

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen till och med utgången av juni 2010.

Anvisningar

| | |
|----------------|--|
| Provtid | Totalt 240 minuter. |
| Hjälpmedel | Del I: Formelsamling Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling |
| Provmaterialet | Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Lösningar till Del I skall lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in. |
| Provet | Provet består av 16 uppgifter. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs <ul style="list-style-type: none">• att du skriver ned vad du gör• att du förklarar dina tankegångar• att du ritar figurer vid behov• att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står <i>Endast svar fordras</i>) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. |
| Betygsgränser | Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl godkänd". Provet ger maximalt 48 poäng. |

Del I

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Låt $z = 2 + 2i$
 - a) Ange \bar{z} *Endast svar fordras* (1p)
 - b) Bestäm $|z|$ *Endast svar fordras* (1p)
 - c) Skriv z på polär form. *Endast svar fordras* (1p)

2. Ange den lösning till $y' - 4y = 0$ som uppfyller villkoret $y(0) = 5$ (2p)

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $2y'' - 8y' + 8y = 0$ (2p)

4. Skriv det komplexa talet $\frac{4i}{1+i} + i$ på formen $a + bi$ (2p)

5. Utgå från talen $z_1 = 1,5(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ och $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$
 - a) Bestäm $z = z_1 \cdot z_2$ (2p)
 - b) Markera $z = z_1 \cdot z_2$ i ett komplext talplan. (1p)

6. Ekvationen $z^3 - z^2 + 3z - 3 = 0$ är given.
 - a) Visa att ekvationen har roten $z = 1$ (1p)
 - b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (2p)

7. Differentialekvationen $y' = y + x - 2$ har en lösning som uppfyller villkoret $y(1) = 2$. Använd Eulers stegmetod med steglängden $h = 0,5$ och beräkna för denna lösning
- a) $y(2)$ (2p)
- b) $y(0,5)$ (1p)
8. Ställ upp en differentialekvation på formen $y' = f(y)$ vars allmänna lösning är $y = Ae^{3x} + 4$ (2p)
9. Visa att om $z_1 = a + bi$ och $z_2 = a - bi$ (a och b reella) är rötter till ekvationen $z^2 + pz + q = 0$ så är p och q reella. (2p)
10. Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}i$ och $x > 0$ (3p)

Del II

**Denna del består av 6 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande).
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.**

11. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' - 5y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$ (3p)

12. Luftrycket y kPa avtar med höjden x km över havet. På varje höjd förändras luftrycket med en hastighet som är proportionell mot det aktuella luftrycket.

a) Uttryck detta med en differentialekvation. (1p)

b) Vid havsytan är luftrycket 101 kPa. Bestäm proportionalitetskonstanten om luftrycket har halverats på höjden 5,5 km. (2p)

13. Bestäm z då $|z| = 4$ och $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$ (3p)

14. Nisse har ett akvarium som innehåller 200 liter vatten, förutom fiskar, växter och stenar. Det bildas nitrat i vattnet och om fiskarna ska hålla sig friska och pigga måste Nisse byta vatten i akvariet.

Tidigare tappade han regelbundet ut 50 liter akvarievatten och ersatte det med lika mycket friskt vatten. Om det före vattenbytet fanns 100 mg nitrat per liter akvarievatten var koncentrationen 75 mg/l efter vattenbytet.

Nu har Nisse utrustat sitt akvarium med en utrustning för vattenbyte. Den pumpar ur akvarievatten och fyller samtidigt på med lika mycket friskt vatten genom en slang. Vattnet som rinner från akvariet kommer att vara väl blandat eftersom motorfiltret är igång hela tiden och flödet i slangen på det tillrinnande vattnet inte är så kraftigt.

Under vattenbytet kan nitratkoncentrationen i akvariet beskrivas med

differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{200}$ där y mg/l är nitratkoncentrationen då x liter

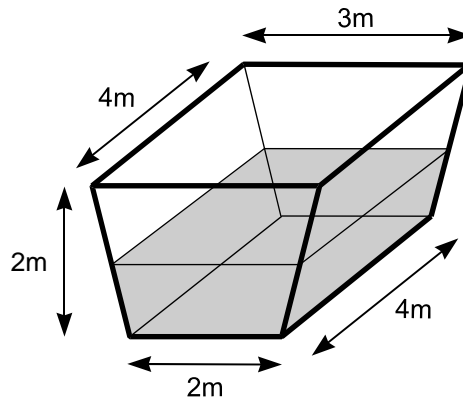
friskt vatten tillsatts.

Hjälp Nisse med att lösa ekvationen och beräkna sedan hur mycket vatten som behöver tillsättas enligt den nya metoden för att sänka nitratkoncentrationen från 100 mg/l till 75 mg/l. (3p)

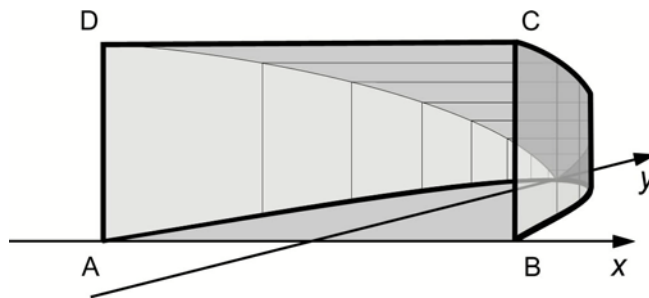
15. Bilden visar en öppen vattentank. Vatten fylls i tanken med en konstant hastighet av $2,4 \text{ m}^3$ per minut.

a) Teckna ett matematiskt uttryck för vattenvolymen i tanken som en funktion av vattendjupet. (2p)

b) Med vilken hastighet stiger vattenytan när djupet är 0,50 meter? (2p)



16. En arkitekt börjar rita ett förslag till en konsertsal. Hon tänker sig att golvet ska begränsas av en andragradskurva (parabel) och en rät linje vid bakväggen, vinkelrät mot parabelns symmetriaxel. Varje tvärsnitt av salen, parallellt med bakväggen ABCD, ska vara rektangulärt med höjden lika med halva bredden. Bakväggen ska vara 40 m bred och salen 64 m lång. Arkitekten vill undersöka salens luftvolym per person.



a) Ställ upp parabelns ekvation. (1p)

b) Beräkna salens volym. (3p)

c) Beräkna arean av konsertsalens golv. Hur många sittplatser bör man få rum med på konsertsalens golv? Använd detta för att uppskatta luftvolymen per person. Du får själv göra de antaganden som behövs för att lösa uppgiften. (3p)

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i det nationella E-kursprovet i Matematik vt 2000 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål (återfinns längst bak i detta häfte).

| MaEvt2000 | | Kunskapsområde i målbeskrivningen | | | | | Betygskriterium | | | | | | | | | | | |
|------------|-------|-----------------------------------|---|--------------------------|---|-----|-----------------|---|---|---|--------|-------------|---|---|---|---|--------|---|
| Uppgift nr | Poäng | Algebra | | Diff.- & integral-kalkyl | | | Godkänd | | | | | Väl Godkänd | | | | | | |
| | | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | a | c | d | f | g | h | a | b | d | e | g | h |
| 1a | 1 | | x | | | | x | x | | | | | | | | | | |
| 1b | 1 | | x | | | | x | x | | | x | | | | | | | |
| 1c | 1 | | x | | | | x | x | | | x | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | x | x | x | | | x | | | | | | | |
| 3 | 2 | | | | | x | x | x | | | x | | | | | | | |
| 4 | 2 | | x | | | | x | x | | | x | | | | | | | |
| 5a | 2 | | x | | | | x | x | | | x | | | | | | | |
| 5b | 1 | x | | | | | x | x | | | x | | | | | | | |
| 6a | 1 | x | | | | | x | x | | | x | | | | | | | |
| 6b | 2 | | x | | | | | | | | | | | x | | | x | x |
| 7a | 2 | | | | | x | x | x | | | x | | | | | | | |
| 7b | 1 | | | | | x | | | | | | | | x | | | | x |
| 8 | 2 | | | | | x | | | | | | | | x | | | x | x |
| 9 | 2 | | x | | | | | | | | | | | x | | | x | x |
| 10 | 3 | | x | x | | | | | | | | | | x | | | x | x |
| 11 | 3 | | | | | x | x | x | | | x | | | | | | | |
| 12a | 1 | | | | | x | | | x | | x | | | | | | | |
| 12b | 2 | | | | | x | x | x | | | x | | | | | | | |
| 13 | 3 | | x | | | | | | | | | | | x | | | x | x |
| 14 | 3 | | | | | x | x | | | | | | | x | | | | |
| 15a | 2 | | | x | | | | | | | | | | x | | | x | x |
| 15b | 2 | | | x | | | | | | | | | | x | | | x | x |
| 16a | 1 | | | x | | | | | | | | | | x | | | x | |
| 16b | 3 | | | x | | | | | | | | | | x | | | | x |
| 16c | 3 | | | x | | | | | | | | | | x | x | x | x | |
| Σ | 48p | 17p | | 12p | | 18p | | | | | ca 21p | | | | | | ca 27p | |

Kravgränser

Provet ger maximalt 48 poäng. Undre gräns för provbetyget Godkänd är 14 poäng respektive 27 poäng för Väl godkänd.

Allmänna riktlinjer för bedömning

Tidsbundna delen

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål och kriterier och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

1. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

2. Uppgifter av kortsvarstyp där endast svar erfordras ger 1 eller 2 poäng enligt bedömningsanvisningen. Förslag på godtagbara eller korrekta svar ges om möjligt i bedömningsanvisningen.

3. Uppgifter av långsvarstyp

3.1 Enbart svar utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs korrekt redovisning fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången lätt kan följas.

3.2 Då +1p anges i bedömningsanvisningen ska de angivna minimikraven uppfyllas för att erhålla 1 poäng i tillägg till tidigare erhållna poäng.

3.3 När bedömningsanvisningen t.ex. anger +1-2p innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg. Kraven för delpoängen bestäms lokalt.

4. Bedömning vid olika typer av fel

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, fel i deluppgift eller följdfel, formella fel och räknefel.

5. Bedömning av svarets utformning

Bedömning av brister i svarets utformning, som t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till utgången av juni 2010.

Bedömningsanvisningar - tidsbunden del (MaE vt 2000)

Exempel på godtagbara svar anges inom parentes. Bedömningen "godtagbar" ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet.

DEL I

Bedömningsanvisningar

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|-----------|--|---------------|
| 1. | | Max 3p |
| | a) Korrekt svar ($2 - 2i$) | +1p |
| | b) Korrekt svar ($\sqrt{8}$) | +1p |
| | c) Korrekt svar ($z = \sqrt{8}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ eller $\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$) | +1p |
| 2. | | Max 2p |
| | Korrekt bestämd allmän lösning ($y = Ce^{4x}$) | +1p |
| | med korrekt svar ($y = 5e^{4x}$) | +1p |
| 3. | | Max 2p |
| | Redovisning som anger lämplig metod (försök till korrekt lösning av karakteristisk ekvation som används för att ange en lösning till differentialekvationen) | +1p |
| | med korrekt svar $y = e^{2x}(C_1x + C_2)$ | +1p |
| 4. | | Max 2p |
| | Ansats med förlängning med $(1 - i)$ | +1p |
| | med korrekt svar ($2 + 3i$) | +1p |

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|--------------|---|---------------|
| 5. | | Max 3p |
| a) | Godtagbar redovisning med korrekt svar ($3i$ eller polär form) | +1p +1p |
| b) | Korrekt markerat z i det komplexa talplanet | +1p |
| 6. | | Max 3p |
| a) | Godtagbar redovisning | +1p |
| b) | Redovisad godtagbar metod med korrekta svar ($\pm i\sqrt{3}$) | +1p +1p |
| 7. | | Max 3p |
| a) | Korrekt använd metod med korrekt svar (3,5) | +1p +1p |
| b) | Godtagbar lösning (1,5) | +1p |
| 8. | | Max 2p |
| | Godtagbart genomförd lösning ($y' = 3y - 12$) | +1-2p |
| 9. | | Max 2p |
| | Godtagbar ansats Beviset slutfört med resonemang om varför p och q är reella | +1p +1p |
| 10. | | Max 3p |
| | Korrekt tecknad produkt Godtagbart genomfört bevis | +1p +1-2p |

DEL II

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|--------------|--|---------------|
| 11. | | Max 3p |
| | Korrekt allmän lösning | +1p |
| | Godtagbar användning av de givna villkoren med korrekt svar ($y = e^x - e^{-5x}$) | +1-2p |
| 12. | | Max 3p |
| a) | Korrekt differentialekvation ($y' = -ky$ eller $y' = qy$) | +1p |
| b) | Korrekt ekvation (t.ex. $0,5 = e^{-kx}$ eller motsvarande) med godtagbart svar ($k = 0,126 \text{ (km}^{-1}\text{)}$ eller $q = -0,126 \text{ (km}^{-1}\text{)}$) | +1p +1p |
| 13. | | Max 3p |
| | Redovisad godtagbar metod | +1p |
| | med ett korrekt värde på z | +1p |
| | med ytterligare ett korrekt värde på z ($\pm(\sqrt{8} - \sqrt{8}i)$ eller polär form) | +1p |
| 14. | | Max 3p |
| | Korrekt allmän lösning | +1p |
| | Korrekt konstantbestämning | +1p |
| | med godtagbart svar (60 liter) | +1p |
| 15. | | Max 4p |
| a) | Godtagbar ansats (t.ex. tecknat areafunktion) med korrekt tecknat uttryck för volymen som funktion av höjden ($V = 8h + h^2$) | +1p +1p |
| b) | Väljer användbar metod med godtagbart svar (0,27 m/min) | +1p +1p |

| Uppg. | Bedömningsanvisningar | Poäng |
|--------------|--|---------------|
| 16. | | Max 7p |
| a) | Korrekt svar ($y = 64 - 0,16x^2$) | +1p |
| b) | Ställt upp integralen $\int_0^{64} 2x^2 dy$ | +1p |
| | och överfört den till $\int_0^{64} (800 - 12,5y) dy$ | +1p |
| | med godtagbart svar (25600 m^3) | +1p |
| c) | Korrekt beräkning av konsertsalens golvarea (1700 m^2) | +1p |
| | Redovisade rimliga antaganden om hur stor area som t.ex. orkestern, gångar och varje person upptar | +1p |
| | Korrekta beräkningar av volymen utifrån egna antaganden | +1p |

Mål för Kurs E i matematik

Kurs: Matematik E
Poäng: 60

Mål

Målet för kursen är att ge eleven de fördjupade kunskaper som krävs för högre studier på matematikintensiva utbildningar.

Eleven skall i ett mindre projektarbete utveckla sin förmåga att under eget ansvar arbeta med en problemställning.

Efter genomgången kurs skall eleven i algebra (A)

1. ha kännedom om hur talområdet utvidgats till komplexa tal
2. kunna räkna med komplexa tal skrivna i olika former
samt kunna lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter

i differential-och integralkalkyl (D)

1. kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler
2. kunna ställa upp differentialekvationer som modeller för verkliga situationer
3. kunna ange exakta lösningar till några enkla differentialekvationer
och förstå tankegången bakom någon metod för numerisk lösning.

Dessutom skall eleven kunna ge prov på förmåga att på egen hand analysera, genomföra och redovisa en något mer omfattande uppgift.

Betygskriterier

Kurs: Matematik E
Poäng: 60

G Godkänd

Ga • Eleven har insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen.

Gc • Eleven löser uppgifter i vilka problemformuleringen är klart definierad, t. ex. lösning av andragradsekvationer med komplexa rötter och lösning av enkla differentialekvationer, och exempeltypen är sådan att eleven mött den tidigare.

Gd • Eleven känner till och använder några olika bearbetningsstrategier och behandlar enkla och vanliga problemställningar.

Gf • Eleven utför nödvändiga beräkningar, använder i relevanta sammanhang tekniska hjälpmedel och har viss förmåga att värdera resultaten.

Gg • Eleven kan skriftligt göra en redovisning av bearbetning av problem där tankegången kan följas och kan med tydlighet rita de figurer, diagram eller koordinatsystem som erfordras.

Gh • Eleven kan med visst stöd muntligt redovisa tankegången i bearbetning och lösning av problem även om det matematiska språket inte behandlas helt korrekt.

Gi • Eleven utför med handledning ett mindre projektarbete och redovisar arbetsmetod och resultat på ett godtagbart och förståeligt sätt.

V Väl Godkänd

Va • Eleven har goda insikter i begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen.

Vb • Eleven har insikt i matematikens idéhistoria.

Vd • Eleven kan föreslå, diskutera och värdera olika bearbetningsstrategier och kan behandla problemställningar av olika svårighetsgrad och art.

Ve • Eleven använder och kombinerar därvid olika matematiska modeller och metoder i såväl kända som nya situationer.

Vg • Eleven kan göra en skriftlig redovisning av bearbetning av problem. I redovisningen visar eleven en klar tankegång och kan rita korrekta och tydliga figurer.

Vh • Eleven kan muntligt med klar tankegång redovisa och förklara arbetsgången i problemlösningen med ett acceptabelt matematiskt uttryckssätt.

Vi • Eleven utför relativt självständigt ett mindre projektarbete och redovisar arbetsmetod och resultat klart och tydligt och på en god nivå.