Skolverket
Enheten för Pedagogiska Mätningar
Umeå Universitet

PBMaE 01-05

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-15

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Uppgiftsformat	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer därpå provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1.
Provet	Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd".

Namn: ____________________

Skola: ____________________ Klass/program: ____________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (1386)
1/0

Lös differentialekvationen $y' = 3y$ *Endast svar fordras*

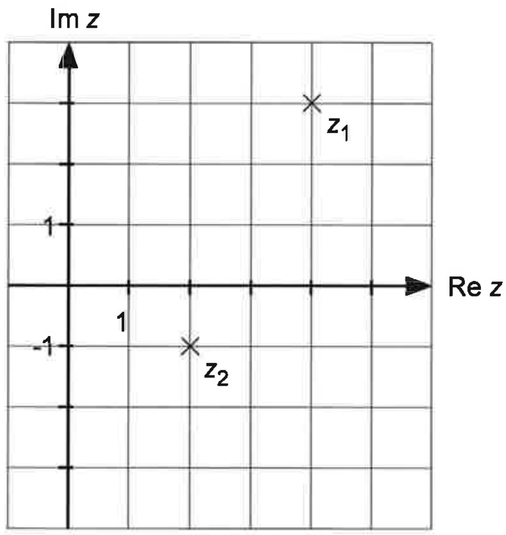
Uppgift nr 2 (1387)
2/0

Lös ekvationen $z^2 = 2z - 4$

Uppgift nr 3 (1480)
2/0

Talen z_1 och z_2 är markerade i det komplexa talplanet.

Beräkna $\frac{z_1}{z_2}$ och svara på formen $a + bi$



Uppgift nr 4 (1389)
1/0

I varje punkt (x, y) på en kurva är tangentens riktningskoefficient lika med dubbla värdet av y-koordinaten.

Beskriv detta med en differentialekvation. *Endast svar fordras*

Uppgift nr 5 (1390)
3/0

Bestäm den funktion $y(x)$ som är en lösning till $y'' = 4$ och uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$

Uppgift nr 6 (1557)
2/0

Beräkna ett närmevärde till $y(1)$ för den lösning till differentialekvationen $y' = -0{,}5y^2$ som uppfyller att $y(0) = 1$.

Använd en numerisk metod med steglängden 0,5

Uppgift nr 7 (1391)
1/2

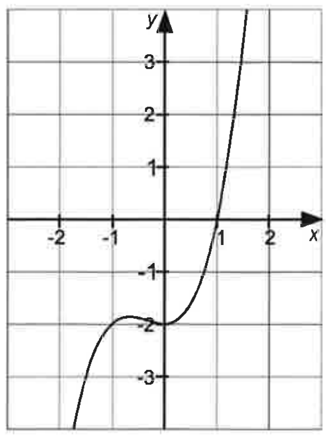
Origo och punkterna $z_1 = 4$ och $z_2 = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ bildar hörn i en triangel i det komplexa talplanet. Triangeln vrids 90° i positiv riktning (moturs) runt origo.

Bestäm exakt på formen $a + bi$ läget för triangelns nya hörn.

Uppgift nr 8 (1481)
1/2

Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.

Bestäm alla rötter till ekvationen $f(x) = 0$



Uppgift nr 9 (1394)
0/3

Lös ekvationen $e^{ix} + e^{-ix} = e^{i\pi}$, $0 \le x \le 2\pi$

Uppgift nr 10 (1395)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 8y' + 12y = 0$ som uppfyller villkoren $y'(0) = 0$ och $y(0) = 1$

Uppgift nr 11 (966)
2/0 , 2/0

I september 1991 upptäckte man de mycket välbevarade resterna av en urtidsmänniska uppe i alperna mellan Österrike och Italien, den s.k. Ismannen. Vid åldersbestämning av resterna efter honom använde man kol-14 metoden.

Illustrationen är hämtad ur Forskning & Framsteg 8:97 / Tecknare Ola Nyberg

Av det kol som finns i levande organismer utgör den radioaktiva kol-14 isotopen alltid en viss bestämd andel. Då organismen dör upptas inget mer kol. Mängden kol-14 kommer att minska p.g.a. radioaktivt sönderfall. Kol-14 sönderfaller med en hastighet som är 0,012% av den kvarvarande mängden per år.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet och förklara vad dina införda variabler står för.

b) Vid analysen fann man att halten av kol-14 var 52% av halten i levande material. För hur många år sedan dog Ismannen?

Uppgift nr 12 (964)
2/0 , 0/1 , 0/2

Två tal har summan 10. Om produkten dessutom ska vara 30 måste talen vara icke-reella.

a) Bestäm de två talen.

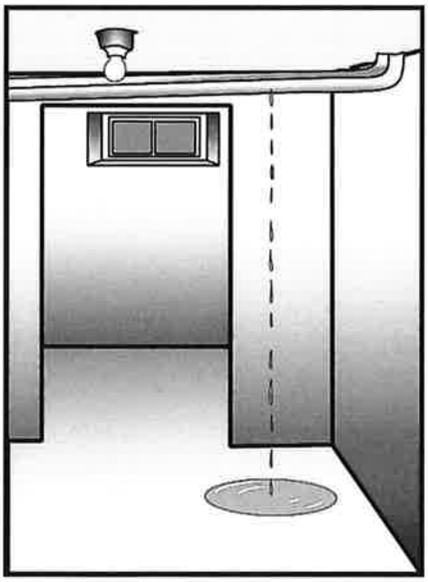
b) Om man vill att talen ska vara reella kan inte produkten vara 30 .
Vilka värden är möjliga för produkten i detta fall?

c) Vi kan naturligtvis i fallet med två reella tal behålla villkoret att produkten är 30 men ändra villkoret att summan är 10.
Vilka positiva värden kan summan ha om talen ska vara reella?

Uppgift nr 13 (1396)
0/3

Ett vattenrör i taket i en källare läcker vatten med 5 cm^3/s.
Antag att vattenpölen som bildas på golvet är cirkulär med den konstanta höjden 0,2 cm.
Avdunstningen är försumbar.

Hur snabbt ökar pölens radie då radien är 40 cm?



Uppgift nr 14 (1397)
0/4

I slutet av filmen *Titanic* låter Rose DeWitt Bukater ett smycke sjunka i havet över vraket. Något förenklat kan en sådan rörelse beskrivas med sambandet

$t = 0{,}1y' + 0{,}2y$

där y meter är det djup som smycket sjunkit till på t sekunder från det att Rose lagt det på vattenytan.

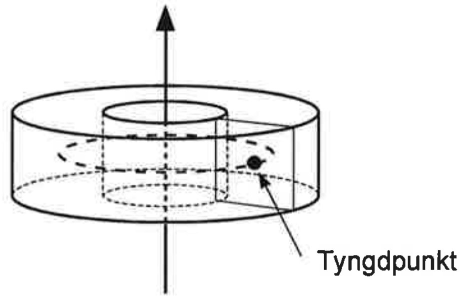
Hur lång tid skulle det enligt denna modell ta för smycket att nå vraket som ligger på 4000 meters djup?

Uppgift nr 15 (1558)
0/3 , 0/3/¤

En metod att beräkna volymen hos rotationskroppar ges av en sats som heter Guldins* andra regel:

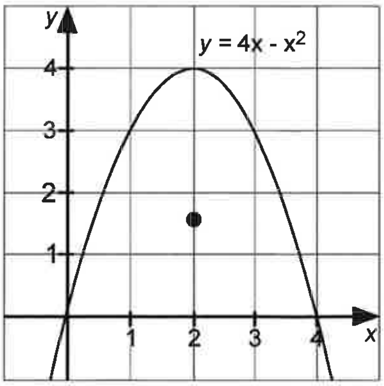
Volymen hos en rotationskropp är produkten av arean hos ytan som roterar och omkretsen av den cirkel som ytans tyngdpunkt beskriver.

Figuren bredvid visar den rotationskropp som alstras när en rektangelyta roterar kring en axel.
Rektangelns tyngdpunkt beskriver en cirkulär bana vid rotationen.



a) Tyngdpunkten för den yta som begränsas av grafen till $y = 4x - x^2$ och x-axeln har koordinaterna $\left(2, \frac{8}{5}\right)$, se figur till höger.

Använd Guldins andra regel och beräkna volymen hos den rotationskropp som bildas när denna yta får rotera kring x-axeln.



b) Beräkna y-koordinaten för tyngdpunkten hos den yta som begränsas av de positiva koordinataxlarna, linjen $x = 2$ och grafen till $y = 2x^2 - 4x + 4$.

* Paul Guldin var en schweizisk matematiker som levde 1577-1643. Han arbetade som lärare vid Jesuit Colleges i Rom och Graz och som professor i matematik i Wien. Hans viktigaste arbeten handlar om gravitation och rotationskroppar.

==

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

==

Uppgift nr 1 (1386)

Max 1/0

Korrekt svar $(y = Ce^{3x})$	+1 g

Uppgift nr 2 (1387)

Max 2/0

Redovisad godtagbar metod	+1 g
med korrekt svar $(z = 1 \pm i\sqrt{3})$	+1 g

Uppgift nr 3 (1480)

Max 2/0

Redovisad godtagbar metod (t.ex. förlängning med nämnarens konjugat)	+1 g
med korrekt svar $(1 + 2i)$	+1 g

Uppgift nr 4 (1389)

Max 1/0

Korrekt tecknad differentialekvation $(y' = 2y)$	+1 g

Uppgift nr 5 (1390)

Max 3/0

Korrekt bestämd allmän lösning $(y = 2x^2 + Ax + B)$	+1 g
med godtagbar bestämning av funktionen $(y = 2x^2 + 2x + 1)$	+1-2 g

Uppgift nr 6 (1557)

Max 2/0

Redovisad godtagbar metod	+1 g
med godtagbart svar $(y(1) \approx 0{,}609)$	+1 g

Uppgift nr 7 (1391)

Max 1/2

Korrekt bestämning av nytt läge för hörnet $z_1 = 4$ ($z_3 = 4\mathrm{i}$)	+1 g
Redovisad godtagbar bestämning av nytt läge för hörnet $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i}$ ($z_4 = -3\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$)	+1-2 vg

Uppgift nr 8 (1481)

Max 1/2

Korrekt bestämd reell rot	+1 g
Korrekt genomförd faktoruppdelning $\left((x-1)(x^2+2x+2)\right)$	+1 vg
Korrekt bestämning av rötterna ($x_1 = 1$, $x_{2,3} = -1 \pm \mathrm{i}$)	+1 vg

Uppgift nr 9 (1394)

Max 0/3

Redovisad godtagbar ansats (t.ex. $\cos x + \mathrm{i}\sin x + \cos x - \mathrm{i}\sin x = -1$)	+1 vg
med redovisad godtagbar lösning $\left(x_1 = \frac{2\pi}{3},\ x_2 = \frac{4\pi}{3}\right)$	+1-2 vg

Uppgift nr 10 (1395)

Max 3/0

Korrekt bestämd allmän lösning $\left(y = Ce^{6x} + De^{2x}\right)$	+1 g
med godtagbar bestämning av lösningen till differentialekvationen ($y = -\,0{,}5e^{6x} + 1{,}5e^{2x}$)	+1-2 g

Uppgift nr 11 (966)

Max 4/0

a)	Korrekt tecknad differentialekvation ($\frac{dy}{dt} = -\,0{,}00012y$)	+1 g
	med godtagbara förklaringar av införda variablers innebörd	+1 g
b)	Godtagbar metod	+1 g
	Godtagbar beräkning av när Ismannen dog (För 5400 år sedan)	+1 g

Uppgift nr 12 (964)

Max 2/3

a)	Redovisad godtagbar lösning ($5+i\sqrt{5}$, $5-i\sqrt{5}$)	+1-2 g
b)	Redovisad godtagbar lösning (produkten ≤ 25)	+1 vg
c)	Redovisad godtagbar lösning (summan $\geq \sqrt{120}$)	+1-2 vg

Uppgift nr 13 (1396)

Max 0/3

Redovisad ansats som tyder på förståelse för problemet	+1 vg
med korrekt tolkning av textens givna data	+1 vg
Godtagbart svar (1 mm/s)	+1 vg

Uppgift nr 14 (1397)

Max 0/4

Godtagbar metod för bestämning av allmän lösning (bestämning av y_h och y_p samt $y = y_h + y_p$, se formelblad)	+1 vg
med korrekt allmän lösning ($y = Ce^{-2t} + 5t - 2{,}5$)	+1 vg
med redovisad godtagbar bestämning av tiden (t = 800 s)	+1-2 vg

Uppgift nr 15 (1558)

Max 0/6

a)	Redovisad godtagbar ansats (eleven inser sambandet $V_x = A \cdot 2\pi \cdot y$)	+1 vg
	med godtagbar bestämning av volymen $\left(\frac{512}{15}\pi \text{ v.e.}\right)$	+1-2 vg
b)	Redovisad godtagbar ansats (eleven inser sambandet $y = \frac{V_x}{2\pi A}$)	+1 vg
	med godtagbar bestämning av tyngdpunktens y-koordinat ($y = \frac{7}{5}$)	+1-2 vg