NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK
KURS E
HÖSTEN 1998

Tidsbunden del

Anvisningar

Provperiod	1 december – 17 december 1998.
Provtid	Totalt 240 minuter.
Hjälpmedel	Del I: Formelsamling Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Lösningar till Del I skall lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 15 uppgifter. De flesta uppgifterna är av *långsvarstyp* där det inte räcker med bara ett kort svar utan där det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl Godkänd”. Provet ger maximalt 50 poäng.

DEL I

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare.
Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Bestäm argument och absolutbelopp för det komplexa talet $-7+7i$.

Endast svar fordras (2p)

2. Skriv uttrycket $\dfrac{(3-i)(3+i)}{1+2i}$ på formen $a+bi$ (2p)

3. Bestäm den funktion $y = f(x)$ som uppfyller villkoren $f(1)=1$ och $y' = 4x$ (2p)

4. Lös differentialekvationen $y'' - 6y' - 7y = 0$ (2p)

5. Eva och Martin löser samma uppgift. Här nedan kan du se hur de gjort.

a) Hur kan uppgiften ha varit formulerad? (2p)

b) Både Evas och Martins lösningar är korrekta.
Varför får de inte samma svar? (2p)

Evas lösning:

$y' = y + x \quad y(1) = 2$

$h = 0{,}1$

$y(1{,}1) = 2 + 0{,}1\cdot(2+1) = 2{,}3$
$y(1{,}2) = 2{,}3 + 0{,}1\cdot(2{,}3+1{,}1) = 2{,}64$
$y(1{,}3) = 2{,}64 + 0{,}1\cdot(2{,}64+1{,}2) = 3{,}024$

Svar: $y(1{,}3) \approx 3{,}0$

Martins lösning:

$y' = y + x \quad y(1) = 2$

$y_h = Ce^x$
$y_p = ax + b \;,\; y_p' = a$

$a = ax + b + x$
$a = -1 \quad b = -1$
$y = Ce^x - x - 1$
$y(1) = Ce - 1 - 1 = 2$
$Ce = 4$
$C = 4e^{-1}$
$y = 4e^{x-1} - x - 1$
$y(1{,}3) \approx 3{,}099$

Svar: $y(1{,}3) \approx 3{,}1$

6. Bestäm två olika icke-reella tal vars produkt är $-2+2i$ (2p)

7. När lösningarna till ekvationen $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$ anges som punkter i det komplexa talplanet kan en cirkel ritas som går genom alla punkterna.

a) Lös ekvationen. (2p)

b) Bestäm cirkelns radie. (2p)

8. Linjen genom punkterna P = (1, 0) och Q = (4, 2) samt grafen till $y = \sqrt{x}$ avgränsar tillsammans med *x*-axeln ett område i första kvadranten. När området roteras kring *x*-axeln uppstår en rotationskropp. Visa att den har volymen 4π volymsenheter. (4p)

DEL II

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande).
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

9. Lös differentialekvationen $y' + 2y = 0$ då $y(1) = 1$ (2p)

10. a) Rita ett komplext talplan och markera talet $z_1 = -4 + 3\text{i}$

Endast svar fordras (1p)

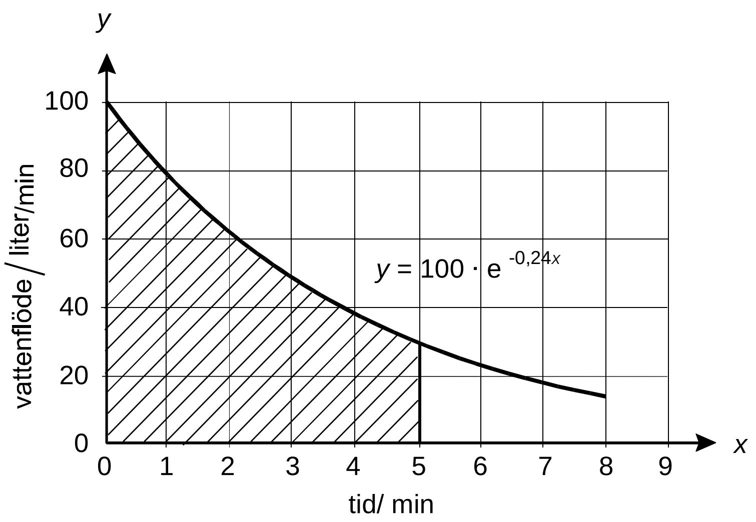
b) Punkterna som representerar z_1 och $\bar{z}_1$ utgör tillsammans med origo hörn i en triangel. Bestäm triangelns area. (2p)

c) Ge ett allmänt uttryck i *a* och *b* för arean hos den triangel som bildas av z, $\bar{z}$ och origo om $z = a + b\text{i}$ (3p)

11. En vattentank innehåller 2000 liter vatten. Genom en läcka i tanken börjar *y* liter/min vatten rinna ut, där $y = 100 \cdot e^{-0,24x}$ och *x* minuter är tiden sedan läckan uppstod.

a) I figuren nedan finns grafen till funktionen $y = 100 \cdot e^{-0,24x}$ ritad. Beräkna den markerade arean under kurvan. (2p)

b) Tolka vad denna area betyder för exemplet med vattentanken. (1p)



12. Vid en kontrollräkning fanns 250 sniglar i en trädgård. En vecka senare var antalet 268. Vi antar att ändringstakten är proportionell mot antalet sniglar.

a) Låt y vara antalet sniglar efter x veckor och teckna en differentialekvation som beskriver ändringstakten i antalet sniglar.

Endast svar fordras (1p)

b) Lös differentialekvationen och beräkna hur många sniglar som bör finnas i trädgården efter 3 veckor. (3p)

13. En morgon vid åttatiden började en sjö att frysa till. Isens tjocklek y cm är en funktion av tiden t timmar efter att vattnet börjat frysa. Isens tillväxthastighet kan beskrivas med differentialekvationen

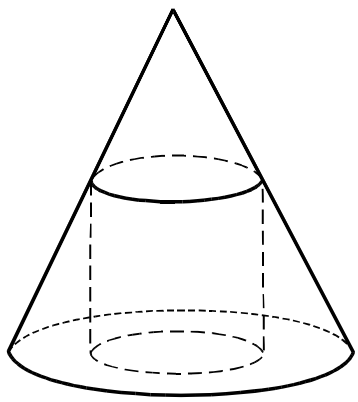
$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}$, där k är en konstant.

a) Differentialekvationens lösningar kan skrivas $y^2 = 2k \cdot t + C$
Visa att y är en lösning till differentialekvationen ovan. (2p)

b) Efter en timme var isen 1 cm tjock. För att man skall kunna åka skridskor på isen krävs att tjockleken är minst 3 cm. Efter hur lång tid kan man tidigast börja åka skridskor på isen? (3p)

14. På ett bord står en rak cirkulär cylinder med radien
R = 3,0 cm och höjden H = 6,0 cm. Till cylindern ska tillverkas en rak cirkulär kon som ska sättas över cylindern så att konens baskant vilar på bordet.

Bestäm konens minsta möjliga volym med två siffrors noggrannhet.



(4p)

15. Vismut sönderfaller till tallium med en sönderfallshastighet av 32 % per minut. Tallium sönderfaller till bly med sönderfallshastigheten 15 % per minut. Det bly som bildas är stabilt och sönderfaller alltså inte.

Vid ett laboratorieförsök utgår vi från en viss mängd ren vismut. Vi betecknar mängderna av vismut och tallium med A respektive B vid den tidpunkt då sönderfallet pågått i t minuter. Förändringshastigheten hos mängden tallium kan då beskrivas med differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0{,}32A - 0{,}15B$

a) Beteckna mängden bly med C och ställ upp differentialekvationer som beskriver förändringshastigheterna hos mängderna av vismut och bly. *Endast svar fordras.* (2p)

b) Vad kan man säga om förändringshastigheterna för mängderna av vismut, tallium och bly vid den tidpunkt då mängden tallium är maximal? (2p)

Bakgrund: Radonproblemet

Vid det radioaktiva sönderfallet av gasformig radon bildas ämnen vilka i sin tur sönderfaller, så kallade radondöttrar. Bland dessa ämnen återfinns vismut, tallium och bly. De kan komma ned i lungorna och p.g.a. sin strålning öka risken för lungcancer. Vissa forskare anser att minst en tiondel av alla dödsfall i lungcancer i Sverige beror på inandning av radon.

Radon från marken är den vanligaste orsaken till radonproblem i bostäder. Det finns inte radon i alla marker men t.ex. i rullstensåsar i Bergslagen, i granit på sina håll i Norrland och i alunskiffer. Vissa byggnads material, t.ex. blå gasbetong som inte tillverkas längre, har visat sig avge radon och har därmed blivit ett miljöproblem i hus av dessa material. Problemen med radon från mark eller från byggnadsmaterial kan åtgärdas genom förbättrad ventilation i huset.

Statens strålskyddsinstitut beräknade 1994 att 200 000 svenska bostäder har högre radonhalter än de tillåtna gränsvärdena, 320 000 bostäder hade då fått sin radonhalt uppmätt, och 20 000 hade radonsanerats. Vid sådan sanering kan staten ge ett bidrag.

(Källa: Bra Böckers Lexikon 2000, 1998)

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i det nationella E-kursprovet i Matematik ht -98 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål.

MaEht98		**Kunskapsområde i målbeskrivningen**					**Betygskriterium**											
Uppgift nr	**Poäng**	**Algebra**		**Diff.- & integralkalkyl**			**Godkänd**						**Väl Godkänd**					
		1	**2**	**1**	**2**	**3**	**a**	**c**	**d**	**f**	**g**	**h**	**a**	**b**	**d**	**e**	**g**	**h**
1	2	x	x				x	x										
2	2		x				x	x			x							
3	2					x	x	x			x							
4	2					x	x	x			x							
5a	2					x					x		x		x		x	
5b	2					x	x				x		x		x		x	
6	2		x								x		x			x		
7a	2		x				x	x			x							
7b	2	x	x								x		x			x	x	
8	4			x							x		x				x	
9	2					x	x	x			x							
10a	1	x					x	x										
10b	2	x	x				x		x		x							
10c	3	x	x				x		x		x		x			x	x	
11a	2			x			x	x			x							
11b	1			x			x											
12a	1				x		x	x										
12b	3					x	x	x	x		x		x				x	
13a	2			x							x		x			x	x	
13b	3					x					x		x				x	
14	4			x							x		x				x	
15a	2				x						x		x			x	x	
15b	2			x							x		x			x	x	
∑	**50p**	16p		15p	19p		ca 22p						ca 28p					

Förslag till kravgränser

Provet ger maximalt 50 poäng. Förslag till undre gräns för Godkänd är 15 poäng respektive 28 poäng för Väl Godkänd.

Bedömningsanvisningar - tidsbunden del (MaE ht 1998)

Exempel på godtagbara svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet.

DEL I

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
1.		**Max 2p**
	Svar med korrekt argument (135º)	+1p
	Svar med korrekt absolutbelopp ($\sqrt{98}$)	+1p
2.		**Max 2p**
	Redovisning som anger lämplig metod (t.ex. förlängning med nämnarens konjugat)	+1p
	med korrekt genomförda förenklingar ($2-4\mathrm{i}$)	+1p
3.		**Max 2p**
	Delsvar som uppfyller villkoret $y' = 4x$ ($y = 2x^2$ eller $y = 2x^2 + C$)	+1p
	som även uppfyller villkoret $f(1) = 1$ ($y = 2x^2 - 1$)	+1p
4.		**Max 2p**
	Redovisning som anger lämplig metod (försök till korrekt lösning av karakteristisk ekvation som används för att ange en lösning till differentialekvationen)	+1p
	med korrekt svar ($y = C_1\mathrm{e}^{7x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$)	+1p

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

5. **Max 4p**

a) Godtagbar beskrivning +1-2p

Exempel på bedömda elevlösningar redovisas nedan:

- *Vilket värde har* $y(1{,}3)$ *då* $y' = y + x$ *och* $y(1) = 2$ (2p)

Kommentar: Eleven har fått med differentialekvationen, randvillkoret samt visat vad som frågas efter.

- *En differentialekvation är given med ett begynnelsevillkor, vilket värde har y då x är lika med 1,3* (2p)

Kommentar: Eleven anger principen för vad som ska göras, men anger inte vilken differentialekvation och vilket villkor som ska användas.

b) Godtagbar förklaring +1-2p

Exempel på bedömda elevlösningar redovisas nedan:

- *Eva har löst problemet numeriskt*
  Martin har löst problemet exakt (2p)

Kommentar: Trots att innebörden i ”numeriskt” och ”exakt” inte beskrivs så gör eleven en bestämning av de olika metoderna på ett godtagbart sätt.

- *Dom använder sig av olika metoder. Stegvis för Eva och enligt matematiska omvandlingar !!! av formler för Martin.* (1p)

Kommentar: Eleven har en uppfattning om skillnader mellan metoderna, men denna uppfattning uttrycks på ett oprecist sätt, med ett bristfälligt matematiskt språkbruk. De utropstecken som eleven använder i texten tyder dock på att hon delvis är medveten om problemet.

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
6.			**Max 2p**
		Godtagbart svar med två icke-reella faktorer	+1-2p
		Felaktigt svar med redovisning som visar på godtagbar tankegång bör ge 1p t.ex :	
		$z \cdot w = -2 + 2\text{i} = 4\left(\cos 45^\circ + \text{i}\sin 45^\circ\right)$ [fel argument och belopp!]	
		Vid multiplikation multipliceras r-värdena och argumenten adderas.	
		$z = 4\left(\cos 25^\circ + \text{i}\sin 25^\circ\right)$ $\quad w = 1\left(\cos 20^\circ + \text{i}\sin 20^\circ\right)$	
		Korrekt svar av enkel typ utan redovisning bör ge 2p t.ex:	
		$\text{i}(2 + 2\text{i}) = -2 + 2\text{i}$	
		eller	
		$\text{i}\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}\right) = -2 + 2\text{i}$	
7.			**Max 4p**
	a)	Korrekt bestämning av $z_1 = 0$	+1p
		Korrekt bestämning av $z_2 = 2 + \text{i}$ och $z_3 = 2 - \text{i}$	+1p
	b)	Redovisning som tyder på förståelse för problemet och anger lämplig metod	+1p
		med godtagbart svar (1,25)	+1p
8.			**Max 4p**
		Redovisning som tyder på förståelse för problemet och anger lämplig metod	+1p
		med godtagbart tecknat uttryck för volymen	+1-2p
		med korrekta förenklingar och fullbordat bevis	+1p

DEL II

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
9.		**Max 2p**
	Redovisad godtagbar lösning	
	($y = \mathrm{e}^{2-2x}$ eller $y = \mathrm{e}^{2} \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ eller $y = 7{,}39\mathrm{e}^{-2x}$)	+1-2p
10.		**Max 6p**
a)	Godtagbart talplan och markering	+1p
b)	Redovisad godtagbar lösning (12)	+1-2p
c)	Redovisad godtagbar lösning (*ab*)	+1-2p
	med absolutbelopp	+1p
11.		**Max 3p**
a)	Redovisad godtagbar lösning (290)	+1-2p
b)	Godtagbar tolkning av arean som den volym vatten som runnit ut ur tanken under de första fem minuterna efter att läckan uppstått.	+1p
12.		**Max 4p**
a)	Korrekt tecknad differentialekvation ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky$)	+1p
b)	Korrekt lösning av differentialekvationen med begynnelsevillkor ($y = 250\mathrm{e}^{kx}$)	+1p
	med godtagbar bestämning av k	+1p
	med godtagbart svar (310)	+1p

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
13.		**Max 5p**
a)	Redovisning som tyder på förståelse för problemet och anger lämplig metod	+1p
	med godtagbar bevisning	+1p
	Elevlösningar som visar att $y=\sqrt{2kt+C}$ är en lösning men inte visar att $y=-\sqrt{2kt+C}$ är en lösning ges 2p.	
b)	Redovisning som tyder på förståelse för problemet och anger lämplig metod	+1p
	med godtagbar lösning (9 h)	+1-2p
14.		**Max 4p**
	Ansats till lösningsmetod, t.ex. med likformighet	+1p
	med korrekt uttryck för konens volym i en variabel	+1p
	med godtagbar bestämning av minsta värde (380 cm^3)	+1p
	med redovisning som gör troligt att detta är minsta värde	+1p
	Antalet värdesiffror i elevens svar behöver inte anses viktigt. Detta anges i texten för att inbjuda till numeriska lösningar med grafritande räknare.	
15.		**Max 4p**
a)	($\frac{dA}{dt}=-0{,}32A$, $\frac{dC}{dt}=0{,}15B$)	
	En differentialekvation korrekt angiven	+1p
	Den andra differentialekvationen korrekt angiven	+1p
b)	Kommentar om tallium, t.ex. att talliummängdens förändringshastighet är noll vid denna tidpunkt.	+1p
	Kommentar om vismut och bly, t.ex. att sönderfallshastigheten hos vismut är lika med bildningshastigheten hos bly vid denna tidpunkt.	+1p

Mål för Kurs E i matematik

Kurs: **Matematik E**
Poäng: **60**

Mål

Målet för kursen är att ge eleven de fördjupade kunskaper som krävs för högre studier på matematikintensiva utbildningar.
Eleven skall i ett mindre projektarbete utveckla sin förmåga att under eget ansvar arbeta med en problemställning.

Efter genomgången kurs skall eleven

i algebra (A)

1. ha kännedom om hur talområdet utvidgats till komplexa tal

2. kunna räkna med komplexa tal skrivna i olika former
   samt kunna lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter

i differential-och integralkalkyl (D)

1. kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler

2. kunna ställa upp differentialekvationer som modeller för verkliga situationer

3. kunna ange exakta lösningar till några enkla differentialekvationer
   och förstå tankegången bakom någon metod för numerisk lösning.

Dessutom skall eleven kunna ge prov på förmåga att på egen hand analysera, genomföra och redovisa en något mer omfattande uppgift.

Betygskriterier

Betygskriterier

Kurs: **Matematik E**
Poäng: **60**

G	Godkänd	V	Väl Godkänd
Ga	• Eleven har insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen.	Va	• Eleven har goda insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen.
		Vb	• Eleven har insikt i matematikens idéhistoria.
Gc	• Eleven löser uppgifter i vilka problemformuleringen är klart definierad, t. ex. lösning av andragradsekvationer med komplexa rötter och lösning av enkla differentialekvationer, och exempeltypen är sådan att eleven mött den tidigare.		
Gd	• Eleven känner till och använder några olika bearbetningsstrategier och behandlar enkla och vanliga problemställningar.	Vd	• Eleven kan föreslå, diskutera och värdera olika bearbetningsstrategier och kan behandla problemställningar av olika svårighetsgrad och art.
		Ve	• Eleven använder och kombinerar därvid olika matematiska modeller och metoder i såväl kända som nya situationer.
Gf	• Eleven utför nödvändiga beräkningar, använder i relevanta sammanhang tekniska hjälpmedel och har viss förmåga att värdera resultaten.		
Gg	• Eleven kan skriftligt göra en redovisning av bearbetning av problem där tankegången kan följas och kan med tydlighet rita de figurer, diagram eller koordinatsystem som erfordras.	Vg	• Eleven kan göra en skriftlig redovisning av bearbetning av problem. I redovisningen visar eleven en klar tankegång och kan rita korrekta och tydliga figurer.
Gh	• Eleven kan med visst stöd muntligt redovisa tankegången i bearbetning och lösning av problem även om det matematiska språket inte behandlas helt korrekt.	Vh	• Eleven kan muntligt med klar tankegång redovisa och förklara arbetsgången i problemlösningen med ett acceptabelt matematiskt uttryckssätt.
Gi	● Eleven utför med handledning ett mindre projektarbete och redovisar arbetsmetod och resultat på ett godtagbart och förståeligt sätt.	Vi	● Eleven utför relativt självständigt ett mindre projektarbete och redovisar arbetsmetod och resultat klart och tydligt och på en god nivå.