Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter.
Hjälpmedel	Del I: Formelsamling Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Lösningar till Del I skall lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 17 uppgifter. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl godkänd”. Provet ger maximalt 52 poäng.

DEL I

Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Låt $z = -1 + \mathrm{i}$

a) Markera z i det komplexa talplanet (1p)

b) Bestäm $\arg z$ *Endast svar fordras* (1p)

c) Bestäm $|z|$ *Endast svar fordras* (1p)

2. Bestäm $z \cdot \bar{z}$ då $z = 2 - 2\mathrm{i}$ (2p)

3. Lös ekvationen $\dfrac{z^2}{z-1} = 2$ (2p)

4. Lös differentialekvationen $y' + 2y = 0$ då $y(0) = 8$ (2p)

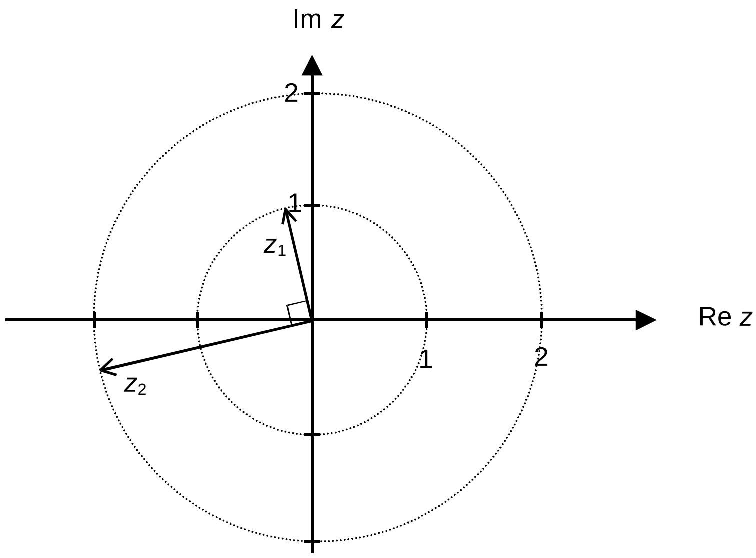
5. Vid beräkning med komplexa tal används ibland de Moivres formel som kan skrivas $z^n = r^n(\cos nv + \mathrm{i}\sin nv)$

Beskriv med egna ord vad de Moivres formel betyder. I din beskrivning ska du använda begreppen *argument*, *absolutbelopp* och *polär form*. (2p)

6. Bestäm en andra ordningens differentialekvation som har en lösning $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ (2p)

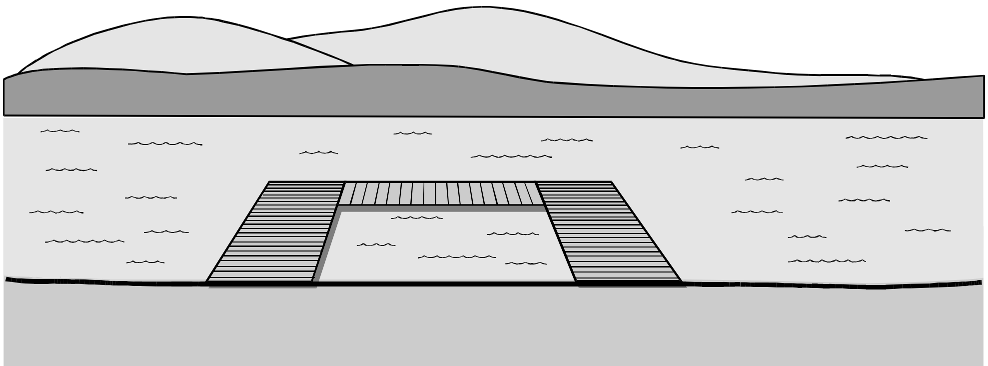
7. Bestäm $y(1)$ *numeriskt* då $y' = y - x$ och $y(0) = 2$. Använd steglängden 0,5 (2p)

8. I figuren finns information om de komplexa talen z_1 och z_2
Bestäm z om $z \cdot z_1 = z_2$. Svara på formen $z = a + b\,\mathrm{i}$ (3p)



9. I en vik vill man göra en rektangulär brygganläggning. Den ska bestå av två bryggdelar från land med en tredje bryggdel som sammanbinder ytterändarna (se figur). Bryggdelarna är alla 1,0 meter breda.

Hur stor kan vattenytan innanför bryggdelarna högst bli om bryggorna och vattenytan innanför får uppta $128\,\text{m}^2$ av vikens yta? (4p)



DEL II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande).
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

10. Bestäm $\frac{z_1}{z_2}$ om $z_1 = \sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ och $z_2 = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. (2p)

Svara på formen $a + b\mathrm{i}$ med exakta värden på *a* och *b*.

11. Lös differentialekvationen $y'' - 13y' = 0$ då $y(0) = 4$ och $y'(0) = 13$ (3p)

12. Markera i det komplexa talplanet $z = t + (t-3)\cdot \mathrm{i}$ för några reella värden på *t*.
Formulera en slutsats om de komplexa talen *z*. (2p)

13. I Sverige minskade antalet pilgrimsfalkar från 1955 och framåt. Minskningstakten i antal par/år anses vara proportionell mot antalet falkpar. När räkningen av dessa började 1955 fanns 88 par men tio år senare fanns endast 13 par kvar.

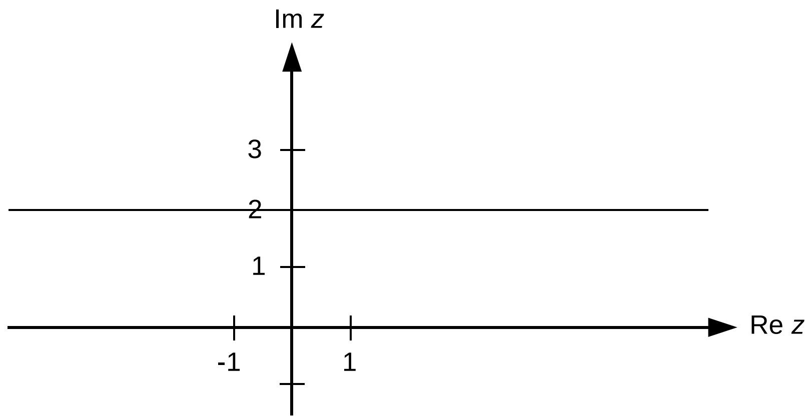
a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen och lös den. (2p)

b) När skulle falken varit utrotad enligt denna modell? (2p)

I Svenska Naturskyddsföreningens (SNF) tidskrift Sveriges natur nr 4 1965 skrev man:
”SNF:s inventering av pilgrimsfalken visar, att läget för denna art är om möjligt än mer katastrofalt: från hela landet har hittills endast 13 par rapporterats. Bara 6 av dessa har fått några ungar! Sedan 1955 har ca 75 par "försvunnit" - någon annan faktor än biociddöden är knappast tänkbar!”

SNFs räddningsarbete för pilgrimsfalken har varit mycket framgångsrik. En aktuell uppgift ur tidskriften Sveriges natur säger att pilgrimsfalken återhämtat sig starkt och att stammen 1998 uppgår till runt 70 par. Över 130 ungar kom på vingar detta år.

14. Talet z ligger på den linje som markerats i det komplexa talplanet nedan. Vilka värden kan realdelen för z^2 anta? (3p)



15. Två av rötterna till ekvationen $z^3 - 2z^2 + az + b = 0$ är $z_1 = \mathrm{i}$ och $z_2 = -\mathrm{i}$
(a och b är reella tal)

a) Bestäm konstanterna a och b. (2p)

b) Bestäm ekvationens tredje rot. (2p)

16. På en väg läggs ett tunt lager asfalt som från början har temperaturen 120 ºC. Asfaltens temperatur y ºC är en funktion av tiden t min. Luftens temperatur är 20 ºC. I en enkel modell antas asfalten svalna med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan asfaltens temperatur, $y(t)$ ºC, och den omgivande luftens temperatur. Proportionalitetskonstanten är $-0{,}046\,\text{min}^{-1}$.

a) Teckna en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver avsvalningsprocessen. (2p)

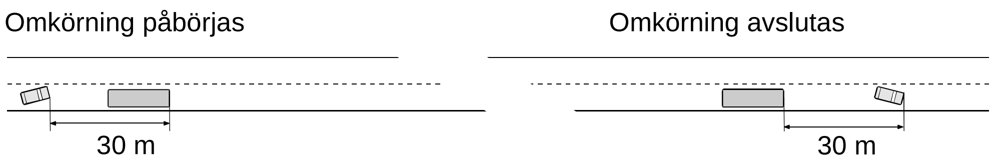
b) Lös differentialekvationen och beräkna hur lång tid det tar för asfalten att svalna till 30 ºC. (3p)

17. I reklamen för en ny bilmodell anges att accelerationen vid omkörning är anmärkningsvärt bra. Bilen uppges kunna accelerera från 60 km/h (16,7 m/s) till 100 km/h (27,8 m/s) på 10 sekunder på fjärde växeln.
Antag att hastigheten v m/s vid olika tidpunkter under accelerationen kan beskrivas med uttrycket $v(t) = a\sqrt{t} + b$, där a och b är konstanter och t sekunder är den tid som bilen accelererat.

a) Bestäm konstanterna a och b. (2p)

b) Hur lång sträcka behövs enligt denna modell för en omkörning som tar 10 sekunder, om du från början kör 60 km/h. (2p)

c) En sådan bil ligger bakom en lastbil som kör 60 km/h och föraren ska köra om på en rak väg med god sikt. Hur lång tid tar omkörningen om den sker enligt bilderna nedan? (3p)



Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i det nationella E-kursprovet i Matematik ht -99 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål (återfinns längst bak i detta häfte).

MaEht99		Kunskapsområde i målbeskrivningen					Betygskriterium											
Upp-gift nr	Po-äng	Algebra		Diff.- & integral-kalkyl			Godkänd						Väl Godkänd					
		1	2	1	2	3	a	c	d	f	g	h	a	b	d	e	g	h
1a	1	x					x	x			x							
1b	1		x				x	x										
1c	1		x				x	x										
2	2		x				x	x			x							
3	2		x				x	x			x							
4	2					x	x	x			x							
5	2		x								x		x				x	
6	2					x					x		x		x	x	x	
7	2					x	x	x			x							
8	3	x	x								x		x		x	x	x	
9	4			x							x		x		x	x	x	
10	2		x				x	x			x							
11	3					x	x	x			x							
12	2	x					x		x		x					x		
13a	2				x	x	x	x			x							
13b	2					x							x		x	x	x	
14	3	x	x										x			x	x	
15a	2		x				x		x		x							
15b	2		x								x		x			x	x	
16a	2				x								x			x		
16b	3					x					x		x		x		x	
17a	2			x			x		x		x							
17b	2			x							x		x		x		x	
17c	3			x							x		x		x		x	
$\sum$	52p	23p		11p	18p		ca 24p						ca 28p					

Kravgränser

Provet ger maximalt 52 poäng. Undre gräns för provbetyget Godkänd är 14 poäng respektive 29 poäng för Väl godkänd.

Allmänna riktlinjer för bedömning

Tidsbundna delen
Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål och kriterier och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

1. Positiv bedömning

   Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

2. Uppgifter av kortsvarstyp där endast svar erfordras ger 1 eller 2 poäng enligt bedömningsanvisningen. Förslag på godtagbara eller korrekta svar ges om möjligt i bedömningsanvisningen.

3. Uppgifter av långsvarstyp

   3.1 Enbart svar utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs korrekt redovisning fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången lätt kan följas.

   3.2 Då +1p anges i bedömningsanvisningen ska de angivna minimikraven uppfyllas för att erhålla 1 poäng i tillägg till tidigare erhållna poäng.

   3.3 När bedömningsanvisningen t.ex. anger +1-2p innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg. Kraven för delpoängen bestäms lokalt.

4. Bedömning vid olika typer av fel

   Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, fel i deluppgift eller följdfel, formella fel och räknefel.

5. Bedömning av svarets utformning

   Bedömning av brister i svarets utformning, som t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

Bedömningsanvisningar - tidsbunden del (MaE ht 1999)

Exempel på godtagbara svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet.

DEL I

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
1.			**Max 3p**
	a)	Korrekt figur	+1p
	b)	Korrekt svar $\left(\frac{3\pi}{4} \text{ alt } 135^\circ \right)$	+1p
	c)	Korrekt svar $\left(\sqrt{2}\right)$	+1p
2.			**Max 2p**
		Korrekt metod (t.ex. korrekt angivet $\bar{z}$)	+1p
		Korrekt beräknad produkt (8)	+1p
3.			**Max 2p**
		Redovisad godtagbar lösning $\left(z = 1 \pm \mathrm{i}\right)$	+1-2p
4.			**Max 2p**
		Korrekt allmän lösning $\left(y = C \cdot \mathrm{e}^{-2x}\right)$	+1p
		med korrekt konstantbestämning (8)	+1p
5.			**Max 2p**
		Godtagbar förklaring Se bifogade elevlösningar	+1-2p

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
6.		**Max 2p**
	Redovisad godtagbar lösning $(y'' - y = 0)$	+1-2p
7.		**Max 2p**
	Redovisad godtagbar metod	+1p
	med godtagbart svar (t.ex. Eulers metod ger 4,25)	+1p
8.		**Max 3p**
	Godtagbar metod med korrekt svar $(z = 2\mathrm{i})$	+1-2p
	med generell metod	+1p
	(t.ex. resonemang om att vridningen sker genom multiplikation med 2i eller ansatsen $\arg z_1 = v$ och tecknande av kvoten) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\left(\cos\left(v+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(v+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos v + \mathrm{i}\sin v}$	
9.		**Max 4p**
	Godtagbar areafunktion	+1p
	med korrekt derivering och bestämning av maximala arean $(98\,\mathrm{m}^2)$	+1-2p
	med verifiering av maximum	+1p

DEL II

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
10.		**Max 2p**
	Redovisning som anger lämplig metod (t.ex. förlängning med nämnarens konjugat)	+1p
	med korrekt genomförda förenklingar $\left(\frac{4\sqrt{3}}{7} + \frac{\mathrm{i}}{7}\right)$	+1p

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
11.			**Max 3p**
		Korrekt allmän lösning $(y = C + De^{13x})$	+1p
		med korrekt bestämning av konstanterna $(C = 3$ och $D = 1)$	+1-2p
12.			**Max 2p**
		Godtagbar undersökning	+1p
		med godtagbart formulerad slutsats (punkterna ligger på en rät linje)	+1p
13.			**Max 4p**
	a)	Godtagbar differentialekvation $\left(\frac{dy}{dt} = k \cdot y\right)$	+1p
		med godtagbar lösning $\left(y = 88 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}19t}\right)$	+1p
	b)	Godtagbart svar med rimlig motivering (t.ex. 1978 + livslängden av det sista falkparet)	+1-2p
14.			**Max 3p**
		Korrekt ansats $\left(\text{t.ex. } z^2 = (a + 2\mathrm{i})^2\right)$	+1p
		med identifiering av Re z^2 $\left(a^2 - 4\right)$	+1p
		med korrekt svar $\left(\mathrm{Re}\, z^2 \geq -4\right)$	+1p
15.			**Max 4p**
	a)	Godtagbar metod för bestämning av *a* och *b*	+1p
		med korrekt svar ($a = 1$, $b = -2$)	+1p
	b)	Godtagbar ansats	+1p
		med korrekt svar ($z = 2$)	+1p

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
16.		**Max 5p**
a)	Korrekt tecknad differentialekvation $\left(\frac{dy}{dt} = -0{,}046(y - 20)\right)$	+1p
	med korrekt begynnelsevillkor $(y(0) = 120)$	+1p
b)	Korrekt tecknad allmän lösning $\left(y = Ce^{-0{,}046t} + 20\right)$	+1p
	Korrekt konstantbestämning $(C = 100)$	+1p
	Godtagbar beräknad tid (50 min)	+1p
17.		**Max 7p**
a)	Korrekt konstantbestämning $\left(a = \frac{40}{3{,}6 \cdot \sqrt{10}} \approx 3{,}51 \quad , \quad b = \frac{60}{3{,}6} \approx 16{,}7\right)$	+1-2p
b)	Korrekt tecknad integral $\left(\int_0^{10} (a\sqrt{t} + b)dt\right)$	+1p
	Godtagbar algebraisk eller numerisk beräkning av integralen (241 m)	+1p
c)	Godtagbar redovisad algebraisk eller numerisk lösningsmetod	+1-2p
	med korrekt svar (9 s)	+1p

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 5

Elev 1 (0p)

Kommentarer: Eleven använder sig av begreppen argument, absolut belopp och polär form på ett felaktigt sätt.

Med de Moivres formel bestämmer man olika lösningar för z^n. De man gör är att dra n ur absolutbeloppet samt multiplicerar n med argumentet. När detta är gjort så skriver man svaret på polär form.

ex $z^2 = -1$

$z^2 = 1\,(\cos 180° + i \sin 180°)$

$z^2 = r^2\,(\cos 180° + i \sin 180°)^2$

$r^2 = 1$

$r = 1$

$z^2 = r^2\,(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$

$2\alpha = 180° + n \cdot 360°$

$\alpha = 90° + n \cdot 180°$

$z_1 = (\cos 90° + i \sin 90°) = 1$

$z_2 = (\cos 270° + i \sin 270°) = -i$

Elev 2 (1p)

Kommentarer: Eleven visar vissa matematiska brister och nämner ej argument i sin lösning.

DM's formel innebär att det imaginära talet kan multipliceras med sig självt hur många ggr som helst utan att få krångliga parentesberäkningar.

ex) $z = 2-2i$ $\quad z^2 = (2-2i)(2-2i)$ $\quad z^3\ (2-2i)(2-2i)(2-2i)$

Ju högre exponenten blir desto längre och krångligare uträkning. Med DM's formel skrivs på polär form där det imaginära talet med exponent (z^n) är lika med r^n (Absolut beloppet, och vektorns sträcka)^n multiplicorat med

$\cos nv + i \sin nv$ (cos · exponenten · vinkeln + i sin · exponenten · vinkeln)

$\Rightarrow r^n(\cos nv + i \sin nv) = z^n$

Formeln underlättar otroligt redan vid exponenter större än 2.

Elev 3 (2p)

Kommentarer: Eleven använder begreppen argument, absolut belopp och polär form på ett korrekt sätt.

Ett tal, z, som höjts upp till ett tal, n, kan skrivas i polär form där absolutbeloppet av z höjts upp till talet n och där argumentet för talet z multipliceras med talet n.

Mål för Kurs E i matematik

Kurs: **Matematik E**
Poäng: **60**

Mål

Målet för kursen är att ge eleven de fördjupade kunskaper som krävs för högre studier på matematikintensiva utbildningar.
Eleven skall i ett mindre projektarbete utveckla sin förmåga att under eget ansvar arbeta med en problemställning.

Efter genomgången kurs skall eleven
i algebra (A)

1. ha kännedom om hur talområdet utvidgats till komplexa tal
2. kunna räkna med komplexa tal skrivna i olika former samt kunna lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter

i differential-och integralkalkyl (D)

1. kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler
2. kunna ställa upp differentialekvationer som modeller för verkliga situationer
3. kunna ange exakta lösningar till några enkla differentialekvationer och förstå tankegången bakom någon metod för numerisk lösning.

Dessutom skall eleven kunna ge prov på förmåga att på egen hand analysera, genomföra och redovisa en något mer omfattande uppgift.

Betygskriterier

Kurs: **Matematik E**
Poäng: **60**

G	Godkänd	V	Väl Godkänd
Ga	• Eleven har insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen.	Va	• Eleven har goda insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen.
		Vb	• Eleven har insikt i matematikens idéhistoria.
Gc	• Eleven löser uppgifter i vilka problemformuleringen är klart definierad, t. ex. lösning av andragradsekvationer med komplexa rötter och lösning av enkla differentialekvationer, och exempeltypen är sådan att eleven mött den tidigare.		
Gd	• Eleven känner till och använder några olika bearbetningsstrategier och behandlar enkla och vanliga problemställningar.	Vd	• Eleven kan föreslå, diskutera och värdera olika bearbetningsstrategier och kan behandla problemställningar av olika svårighetsgrad och art.
		Ve	• Eleven använder och kombinerar därvid olika matematiska modeller och metoder i såväl kända som nya situationer.
Gf	• Eleven utför nödvändiga beräkningar, använder i relevanta sammanhang tekniska hjälpmedel och har viss förmåga att värdera resultaten.		
Gg	• Eleven kan skriftligt göra en redovisning av bearbetning av problem där tankegången kan följas och kan med tydlighet rita de figurer, diagram eller koordinatsystem som erfordras.	Vg	• Eleven kan göra en skriftlig redovisning av bearbetning av problem. I redovisningen visar eleven en klar tankegång och kan rita korrekta och tydliga figurer.
Gh	• Eleven kan med visst stöd muntligt redovisa tankegången i bearbetning och lösning av problem även om det matematiska språket inte behandlas helt korrekt.	Vh	• Eleven kan muntligt med klar tankegång redovisa och förklara arbetsgången i problemlösningen med ett acceptabelt matematiskt uttryckssätt.
Gi	• Eleven utför med handledning ett mindre projektarbete och redovisar arbetsmetod och resultat på ett godtagbart och förståeligt sätt.	Vi	• Eleven utför relativt självständigt ett mindre projektarbete och redovisar arbetsmetod och resultat klart och tydligt och på en god nivå.