Skolverket

Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Umeå universitet

PBMaE 08-12

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-11
Del II: Uppgift 12-17

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 120 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande, även symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 17 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänd" ska kraven för "Väl godkänd" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn:______________________________

Skola:__________________ Klass/program:____________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Prov och provmaterial som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 4 kap. 3 § sekretesslagen. Avsikten är att prov och provmaterial ur provbanken ska kunna återanvändas genom att lösenordskydda ingående material. Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

Uppgift nr 1 (3316)
1/0

Fyra komplexa tal utgör hörn i en kvadrat i det komplexa talplanet.
Tre av talen är $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + 2i$ och $z_3 = -2 + 2i$. Vilket är det fjärde talet?

Endast svar fordras

Uppgift nr 2 (3314)
1/0 , 1/0

För ett komplext tal z gäller $\operatorname{Re} z = -3$ och $\operatorname{Im} z = 4$

a) Ange $\bar{z}$ *Endast svar fordras*

b) Beräkna $|z|$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 3 (2587)
2/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = e^x$ vars graf går genom origo.

Uppgift nr 4 (3534)
2/0

Skriv talet $\dfrac{7-4i}{1-2i}$ på formen $a + bi$

Uppgift nr 5 (3322)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$

Uppgift nr 6 (3535)
2/0

Lös ekvationen $(z-3)(z^2-2z+3)=0$

Uppgift nr 7 (4502)
2/0

Differentialekvationen $y'=x+y$ med begynnelsevärdet $y(0)=1$ är given. För att bestämma ett ungefärligt värde på $y(1)$ kan man använda en numerisk metod.

Bestäm med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers metod, ett närmevärde till $y(1)$. Använd steglängden 0,5

Uppgift nr 8 (2205)
1/1

Beräkna värdet på konstanten k, så att $y=x^2\ln x$ blir en lösning till differentialekvationen $xy'+ky=x^2$

Uppgift nr 9 (3332)
0/1 , 0/1

Ett komplext tal z divideras med det komplexa talet i.

a) Bestäm vilket samband som gäller mellan absolutbeloppen för z och kvoten $\frac{z}{\mathrm{i}}$

b) Bestäm vilket samband som gäller mellan argumenten för z och kvoten $\frac{z}{\mathrm{i}}$

Uppgift nr 10 (4724)
0/2 , 0/1/¤

I denna uppgift ska du studera ekvationer av typen $z^n = 1$, där n är ett positivt heltal.

a) Bestäm ett värde på n så att $z = \cos 40° + i \sin 40°$ blir en rot till ekvationen.

b) Undersök om det finns fler positiva heltal n så att $z = \cos 40° + i \sin 40°$ blir en rot till ekvationen $z^n = 1$

Uppgift nr 11 (4505)
0/2/¤

Newtons avsvalningslag ges av uttrycket $\frac{dT}{dt} = k(T_{OM} - T),\ k > 0$
Denna differentialekvation kan användas för att beskriva både uppvärmning och avsvalning av ett föremål, som är placerat i en omgivning med den konstanta temperaturen T_{OM} där T är föremålets temperatur vid tidpunkten t sekunder och k är en konstant.

Undersök differentialekvationen och förklara hur det kan komma sig att samma ekvation kan användas för att beskriva både uppvärmning och avsvalning.

Uppgift nr 12 (3033)
1/0 , 2/0

Vid framställning av yoghurt används mikroorganismer för att ge yoghurten dess smak och konsistens. Ett företag som tillverkar yoghurt köper in lösningar med låg koncentration av mikroorganismer. För att lösningen ska kunna användas måste koncentrationen av mikroorganismer vara högre. Därför används en process där koncentrationen ökas.

Processen kan beskrivas med hjälp av differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = 0{,}042 \cdot y$

där y g/liter är koncentrationen av mikroorganismer och t timmar är tiden från processens start.

a) Tolka differentialekvationen i ord.

När processen startar är koncentrationen av mikroorganismer 2,0 g/liter. Om koncentrationen av mikroorganismer blir för hög, bildas oönskade biprodukter. Man måste därför avbryta processen, när koncentrationen uppgår till 52 g/liter.

b) Efter hur lång tid måste processen avbrytas?

Uppgift nr 13 (3326)
0/2

För funktionen f gäller att det finns en funktion g så att, $f'(x) = g(x)$ och $f(x) = g'(x)$

Bestäm $f(x)$

Uppgift nr 14 (4725)
0/3

Festfixarfirman Skoj & Ploj har tröttnat på att blåsa ballonger så de har köpt en kompressor som får blåsa istället. Ballongerna kan anses vara sfäriska och de ska fyllas med 5,5 l luft. Vid den tidpunkt då radien är 6,0 cm ökar ballongens radie med 5,8 cm/s.

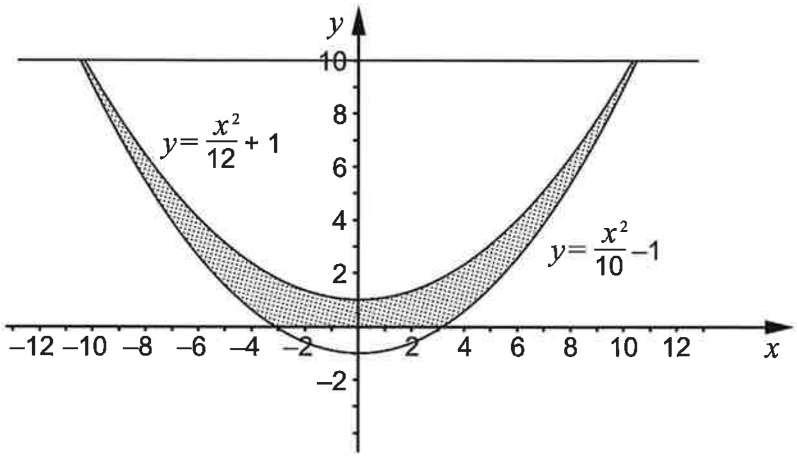
Med vilken hastighet förändras ballongens volym vid denna tidpunkt?

Uppgift nr 15 (3596)
0/3

Vid ett glasbruk produceras glasskålar med höjden 10 cm genom att glasmassa hälls i en form med plan botten som sedan sätts i rotation.

Skålens insida och utsida kommer då att följa den form man får om man roterar den del av kurvorna $y = \dfrac{x^2}{12} + 1$ och $y = \dfrac{x^2}{10} - 1$ som ligger mellan x-axeln och linjen $y = 10$ kring y-axeln.

Skålen får då ett utseende enligt den gråmarkerade figuren nedan.



Hur mycket glasmassa behövs för att tillverka skålen?

Uppgift nr 16 (4504)
0/2/¤

Det är givet att $\dfrac{y'}{y} = 5$

Härled ett uttryck för kvoten $\dfrac{y^{(n)}}{y}$ där $y^{(n)}$ är n:e derivatan av y

---

Uppgift nr 17 (4726)
3/3/¤

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:

- hur många påståenden du formulerat
- hur väl du formulerat dina påståenden
- hur många påståenden du bevisat
- hur väl du genomfört dina bevis
- hur väl du redovisat ditt arbete
- hur väl du använder det matematiska språket

Det komplexa talet z ges av $z(a)=\dfrac{a+\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}$ där a är ett reellt tal. Du ska undersöka hur z beror på värdet av a. I tabellerna nedan redovisas värdet av z för några värden på a.

a	$z(a)$
7	$\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\mathrm{i}$
-7	$\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\mathrm{i}$
5	$\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$
-5	$\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$
2	
-2	

a	$z(a)$
4	$\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\mathrm{i}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\mathrm{i}$
$\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$
$\frac{1}{7}$	$-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\mathrm{i}$
3	
$\frac{1}{3}$	

- Beräkna de z-värden som saknas i tabellerna. Rita in alla z-värden i ett och samma komplexa talplan.

- Genom att studera tabellerna och titta på hur z-värdena ligger i det komplexa talplanet kan man förmoda att vissa påståenden för $z(a)$ är sanna för alla reella a eller för alla reella $a \neq 0$. (Jämför till exempel $z(a)$ med $z(-a)$.)

  Formulera två påståenden som är sanna för alla reella a eller för alla reella $a \neq 0$, antingen i ord eller algebraiskt.

- Bevisa de påståenden som du har formulerat.

==

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

==

Uppgift nr 1 (3316)

Max 1/0

Korrekt svar ($z_4 = -2 - \mathrm{i}$)	+1 g

Uppgift nr 2 (3314)

Max 2/0

a)	Korrekt svar ($\bar{z} = -3 - 4\mathrm{i}$)	+1 g
b)	Korrekt svar ($\lvert z \rvert = 5$)	+1 g

Uppgift nr 3 (2587)

Max 2/0

Redovisad godtagbar lösning av ekvationen, $y = \mathrm{e}^x + C$	+1 g
med korrekt svar $(y = \mathrm{e}^x - 1)$	+1 g

Uppgift nr 4 (3534)

Max 2/0

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. förlänger med nämnarens konjugat	+1 g
med korrekt svar ($3 + 2\mathrm{i}$)	+1 g

Uppgift nr 5 (3322)

Max 3/0

Redovisad godtagbar bestämning av en allmän lösning till differentialekvationen, $y = (Cx + D)\mathrm{e}^{2x}$	+1 g
med en korrekt bestämd konstant	+1 g
med ytterligare en korrekt bestämd konstant och korrekt svar ($y = x \cdot e^{2x}$)	+1 g

Uppgift nr 6 (3535)

Max 2/0

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. löser andragradsekvationen	+1 g
med redovisad bestämning av alla rötter ($z_1 = 3, z_2 = 1 + i\sqrt{2}, z_3 = 1 - i\sqrt{2}$)	+1 g

Uppgift nr 7 (4502)

Max 2/0

Redovisad godtagbar metod	+1 g
med korrekt svar utifrån vald metod ($y(1) = 2{,}5$)	+1 g

Uppgift nr 8 (2205)

Max 1/1

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. bestämmer derivatan av y	+1 g
med korrekt bestämning av k ($k = -2$)	+1 vg

Uppgift nr 9 (3332)

Max 0/2

a)	Redovisad godtagbar bestämning av sambandet mellan absolutbeloppen (Absolutbeloppen är samma)	+1 vg
b)	Redovisad godtagbar bestämning av sambandet mellan argumenten (Argumentet minskar med 90° när z delas med i)	+1 vg

Uppgift nr 10 (4724)

Max 0/3/¤

a) Redovisad godtagbar ansats, t ex anger att
$(\cos 40° + i \sin 40°)^n = \cos n \cdot 40° + i \sin n \cdot 40°$ +1 vg
med korrekt bestämning av något värde på n för vilket
$(\cos 40° + i \sin 40°)^n = 1$ ($n = 9$) +1 vg

b) Bestämmer ytterligare något värde på n för vilket $(\cos 40° + i \sin 40°)^n = 1$ +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att det givna villkoret är uppfyllt då $n = 9k$, där k är ett positivt heltal
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppgift nr 11 (4505)

Max 0/2/¤

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. undersöker differentialekvationen med specialfall +1 vg
med godtagbart resonemang, t.ex. baserat på specialfall, om varför samma differentialekvation kan användas för att beskriva både uppvärmning och avsvalning +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera differentialekvationen, t.ex. genom att utifrån ett generellt resonemang dra slutsatsen att då $T_{\text{OM}} - T < 0$ sker en avsvalning och att uppvärmning sker då $T_{\text{OM}} - T > 0$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk

Uppgift nr 12 (3033)

Max 3/0

a) Godtagbar tolkning (t.ex. ”Koncentrationen av mikroorganismer ökar med en hastighet som är 4,2 % av den aktuella koncentrationen”) +1 g

b) Godtagbar allmän lösning, $y = C \cdot e^{0,042t}$ +1 g
med godtagbart svar (77 timmar) +1 g

Uppgift nr 13 (3326)

Max 0/2

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. korrekt tecknad differentialekvation, $f''(x) - f(x) = 0$ +1 vg
med korrekt lösning ($f(x) = A \cdot e^{x} + B \cdot e^{-x}$) +1 vg

Uppgift nr 14 (4725)

Max 0/3

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. använder kedjeregeln	+1 vg
med godtagbart tecknad derivata, $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$	+1 vg
med godtagbart svar (2600 cm^3/s)	+1 vg

Uppgift nr 15 (3596)

Max 0/3

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. tecknar integralen för en rotationsvolym	+1 vg
med i övrigt redovisad godtagbar lösning och svar (358 cm^3)	+1-2 vg

Uppgift nr 16 (4504)

Max 0/2/¤

Redovisad godtagbar ansats, t.ex. löser differentialekvationen $y' = 5y$	+1 vg
med godtagbar fortsättning, t.ex. finner att $\frac{y''}{y} = 25$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra den generella slutsatsen att kvoten mellan funktionens n:e derivata och y är $y^{(n)} / y = 5^n$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppgift nr 17 (4726)

Max 3/3/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** →		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven kompletterar tabellerna **1 g**	Eleven ritar in z-värdena i det komplexa talplanet. **2 g**		**2/0**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*	Eleven formulerar något relevant påstående om z, även om det inte gäller alla värden på a. **1 g**	Eleven formulerar två generella påståenden om z **1 g och 1 vg**	Eleven formulerar två generella påståenden om z och bevisar godtagbart ett av dessa påståenden. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	**0/1**
Summa				**3/3**

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	korrekt bevisa två av de generella påståendena
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och använda ett i huvudsak korrekt matematiskt språk

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 11.

Elevlösning 1 (2 vg)

$\frac{dT}{dt} = k(T_{om} - T)$ $k > 0$

T_{om} = Omgivande temperatur t.ex 20°

T = föremålets temperatur t.ex kokande vatten 100°

$\frac{dT}{dt} = k(20 - 100) = -80k$ derivatan negativ, avtagande

större än 0

Om föremålets temperatur är 0° så blir det

$\frac{dT}{dt} = k(20 - 0) = 20k$ derivatan positiv, stigande

större än 0

Kommentar: Eleven visar med två specialfall att differentialfunktionen fungerar både vid uppvärmning och vid avsvalning.

Elevlösning 2 (2 vg och en av MVG-kvaliteterna)

$\frac{dT}{dt} = k(T_{om} - T)$ $k > 0$

OM $T_{om} > T$ KOMMER $\frac{dT}{dt}$ ATT VÄXA

UPPHETTNING EFTERSOM $k(T_{om} - T) > 0$

OM $T_{om} < T$ KOMMER $\frac{dT}{dt}$ ATT MINSKA

AVSVALNING EFTERSOM $k(T_{om} - T) < 0$

Kommentar: Eleven visar generellt att derivatan är positiv respektive negativ beroende på omgivande temperatur och starttemperatur. Lösningen uppfyller därmed MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Lösningen är mycket kortfattad, den är välstrukturerad men det matematiska språket är inte korrekt, t.ex. säger eleven att $\frac{dT}{dt}$ växer och minskar när den är negativ och positiv. Sammantaget bedöms inte lösningen uppfylla MVG-kvaliteten för redovisning och matematiskt språk.

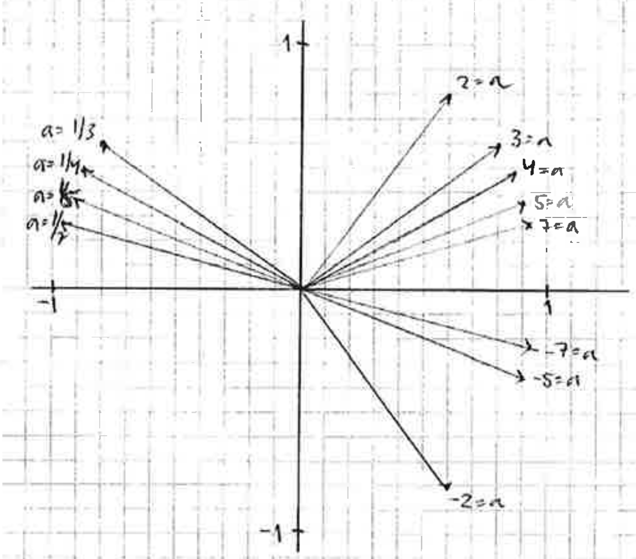
Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17.

Elevlösning 1 (3 g)

Tabellen visar värdena. Mina uträkningar fick jag via att stoppa in de reella värdena i det komplexa talet $z(a) = \frac{a+i}{a-i}$

a	$z(a)$
7	$\frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$
-7	$\frac{24}{25} - \frac{7}{25}i$
5	$\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$
-5	$\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$
2	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
-2	$\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

a	$z(a)$
4	$\frac{15}{17} + \frac{8}{17}i$
1/4	$-\frac{15}{17} + \frac{8}{17}i$
1/5	$-\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$
1/7	$-\frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$
3	$\frac{8}{10} + \frac{6}{10}i$
1/3	$-\frac{8}{10} + \frac{6}{10}i$



Som man kan se på det komplexa talplanet så är $z(a) \approx z(-a)$ exakt detsamma med undantag att de med $-a$ hamnar i fjärde kvadranten som en spegelbild.

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/0	
Redovisning och matematiskt språk			
Summa		**3/0**	

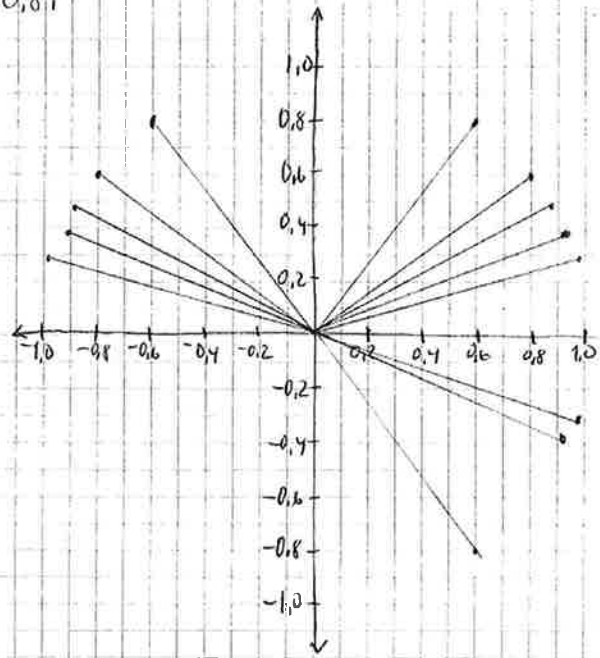
Elevlösning 2 (3 g)

$z(2) = \frac{2+i}{2-i} = 0,6 + 0,8i$

$z(-2) = 0,6 - 0,8i$

$z(3) = 0,8 + 0,6i$

$z(1/3) = -0,8 + 0,6i$



Talet z som ges av z(a) blir istället $\bar{z}$ om a är negativt

$z = \frac{a+i}{a-i}$ men om a är negativt får vi

$z = \frac{-a+i}{-a-i}$

och om vi multiplicerar detta med (-1) får vi

$\frac{(a-i)}{a+i}$

vilket är konjugatet till z.

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang	X	1/0	Även om eleven gör ett godtagbart bevis så är det bara ett påstående som bevisas.
Redovisning och matematiskt språk			
Summa		**3/0**	

Elevlösning 3 (3 g och 3 vg och två av MVG-kvaliteterna)

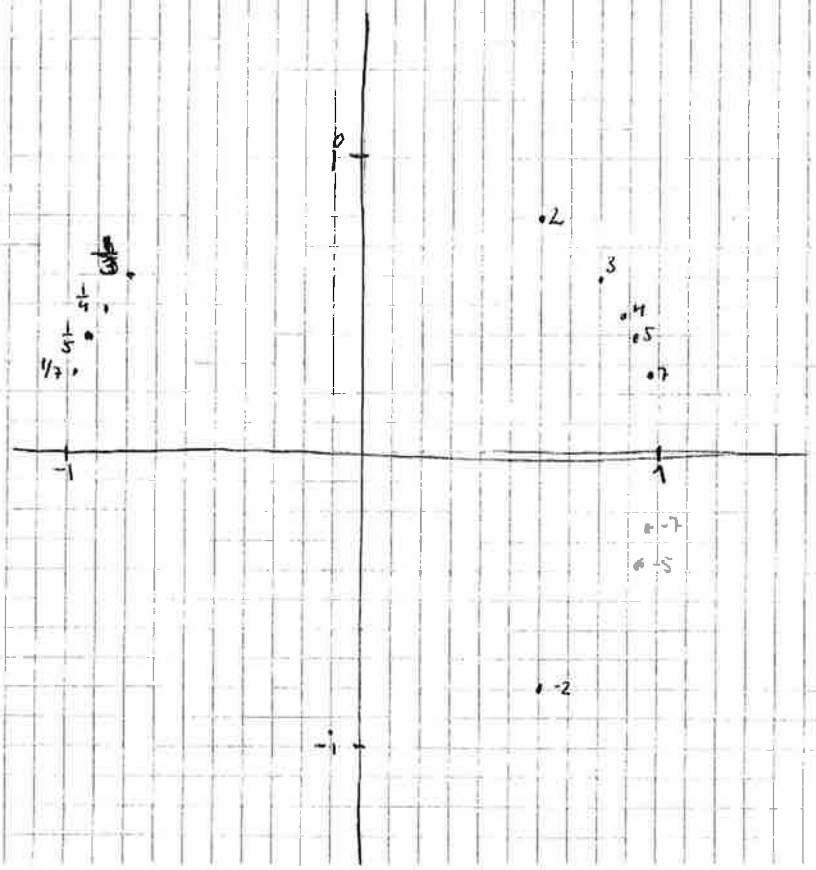
$$z(a) = \frac{(a+i)^2}{a-i(a+i)} = \frac{a^2+2ai+i^2}{a^2+i^2}$$

$$z(2) = \frac{4+4i-1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$$

$$z(-2) = \frac{4-4i+i^2}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$$

$$z(3) = \frac{9+6i-1}{10} = \frac{8}{10} + \frac{6i}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3i}{5}$$

$$z\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}i-1}{\frac{10}{9}} = -\frac{8}{10} + \frac{6i}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3i}{5}$$



1. $z(-a) = \overline{z(a)}$ gäller för alla reella a

2. $z(\frac{1}{a}) = -\overline{z(a)}$ gäller för alla reella $a \neq 0$

$$z(a) = \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2ai}{a^2+1}$$

$$\overline{z(a)} = \frac{a^2-1}{a^2+1} - \frac{2ai}{a^2+1}$$

$$-\overline{z(a)} = -\frac{a^2+1}{a^2+1} + \frac{2ai}{a^2+1}$$

(1) $$z(-a) = \frac{(-a)^2-1}{(-a)^2+1} + \left(\frac{-2ai}{(-a)^2+1}\right) = \frac{a^2-1}{a^2+1} - \frac{2ai}{a^2+1} = \overline{z(a)}$$ V.S.V

(2) $$z(\tfrac{1}{a}) = \frac{\frac{1}{a^2}-1}{\frac{1}{a^2}+1} + \frac{2i\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+1} = \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{2ai}{1+a^2} =$$

$$= \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2ai}{a^2+1} = -\overline{z(a)}$$ V.S.V

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	2/0	
Matematiska resonemang		1/2	
Redovisning och matematiskt språk		0/1	
Summa		**3/3**	

Kommentar: Eleven bevisar korrekt båda sina påståenden på ett generellt sätt. Redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är korrekt. Eleven uppfyller därmed två MVG-kvaliteter.