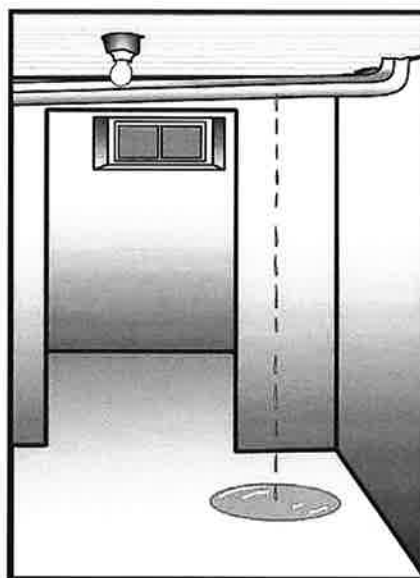
Uppgift nr 12 (2816)

0/3

Ett vattenrör i taket i en källare läcker vatten med  $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

Antag att vattenpölen som bildas på golvet är cirkulär med den konstanta höjden  $0,2 \text{ cm}$ . Avdunstningen är försumbar.

Hur snabbt ökar pölens radie då radien är  $40 \text{ cm}$ ?



---

Uppgift nr 13 (2579)

0/2 , 0/1/□

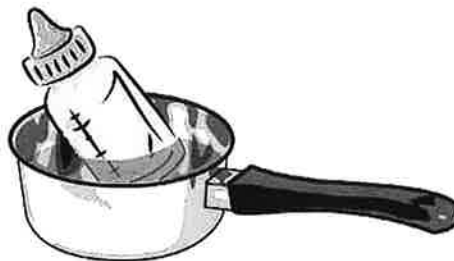
Antag att  $z$  är ett komplext tal och att  $w$  är konjugatet till  $z$ .

- a) Finn ett  $z$  sådant att  $z \cdot w = 2$ .
- b) Avgör om det går att hitta ett  $z$  sådant att  $\frac{z}{w} = 2$ .

Uppgift nr 14 (2575)

1/1 , 0/3

Hamid sitter barnvakt och ska värma välling i en flaska. Vällingen har från början temperaturen  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$  och ska värmas till  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$  som är en lämplig temperatur för barnet. Han sänker ner flaskan i en kastrull med kokande vatten som håller den konstanta temperaturen  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Vid tiden  $t$  minuter efter att flaskan sänkts ner i vattnet, är vällingens temperatur  $T\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



Vällingens temperatur stiger med en hastighet ( $^{\circ}\text{C}/\text{min}$ ) som är proportionell mot differensen mellan vattnets och vällingens temperatur. Proportionalitetskonstantens värde är  $0,05$ .

- a) Teckna en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver ökningen av vällingens temperatur.
- b) Beräkna hur många minuter det tar att värma vällingen till  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

---

Uppgift nr 15 (2574)

2/4/□

**Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:**

- hur långt du kommit i din undersökning
- hur generell din lösning är
- hur väl du formulerat din slutsats
- hur väl du motiverat din slutsats
- hur väl du redovisat ditt arbete
- hur väl du använt det matematiska språket

- Din uppgift är att finna alla komplexa tal  $z$  som ger reella värden på  $z^4$ . Motivera varför just dessa tal och inga andra ger reella värden på  $z^4$ .

I denna värdetabell ser du värdet på  $z^4$  för några olika värden på  $z$ . För vissa värden på  $z$  blir  $z^4$  reellt.

$z$	$z^4$
$1 + i$	$-4$
$3$	$81$
$4i$	$256$
$2 + i$	$-7 + 24i$
$e^{i\pi}$	$1$
$2 - 2i$	$-64$
$-3 + i$	$28 - 96i$
$3 + 3i$	$-324$
$2e^{i\frac{\pi}{2}}$	$16$

*Om du vill kan du börja din undersökning på något eller några av följande sätt:*

- \* Finn några fler komplexa tal  $z$  som ger reella värden på  $z^4$ .
- \* Rita i ett komplext talplan sådana  $z$  som ger reella värden på  $z^4$ .
- \* Skriv  $z$  på formen  $z = x + iy$ , där  $x$  och  $y$  är reella tal, och förenkla  $(x + iy)^4$ .
- \* Skriv  $z$  och  $z^4$  på polär form.

---

---

## Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

---

---

### Uppgift nr 1 (2686)

**Max 2/0**

Redovisad godtagbar metod  
med korrekt svar ( $5 + 12i$ )

+1 g

+1 g

### Uppgift nr 2 (2599)

**Max 2/0**

Redovisad godtagbar lösning ( $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 2 - 3i$ )

+1-2 g

### Uppgift nr 3 (2693)

**Max 2/0**

Redovisad godtagbar allmän lösning,  $y = Ce^{-x}$   
med korrekt svar ( $y = 2e^{-x}$ )

+1 g

+1 g

### Uppgift nr 4 (2570)

**Max 4/0**

a) Korrekt markerade punkter/vektorer

+1 g

b) Redovisad godtagbar bestämning av avståndet (5 längdenheter)

+1 g

c) Korrekt svar  $\left( w = 4e^{i\pi}, z = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$

+1-2 g

### Uppgift nr 5 (2814)

**Max 3/0**

Redovisad korrekt karakteristisk ekvation,  $r^2 - 6r + 34 = 0$   
med redovisad godtagbar lösning av karakteristisk ekvation,  $r = 3 \pm 5i$   
med redovisad godtagbar allmän lösning ( $y = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ )

+1 g

+1 g

+1 g



Uppgift nr 6 (2601)

**Max 2/0**

Redovisad godtagbar metod  
med korrekt svar (5,5)

+1 g  
+1 g

Uppgift nr 7 (2815)

**Max 0/2**

Redovisad godtagbar metod  
med korrekt svar ( $z = 1,5 + 1,5i$ )

+1 vg  
+1 vg

Uppgift nr 8 (2568)

**Max 0/3**

Redovisad godtagbar derivering av  $f(x)$   
med redovisad godtagbar bestämning av konstanten  
med godtagbar verifiering av extrempunktens  
karaktär ( $a = -3$ , minimipunkt)

+1 vg  
+1 vg  
+1 vg

Uppgift nr 9 (2600)

**Max 3/0**

Redovisad godtagbar bestämning av allmän lösning,  $y = Ae^{3x} + Be^{7x}$   
med i övrigt redovisad godtagbar lösning ( $y = -e^{3x} + e^{7x}$ )

+1 g  
+1-2 g

Uppgift nr 10 (2571)

**Max 4/0**

- a) Redovisad godtagbart tecknad differentialekvation  $\left(\frac{dN}{dt} = kN\right)$  +1 g
- b) Redovisad godtagbar lösning av differentialekvationen med  
begynnelsevillkor,  $N(t) = 2e^{kt}$  +1 g  
med i övrigt redovisad godtagbar lösning ( $N(t) = 2e^{0,2025t}$ ) +1 g
- c) Redovisad godtagbar lösning (År 2025) +1 g

Uppgift nr 11 (2602)

**Max 0/4**

- a) Godtagbart ritat koordinatsystem med graf och linje +1 vg
- b) Godtagbart tecknat uttryck för rotationskroppens volym  

$$\left( V = \int_1^a \pi(\sqrt{x-1})^2 dx \right)$$
 +1-2 vg
- c) Godtagbar bestämning av konstanten ( $a = 5$ ) +1 vg

Uppgift nr 12 (2816)

**Max 0/3**

- Redovisad godtagbar ansats, t ex ställt upp  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$  eller motsvarande för numerisk lösning +1 vg  
 med i övrigt redovisad godtagbar lösning (0,1 cm/s) +1-2 vg

Uppgift nr 13 (2579)

**Max 0/3/□**

- a) Redovisad godtagbar metod +1 vg  
 med något korrekt svar ( $z = 1 - i$ ) +1 vg
- b) Redovisad godtagbar ansats, t ex prövar något specialfall och formulerar en korrekt hypotes ("Nej, det går inte.") eller påbörjar en generell lösning +1 vg
- Eleven löser uppgiften med hjälp av en generell metod och drar en korrekt slutsats. Eleven redovisar en klar tankegång med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. □

Uppgift nr 14 (2575)

**Max 1/4**

- a) Korrekt begynnelsevillkor ( $T(0) = 8$ ) +1 g  
 Korrekt uppställd differentialekvation ( $T' = 0,05(100 - T)$ ) +1 vg
- b) Redovisad godtagbar ansats, t ex bestämning av allmän lösning  
 $T(t) = 100 + C \cdot e^{-0,05t}$  eller motsvarande för numerisk metod +1-2 vg  
 med i övrigt redovisad godtagbar lösning (7 minuter) +1 vg

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Totalpoäng
	Lägre	→	Högre	
<p><b>Metodval och genomförande</b></p> <p><i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.</i></p> <p><i>Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	<p>Eleven <i>påbörjar</i> en undersökning genom att exempelvis utgå från något av de fyra föreslagna tillvägagångssätten.</p> <p>T ex hittar ytterligare ett <math>z</math> som ger reellt <math>z^4</math> eller ritar in i ett komplext talplan de <math>z</math> ur tabellen som ger reellt värde på <math>z^4</math>.</p> <p>(1/0)</p>	<p>Eleven <i>genomför</i> en undersökning som <i>möjliggör</i> en formulering av <i>delar</i> av den fullständiga slutsatsen.</p> <p>T ex identifierar något relevant mönster hos de markerade punkterna i det komplexa talplanet genom att rita in linjer eller gör en korrekt förenkling av <math>(x + iy)^4</math>.</p> <p>(1/1)</p>	<p>Eleven <i>genomför</i> en undersökning som <i>möjliggör</i> en formulering av den <i>fullständiga</i> slutsatsen.</p> <p>T ex finner ett korrekt villkor för att imaginärdelen av <math>z^4</math> ska vara noll (<math>4x^3y - 4xy^3 = 0</math> eller <math>\sin 4v = 0</math>) med hjälp av en algebraisk metod.</p> <p>(1/2)</p>	1/2
<p><b>Matematiska resonemang</b></p> <p><i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</i></p>	<p>Eleven <i>troliggör</i> och <i>formulerar delar</i> av den fullständiga slutsatsen.</p> <p>T ex "Om man tittar i tabellen så ser man att om <math>z</math> är reellt så blir <math>z^4</math> reellt".</p> <p>(1/0)</p>	<p>Eleven <i>troliggör</i> och <i>formulerar</i> den <i>fullständiga</i> slutsatsen</p> <p>eller <i>bevisar</i> och <i>formulerar delar</i> av den fullständiga slutsatsen.</p> <p>(1/1)</p>		1/1
<p><b>Redovisning och matematiskt språk</b></p> <p><i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>			<p>Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är lämpligt.</p> <p>(0/1)</p>	0/1
<b>Summa</b>				2/4

Eleven bevisar och formulerar den fullständiga slutsatsen (Om  $z = a + ib$  så måste  $a = 0, b = 0$  eller  $a = \pm b$  för att  $z^4$  ska vara reellt). Eleven redovisar en klar tankegång med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

□

## Elevlösning 1 (2g och 1 vg)

$$z = a + bi$$

$$z^4 = z^2 \cdot z^2 = (a + bi)^2 (a + bi)^2$$

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + bi^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$z^4 = (a^2 + 2abi - b^2)(a^2 + 2abi - b^2) \rightarrow$$

$$a^2(a^2 + 2abi - b^2) + 2abi(a^2 + 2abi - b^2)$$

$$- b^2(a^2 + 2abi - b^2) \rightarrow a^4 + 2a^3bi - a^2b^2$$


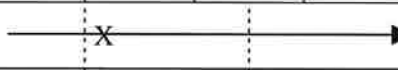
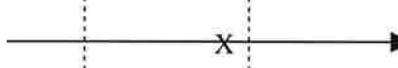
$$+ 2a^3bi + 4a^2b^2i^2 - 2ab^3i - b^2a^2 - 2ab^3i + b^4$$

$$\rightarrow a^4 + 4a^3bi - 6a^2b^2 - 4ab^3i + b^4$$

insättning av  $a=2$  ger

$$16 + 32bi - 24b^2 - 8b^3i + b^4$$

Svar: Om  $b=0$  blir talet  $z^4$   
reellt

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		1/1	Eleven genomför en undersökning som möjliggör en formulering av delar av den fullständiga slutsatsen, även om eleven inte lyckas utföra alla steg helt korrekt.
Matematiska resonemang		1/0	Eleven troliggör och formulerar delar av den fullständiga slutsatsen.
Redovisning och matematiskt språk		0/0	Redovisningen är mycket kortfattad och det är svårt att förstå hur eleven kommer fram till slutsatsen (sista steget).
<b>Summa</b>		<b>2/1</b>	

Elevlösning 2 (2g och 2 vg)

Tabellen:

$z$	$z^4$
$1+i$	$-4$
$3$	$81$
$4i$	$256$
$2+i$	$-7+24i$
$e^{i\pi} = -1$	$1$
$2-2i$	$-64$
$-3+i$	$28-96i$
$3+3i$	$-324$
$2e^{i\pi/2}$ $= 2i$	$16$

Det verkar som om  $z = \text{reellt}$  så blir  $z^4$  reellt

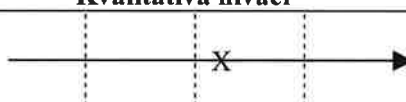


Exempel:  $z = 2 \rightarrow z^4 = 2^4 = 16$  samt

Om  $z = i$  blir  $z^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = -1 \cdot -1 = 1$  som också är reellt

$z = x + 0i = x \rightarrow z^4 = x^4$  som är reellt

$z = 0 + iy = iy \rightarrow z^4 = (iy)^4 = i^4 \cdot y^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot y^4 = -1 \cdot -1 \cdot y^4 = y^4$  och det är reellt

Svar: Om  $z = x$  eller  $z = iy$  så är  $z^4$  reellt

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		1/1	Eleven går ett steg längre än bara test av specialfall (som bara skulle ha gett 1/0).
Matematiska resonemang		1/1	Elevens undersökning av vad som händer när $x=0$ och när $y=0$ är ett bevis av delar av den fullständiga slutsatsen.
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Redovisningen är mycket kortfattad men det är lätt att förstå vad eleven har gjort.
<b>Summa</b>		<b>2/2</b>	

Elevlösning 3 (2g och 3 vg)

$$(x + yi)^4$$

$$r^4 (\cos 4v + i \sin 4v)$$

$$\sin 4v = 0$$

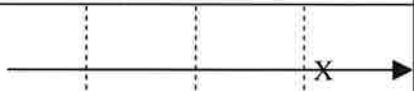

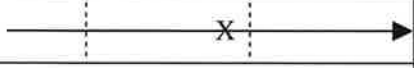
$v$  är då antingen  $45^\circ$  el  $90^\circ$

$$\tan v = \frac{y}{x} \quad \tan 90^\circ \text{ odefinierad}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

alltså är  $z$  alltid reellt när

$$x = y$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		1/2	Metoden möjliggör en formulering av den fullständiga slutsatsen, även om eleven inte lyckas genomföra alla steg helt korrekt.
Matematiska resonemang		1/1	Beviset (som visar delar av den fullständiga slutsatsen) är mycket kortfattat och precis över gränsen till vad som krävs för att få denna poäng.
Redovisning och matematiskt språk		0/0	Lösningen är kortfattad och svår att följa.
<b>Summa</b>		<b>2/3</b>	

Elevlösning 4 (2g, 4 vg och □)

de Moivres formel

$$z^4 = r^4 (\cos 4v + i \sin 4v)$$

Om  $z^4$  ska vara reellt så måste imaginärdeLEN vara noll. Därmed måste  $i \sin 4v = 0$  och alltså  $\sin 4v = 0$ .

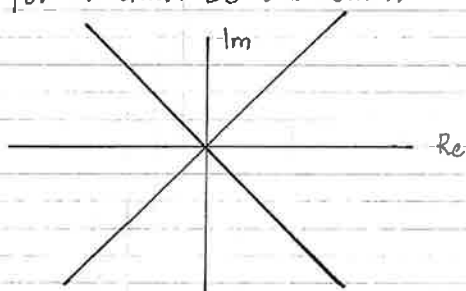
I enhetscirkeln är  $\sin v = 0$  när

$$v = 0 + n2\pi \text{ och när } v = \pi + n2\pi$$

$$\sin 4v = 0 \text{ när } v = 0 + n\frac{\pi}{2} \text{ och}$$

$$v = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$$

I ett koordinatsystem är följande vinklar för  $v$  tillåtna om  $\sin 4v = 0$



För de "diagonala" linjerna gäller att  $a=b$  inom  $(a+bi)$

För de linjer som följer axlarna gäller att

$$a=0 \text{ eller } b=0$$

Svar  $z^4 = (a+bi)^4$  är reellt om  $a=b$

$$a=0$$

$$\text{eller } b=0$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	_____ X →	1/2	Metoden möjliggör en formulering av den fullständiga slutsatsen.
Matematiska resonemang	_____ X →	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	_____ X →	0/1	
<b>Summa</b>		<b>2/4</b>	

**Kommentar:** Eleven visar □-kvalitet även om det matematiska språket ibland har brister (t ex vid resonemang av vinklarnas storlek då  $v$  används för olika vinklar) och  $a = -b$  inte finns med i det slutgiltiga svaret (finns dock med både i resonemang och förtydligande bild).