Skolverket

Enheten för Pedagogiska Mätningar
Umeå universitet

PBMaE 03-05

PROV I MATEMATIK KURS E
FRÅN
NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-15

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänd" ska kraven för "Väl godkänd" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn:____

Skola:____________________ Klass/program:______________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3§ sekretesslagen. För allt material som kommer ur provbanken gäller sekretessen tills annat meddelas (minst tio år, till och med utgången av år 2013).

Uppgift nr 1 (1388)
2/0

Beräkna $\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ och svara på formen $a+b\mathrm{i}$

Uppgift nr 2 (1343)
2/0

Ange ett icke-reellt tal som har absolutbeloppet 5.

Visa också att talet har detta absolutbelopp.

Uppgift nr 3 (993)
2/0

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$y'' - 8y' + 16y = 0$

Uppgift nr 4 (2295)
1/1

Bestäm konstanterna a och b så att funktionen $y = \sin 2x$ blir en lösning till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$

Uppgift nr 5 (2399)
1/0 , 1/0 , 1/0

Nedanstående figur illustrerar riktningsfältet till en differentialekvation som beskriver hur antalet fiskar i en liten sjö förändras beroende på hur många fiskar det fanns från början.

a) Hur många fiskar finns det i sjön efter 30 veckor om det var 100 fiskar från början? Svara med det av följande alternativ som passar bäst.

Endast svar fordras

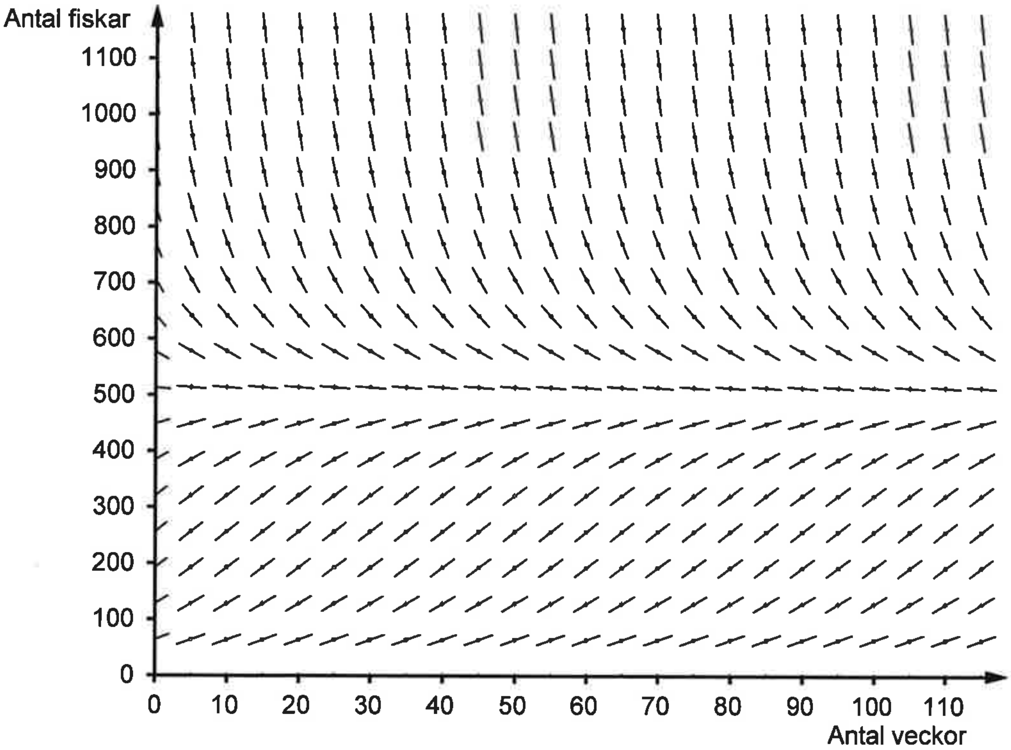
A) 300 B) 375 C) 450 D) 525 E) 600

b) Hur många fiskar finns det efter 15 veckor om det var 800 fiskar från början? Svara med det av följande alternativ som passar bäst.

Endast svar fordras

A) 350 B) 425 C) 500 D) 575 E) 650

c) Hur många fiskar kan denna sjö föda på lång sikt? *Endast svar fordras*

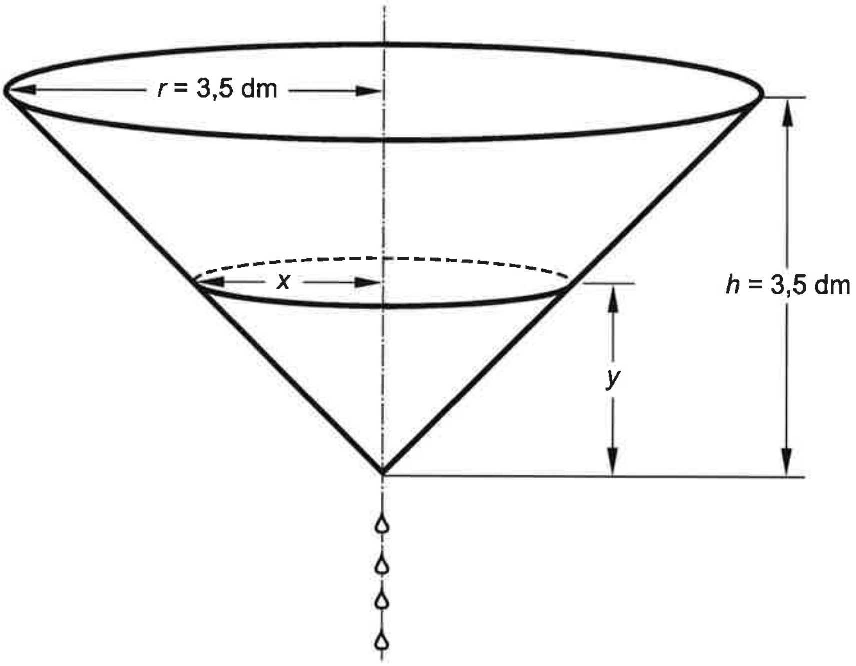


Uppgift nr 6 (1732)
1/0

En konisk behållare läcker vatten. Behållarens mått framgår av nedanstående figur. Låt V beteckna vattnets volym vid tiden t. Vid en viss tidpunkt, när vattnets höjd är 1,9 dm, läcker det ut 0,022 liter/min.

Ett av följande påståenden är då korrekt. Vilket? *Endast svar fordras*

A) $\frac{dV}{dx} = -0{,}022$ liter/min
B) $\frac{dV}{dy} = -0{,}022$ liter/min
C) $\frac{dV}{dt} = -0{,}022$ liter/min
D) $\frac{dV}{dx} = 0{,}022$ liter/min
E) $\frac{dV}{dy} = 0{,}022$ liter/min
F) $\frac{dV}{dt} = 0{,}022$ liter/min
G) $\frac{dy}{dt} = -1{,}9$ dm/min
H) $\frac{dy}{dt} = 1{,}9$ dm/min



Uppgift nr 7 (2514)
1/1

Derivera funktionen

$f(x) = x \cdot \ln x$

och använd ditt resultat som en hjälp när du bestämmer en primitiv funktion till

$g(x) = \ln x$

Uppgift nr 8 (1445)
0/3

Lös ekvationen $x^3 + 2 + 3x^2 = 6x$

Uppgift nr 9 (2299)
0/3

De komplexa tal z som uppfyller olikheterna $|z - (1 + \mathrm{i})| \le 1$ och $\operatorname{Im} z \ge \operatorname{Re} z + 1$ bildar ett område i komplexa talplanet. Rita en figur över området och beräkna dess area.

Uppgift nr 10 (2400)

2/0

Lös ekvationen $z^2 + 34z + 545 = 0$

Uppgift nr 11 (1746)

1/0 , 1/0 , 1/0

Då området som begränsas av kurvan $y = \sqrt{4 - x}$, y-axeln och x-axeln roteras runt x-axeln uppkommer en rotationskropp.

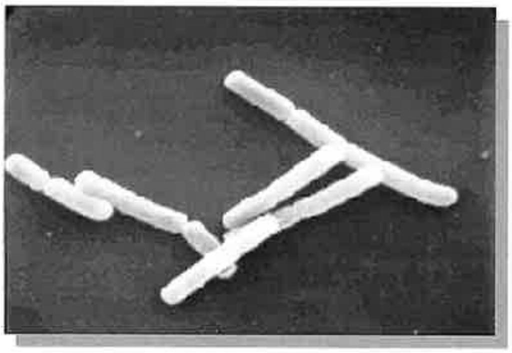
a) Rita en figur som illustrerar rotationskroppen.

b) Teckna den integral som ger rotationskroppens volym.

c) Beräkna rotationskroppens volym.

Uppgift nr 12 (2403)

1/0 , 1/0 , 2/0 , 0/1



Ät bakterier så blir du frisk!
Mjölksyrabakterier har länge använts vid beredning av olika typer av livsmedel, t.ex. filmjölk och yoghurt, främst för att förlänga hållbarheten. Forskare hävdade redan i början av 1900-talet att den långa livslängden bland invånarna i Bulgarien kunde förklaras med deras konsumtion av denna typ av mjölkprodukter. Idag ingår mjölksyrabakterien *Lactobacillus acidophilus* (bilden) i flera olika livsmedel, bland annat i A-fil, som rekommenderas vid tillfälliga mag- och tarmbesvär.

Mjölksyrabakterier (*Lactobacillus acidophilus*) tillsätts i en näringslösning. Antalet bakterier ökar så länge det finns näring och utrymme. För att skapa en modell antar vi att bakteriepopulationens tillväxthastighet i varje ögonblick är proportionell mot antalet bakterier.

Låt y vara antalet bakterier efter t timmar.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver bakterietillväxten.

b) Bestäm den allmänna lösningen till denna differentialekvation.

Klockan 12.00 uppskattades antalet bakterier vara 200 st och 3 timmar senare 3000 st. Låt t vara tiden i timmar efter klockan 12.00.

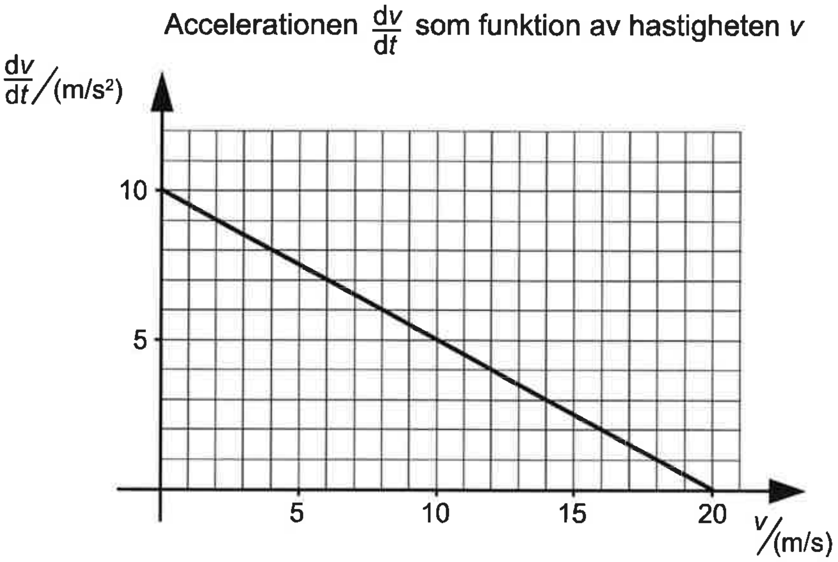
c) Bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller de givna villkoren.

d) Om modellen gäller, hur snabbt ökar bakterieantalet vid den tidpunkt då antalet bakterier är 10 miljoner?

Uppgift nr 13 (2402)

0/1 , 0/4/¤

En trälåda släpps från en stillastående luftballong. Under fallet mot marken minskar lådans acceleration på grund av luftmotståndet. Grafen nedan beskriver sambandet mellan accelerationen och hastigheten i en förenklad modell över fallrörelsen. I startögonblicket gäller att hastigheten är 0 m/s.



a) Ställ upp den differentialekvation som beskriver sambandet mellan $\frac{dv}{dt}$ och v.

Endast svar fordras

b) Beräkna hur högt ovanför marken trälådan släpptes, om den träffade marken efter 8,0 sekunder.

Uppgift nr 14 (2401)

0/5/¤

Ett område i första kvadranten begränsas av y-axeln, linjen $y = 1$ och kurvan $y = \frac{x^2}{b} + b$, där b är en konstant sådan att $0 < b < 1$.

Låt området rotera kring y-axeln och bestäm b exakt så att rotationskroppens volym blir maximal.

Uppgift nr 15 (2192)
3/5/¤

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:
- hur många påståenden du formulerat
- hur väl du formulerat dina påståenden
- hur många påståenden du bevisat
- hur väl du genomfört dina bevis
- hur väl du redovisat ditt arbete
- hur väl du använder det matematiska språket

Det komplexa talet z ges av $z(a)=\dfrac{a+\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}$ där a är ett reellt tal. Du ska undersöka hur z beror på värdet av a. I tabellerna nedan redovisas värdet av z för några värden på a.

a	$z(a)$
7	$\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\mathrm{i}$
-7	$\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\mathrm{i}$
5	$\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$
-5	$\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$
2	
-2	

a	$z(a)$
4	$\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\mathrm{i}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\mathrm{i}$
$\frac{1}{5}$	$-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$
$\frac{1}{7}$	$-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\mathrm{i}$
3	
$\frac{1}{3}$	

- Beräkna de z-värden som saknas i tabellerna. Rita in alla z-värden i ett och samma komplexa talplan.

- Genom att studera tabellerna och titta på hur z-värdena ligger i det komplexa talplanet kan man förmoda att vissa påståenden för $z(a)$ är sanna för alla reella a eller för alla reella $a \neq 0$. (Jämför till exempel $z(a)$ med $z(-a)$.)

  Formulera två påståenden som är sanna för alla reella a eller för alla reella $a \neq 0$, antingen i ord eller algebraiskt.

- Bevisa de påståenden som du har formulerat.

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Uppgift nr 1 (1388)

	Max 2/0
Redovisad godtagbar ansats	+1 g
med korrekt svar $(0{,}2 + 0{,}6\text{i})$	+1 g

Uppgift nr 2 (1343)

	Max 2/0
Något korrekt tal med korrekt verifiering	+1-2 g

Uppgift nr 3 (993)

	Max 2/0
Korrekt uppställd och löst karakteristisk ekvation	+1 g
med korrekt svar $(y = \mathrm{e}^{4x}(Cx + D))$	+1 g

Uppgift nr 4 (2295)

	Max 1/1
Redovisad godtagbar metod	+1 g
med korrekt svar ($a = 0$ och $b = 4$)	+1 vg

Uppgift nr 5 (2399)

		Max 3/0
a)	Korrekt svar (375)	+1 g
b)	Korrekt svar (575)	+1 g
c)	Godtagbart svar (ca 500 fiskar)	+1 g

Uppgift nr 6 (1732)

	Max 1/0
Korrekt svar $\left(\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0{,}022 \text{ liter/min}\right)$	+1 g

Uppgift nr 7 (2514)

Max 1/1

Redovisad godtagbar derivering $(1+\ln x)$	+1 g
Redovisad godtagbar bestämning av primitiv funktion $(x\ln x - x)$	+1 vg

Uppgift nr 8 (1445)

Max 0/3

Inser att $x = 1$ är en rot	+1 vg
Redovisad godtagbar bestämning av övriga rötter $(x = -2 \pm \sqrt{6})$	+1-2 vg

Uppgift nr 9 (2299)

Max 0/3

Korrekt tolkning av en av olikheterna	+1 vg
Korrekt område markerat	+1 vg
Redovisad godtagbar areaberäkning $\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\text{ae}\right)$	+1 vg

Uppgift nr 10 (2400)

Max 2/0

Redovisad godtagbar metod	+1 g
med korrekt svar $(-17 \pm 16\mathrm{i})$	+1 g

Uppgift nr 11 (1746)

Max 3/0

a)	Redovisad godtagbar figur	+1 g
b)	Korrekt tecknad integral $\left(V = \int_0^4 \pi(\sqrt{4-x})^2\,\mathrm{d}x\right)$	+1 g
c)	Godtagbart beräknad volym (25 ve)	+1 g

Uppgift nr 12 (2403)

Max 4/1

a)	Korrekt uppställd differentialekvation $(y' = k \cdot y)$	+1 g
b)	Korrekt allmän lösning $\left(y = C \cdot \mathrm{e}^{kt}\right)$	+1 g
c)	Redovisad godtagbar metod	+1 g
	med godtagbart svar $\left(y = 200 \cdot \mathrm{e}^{0,9t}\right)$	+1 g
d)	Redovisad godtagbar metod med godtagbart svar (9 miljoner bakterier per timme)	+1 vg

Uppgift nr 13 (2402)

Max 0/5/¤

a)	Korrekt uppställd differentialekvation $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10 - 0,5v\right)$	+1 vg
b)	Redovisad godtagbar allmän lösning ($v = A\mathrm{e}^{-0,5t} + 20$)	+1 vg
	Redovisad godtagbar bestämning av konstant ($A = -20$)	+1 vg
	Redovisad godtagbar metod för bestämning av fallhöjden	+1 vg
	med godtagbart svar (120 m)	+1 vg
	Eleven beräknar fallhöjden korrekt. Eleven redovisar en klar tankegång med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk	¤

Uppgift nr 14 (2401)

Max 0/5/¤

Uppställd integral för beräkning av rotationsvolym $\left(V = \pi\int_b^1 (y-b)b\,\mathrm{d}y\right)$	+1-2 vg
med godtagbart uttryck för volymen $\left(\pi\left(\dfrac{b^3}{2} - b^2 + \dfrac{b}{2}\right)\right)$	+1 vg
Korrekt svar $\left(b = \dfrac{1}{3}\right)$	+1 vg
med godtagbar verifiering av maximum	+1 vg
Eleven bestämmer korrekt det exakta värdet på *b* och verifierar att detta ger maximal volym. Eleven använder generella metoder både för bestämning och verifiering. Eleven redovisar en klar tankegång med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk	¤

Uppgift nr 15 (2192)

Max 3/5/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** → **Högre**			**Totalpoäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven kompletterar tabellerna och ritar in *z*-värdena i det komplexa talplanet och formulerar något relevant påstående om *z*, även om det inte gäller alla värden på *a*. (3/0)	Eleven kompletterar tabellerna och ritar in *z*-värdena i det komplexa talplanet. Eleven formulerar ett relevant generellt påstående. (3/1)	Eleven kompletterar tabellerna och ritar in *z*-värdena i det komplexa talplanet. Eleven formulerar två relevanta generella påståenden. (3/2)	3/2
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.*		Eleven bevisar ett relevant generellt påstående. (0/1)	Eleven bevisar två relevanta generella påståenden. (0/2)	0/2
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. (0/1)	0/1
Summa				3/5

Eleven kompletterar tabellerna och ritar in *z*-värdena i ett komplext talplan. Eleven formulerar och bevisar två relevanta generella påståenden. Eleven redovisar en klar tankegång med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. ¤

Elevlösningar

Uppgift nr 15 (2192)

Elevlösning 1 (3 g och 0 vg)

$$z(2) = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4+2i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5}$$

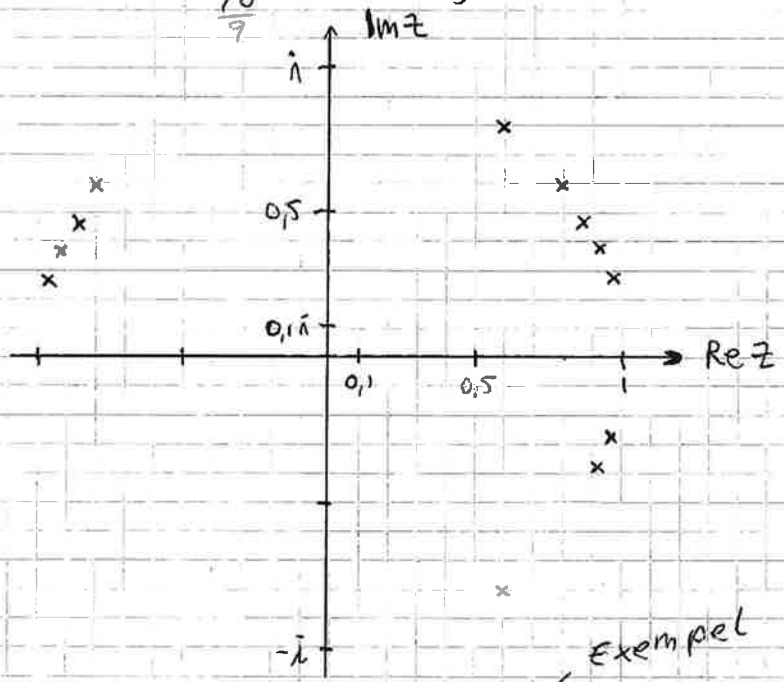
$$z(3) = \frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9+6i+i^2}{9-i^2} = \frac{8}{10} + \frac{6i}{10}$$

$$z(-2) = \frac{(-2+i)(-2+i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{4-4i+i^2}{4-i^2} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3i}{5}$$

$$z\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}+i\right)\left(\frac{1}{3}+i\right)}{\left(\frac{1}{3}+i\right)\left(\frac{1}{3}-i\right)} = \frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}i+i^2}{\frac{1}{9}-i^2}$$

$$= \frac{-\frac{8}{9}+\frac{2}{3}i}{\frac{10}{9}} = -\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$



Exempel

(1) * Om man sätter in siffran ② i ekvationen blir det $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ om man sen väljer att sätta in (-2) så behöver man inte räkna om man bara byter + framför Im-talet till ett − och då blir det $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

(2) * Om man tar talet ③ t ex. och sätter in så får man $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ men om man istället vill ha $\frac{1}{③}$ så är det bara att byta + framför reela talet till ett minus så det blir $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

<u>Bevis</u>: (2)

$$z(3) = \frac{(3+i)}{(3-i)} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{9+6i+i^2}{9-i}$$

$$\frac{8}{10} + \frac{6}{10}i = \boxed{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}$$

$$z\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}+i\right)}{\left(\frac{1}{3}-i\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3}+i\right)\left(\frac{1}{3}+i\right)}{\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{3}+i\right)} = \frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}i+i^2}{\frac{1}{9}-i^2}$$

$$\frac{-\frac{8}{9}+\frac{2}{3}i}{\frac{10}{9}} = \boxed{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}$$

<u>Bevis</u>: (1)

$$z(2) = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4+4i+i^2}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5}$$

$$= \boxed{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$$

$$z(-2) = \frac{(-2+i)}{(-2-i)} = \frac{(-2+i)(-2+i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{4-4i+i^2}{4-i^2}$$

$$\frac{3-4i}{5} = \boxed{\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}}$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	3/0	Inser två samband men kan inte uttrycka dem generellt.
Matematiska resonemang	X	0	
Redovisning och matematiskt språk	X	0	
Summa		**3/0**	

Uppgift nr 15 (2192)

Elevlösning 2 (3 g och 1 vg)

$$z(a) = \frac{(a+i)(a+i)}{(a-i)(a+i)} = \frac{a^2+ai+ai+i^2}{a^2-i^2} = \frac{a^2+2ai-1}{a^2+1} =$$

$$= \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2a}{a^2+1} i$$

$$z(2) = \frac{2^2-1}{2^2+1} + \frac{2 \cdot 2}{2^2+1} i = \frac{4-1}{4+1} + \frac{4}{4+1} i = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$$

$$0{,}6 + 0{,}8i \qquad |z| = 1$$

$$z(-2) = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1} + \frac{2 \cdot (-2)}{(-2)^2+1} i = \frac{4-1}{4+1} + \frac{-4}{4+1} i = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$$

$$0{,}6 - 0{,}8i \qquad |z| = 1$$

$$z(3) = \frac{3^2-1}{3^2+1} + \frac{2 \cdot 3}{3^2+1} i = \frac{9-1}{9+1} + \frac{6}{9+1} i = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} i =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{5} i \qquad 0{,}8 + 0{,}6i \qquad |z| = 1$$

$$z\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1} + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1} i = \frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}+1} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}+1} i = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} i =$$

$$= -\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\underset{5}{\cancel{10}}} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} i = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} i \qquad -0{,}8 + 0{,}6i$$

$$|z| = 1$$

- Ju större värdet på a blir, desto mindre blir Im(z)

  $z(10^6) = 1 + 2 \cdot 10^{-6} i$

  $z(10^{10}) = 1 + 2 \cdot 10^{-11} i$

- För alla värden på a är $|z| = 1$

  $z(7) \approx 0{,}96 + 0{,}28i \quad |z| = \sqrt{0{,}96^2 + 0{,}28^2} = 1$

  $z(\frac{1}{5}) \approx -0{,}92 + 0{,}38i \quad |z| = \sqrt{0{,}92^2 + 0{,}38^2} = 1$

  $z(10) \approx 0{,}98 + 0{,}2i \quad |z| = \sqrt{0{,}98^2 + 0{,}2^2} = 1$

  osv
  ⋮

  Se figur. Längden på pilarna är lika långa.

- Ex $z(2) = \overline{z}(-2)$

  $z(2) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$

  $z(-2) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$

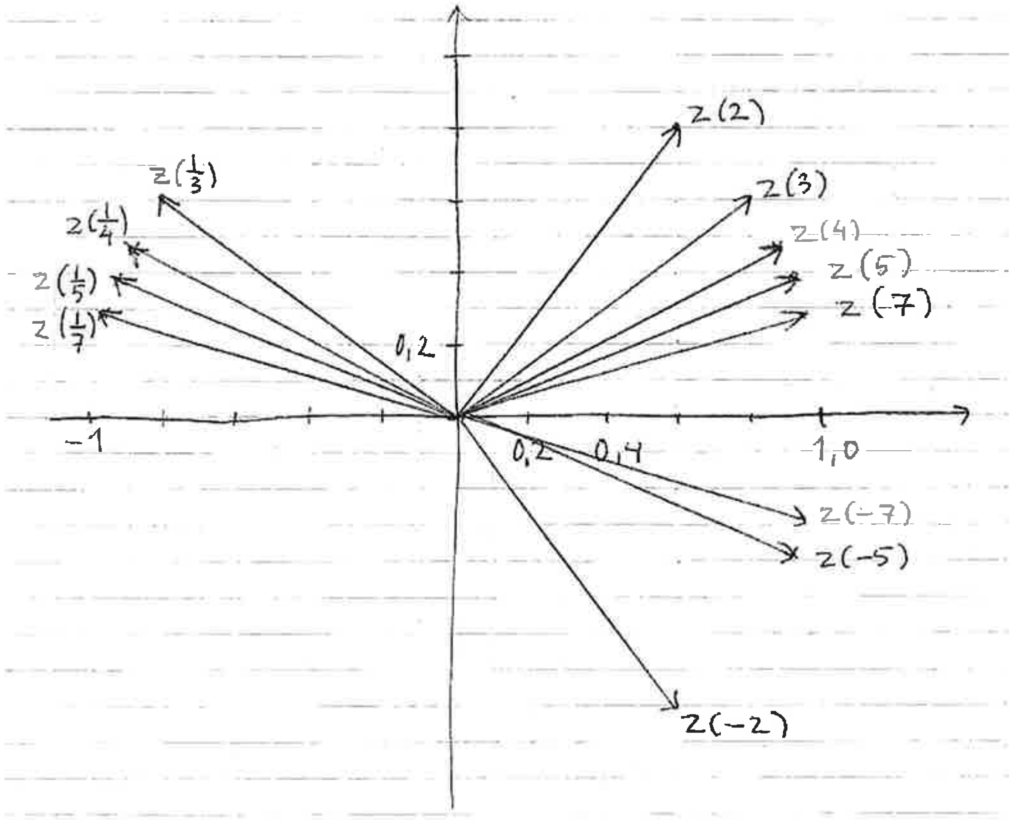
  /z(2) är lika med konjugatet för z(−2)/

  $z(7) = \frac{48}{50} + \frac{14}{50} i$

  $z(-7) = \frac{48}{50} - \frac{14}{50} i$

  Dvs. argumenten z är lika stora, men är positivt och ett negativt.

  Se. figur.



	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		3/1	Endast påståendet att $\lvert z \rvert = 1$ är ett generellt påstående som gäller för alla värden på *a*. Övriga påståenden ger ingen poäng enligt bedömningsmatrisen.
Matematiska resonemang		0/0	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	Lösningen är alltför ofullständig.
Summa		**3/1**	

Uppgift nr 15 (2192)

Elevlösning 3 (3 g och 4 vg)

$$z(a) = \frac{a+i}{a-i} = \frac{(a+i)(a+i)}{(a-i)(a+i)} = \frac{a^2+2ai+i^2}{a^2-i^2} =$$

$$= \frac{a^2+2ai-1}{a^2+1} = \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2ai}{a^2+1}$$

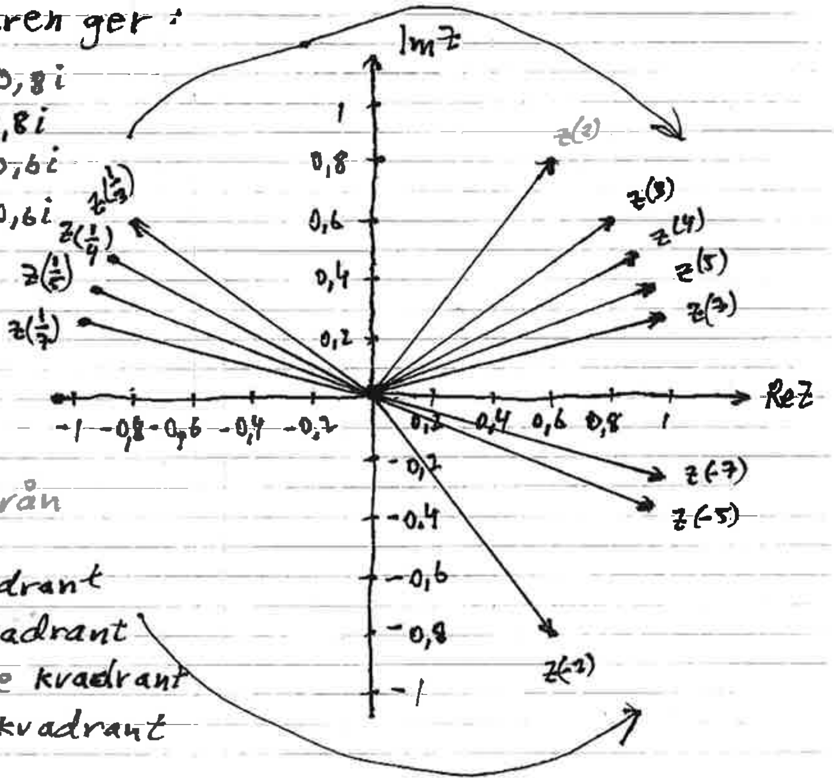
Miniräknaren ger:

$z(2) = 0{,}6 + 0{,}8i$

$z(-2) = 0{,}6 - 0{,}8i$

$z(3) = 0{,}8 + 0{,}6i$

$z(\frac{1}{3}) = -0{,}8 + 0{,}6i$



z vandrar från
-1 mot 1
$a > 1 \Rightarrow$ 1:a kvadrant
$0 < a < 1$ 2:a kvadrant
$-1 < a < 0 \Rightarrow$ 3:e kvadrant
$a < -1 \Rightarrow$ 4:e kvadrant

$|z| = 1$ (gäller för alla a)

$z(0) = \frac{i}{-i} = -1$

$$z(a) = \frac{(a^2-1)}{(a^2+1)} + \frac{2a}{(a^2+1)} i$$

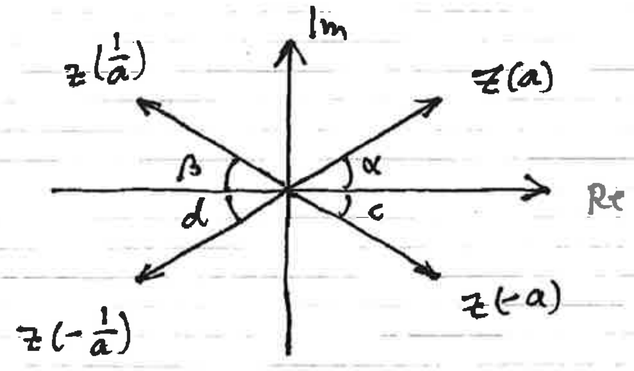
Påst: $|z| = 1$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2}$$

$$|z|^2 = \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2$$

$$|z|^2 = \left(\frac{a^4-2a^2+1}{a^4+2a^2+1}\right) + \left(\frac{4a^2}{a^4+2a^2+1}\right) = \frac{a^4+2a^2+1}{a^4+2a^2+1} = \underline{\underline{1}}$$

$|z| = \sqrt{1} = \overset{+}{(-)}1$ V.S.B.



$\alpha = \beta = c = d$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		3/2	Formulerar ett algebraiskt och ett grafiskt (sista bilden) påstående.
Matematiska resonemang		0/1	Bevisar ett påstående
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Matematiskt språk korrekt om än lite kortfattat.
Summa		**3/4**	

Kommentar: Elevens arbete saknar endast ett bevis för att det ska bedömas med ¤.