Skolverket

Enheten för Pedagogiska Mätningar
Umeå universitet

PBMaE 04-05

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-8
Del II: Uppgift 9-16

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 16 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänd" ska kraven för "Väl godkänd" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn: ______________________________

Skola: ____________________ Klass/program: ____________________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (2812)
1/0

Lös differentialekvationen $y' = 7y$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (2586)
2/0

Skriv uttrycket $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ på formen $a+b\mathrm{i}$.

Uppgift nr 3 (2569)
2/0

Lös ekvationen $z^2 + 10\mathrm{i}z + 11 = 0$.

Uppgift nr 4 (1741)
2/0

Bestäm konstanten k så att funktionen $y = 2\mathrm{e}^{-3x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y'' + ky' = 24\mathrm{e}^{-3x}$.

Uppgift nr 5 (2573)
2/0

Mira och Görel ska förenkla uttrycket $(2+a\mathrm{i})^3$.

I formelbladet står det:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Med hjälp av formelbladet skriver Mira:

$(2+a\mathrm{i})^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot a\mathrm{i} + 3\cdot 2\cdot (a\mathrm{i})^2 + (a\mathrm{i})^3$ (M1)

$= 8 + 12a\mathrm{i} - 6a + a^3\mathrm{i}$ (M2)

$= (8-6a) + (12a + a^3)\mathrm{i}$ (M3)

Görel har inte upptäckt formeln utan räknar så här:

$(2+a\mathrm{i})^3 = (2+a\mathrm{i})(2+a\mathrm{i})^2 = (2+a\mathrm{i})(4+4a\mathrm{i}+a^2\mathrm{i}^2)$ (G1)

$= (2+a\mathrm{i})(4+4a\mathrm{i}-a^2)$ (G2)

$= 8 + 8a\mathrm{i} - 2a^2 + 4a\mathrm{i} + 4a^2\mathrm{i}^2 - a^3\mathrm{i}$ (G3)

$= 8 + 8a\mathrm{i} - 2a^2 + 4a\mathrm{i} - 4a^2 - a^3\mathrm{i}$ (G4)

$= (8-6a^2) + (12a - a^3)\mathrm{i}$ (G5)

Miras och Görels förenklingar resulterade i olika uttryck vilket förvånade dem.

Rätta de fel som förekommer i beräkningarna.

Uppgift nr 6 (2892)
0/3

Visa att $\dfrac{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

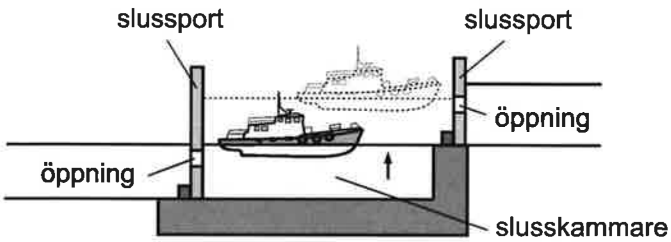
Uppgift nr 7 (2661)
0/3

För vilka komplexa tal z gäller både att $\mathrm{Re}\, z = 3\cdot \mathrm{Im}\, z$ och att $z\cdot\bar{z} = z + \bar{z}$?

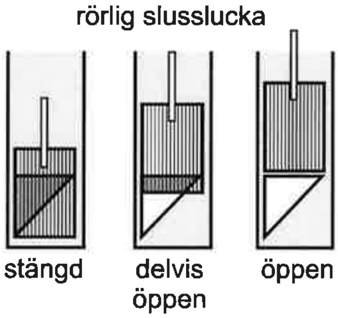
Uppgift nr 8 (2687)
0/1 , 0/2

För att en båt ska kunna färdas uppför en kanal använder man *slussar*. När båten kommer fram till en sluss så styrs den in i en slusskammare och slussporten bakom båten stängs. Vattennivån i slusskammaren höjs genom att vatten släpps in genom en öppning i den främre slussporten. Öppningens storlek regleras med hjälp av en lucka. När vattennivån inuti slusskammaren är densamma som vattennivån utanför porten kan porten öppnas och båten åka vidare.

sluss



rörlig slusslucka



I den här slussen är öppningen i slussporten triangulär, 6,0 dm bred och 6,0 dm hög. Själva luckan är rektangulär (se bild). Vattnet släpps in i slusskammaren genom att luckan höjs med en konstant hastighet på 0,30 dm/s.

Vattenflödet, F dm^3/s, är proportionellt mot öppningens area, A dm^2. När luckan är helt uppdragen forsar vattnet in i slusskammaren med 180 dm^3/s genom den triangulära öppningen.

a) Bestäm sambandet mellan vattenflödet och öppningens area.

b) Hur snabbt (dm^3/s^2) ökar vattenflödet genom öppningen då luckan har höjts 4,0 dm?

Uppgift nr 9 (2822)
1/0 , 1/0 , 1/0

Låt $z = 3 + \mathrm{i}$. Rita ett komplext talplan och markera följande tal.

a) $\bar{z}$

b) z^2

c) $-\mathrm{i}z$

Uppgift nr 10 (2976)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 8y' + 12y = 0$ som uppfyller villkoren $y'(0) = 0$ och $y(0) = 1$.

Uppgift nr 11 (990)
1/0 , 1/0

Låt området som begränsas av x-axeln, y-axeln, linjen $x = 5$ och grafen till funktionen

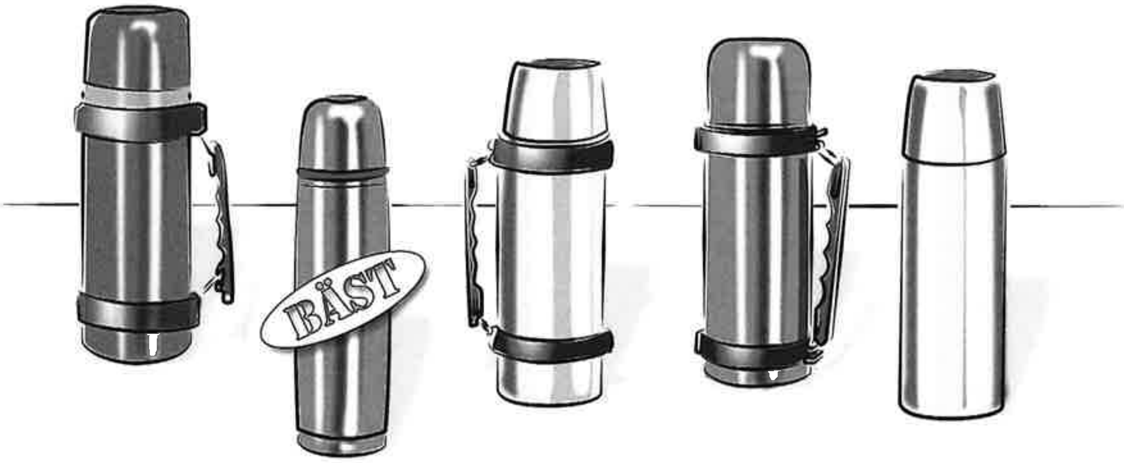
$$y = \frac{10}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

rotera kring x-axeln.

a) Ställ upp integralen som vid beräkning ger volymen av rotationskroppen.
Endast svar fordras

b) Beräkna med hjälp av miniräknare ett närmevärde för rotationskroppens volym. Svara med tre gällande siffror. *Endast svar fordras*

Uppgift nr 12 (1984)
1/0 , 1/2



En tidning testade hur bra fem olika termosmodeller var på att hålla värmen. Testet utfördes genom att en termos av varje modell fylldes med hett kaffe. Testet genomfördes utomhus där temperaturen var konstant 0 °C.

Utgå från att kaffet svalnar med en hastighet som är proportionell mot temperaturdifferensen till omgivningen.

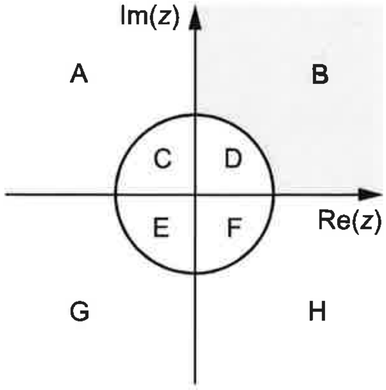
a) Teckna en differentialekvation som beskriver förändringen av kaffets temperatur.

Vid försökets början hade kaffet i termosarna temperaturen 95 °C. I den termos som höll värmen bäst svalnade kaffet från 77 °C till 62 °C på fyra timmar. I tidningens test definierades kaffet som odrickbart om temperaturen i termosen understeg 55 °C.

b) Hur lång tid från försökets början var kaffet fortfarande drickbart i den termos som höll värmen bäst?

Uppgift nr 13 (2576)
1/1/¤

I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med *A, B, C, D, E, F, G* och *H*. Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena.



Bestäm i vilket eller vilka områden talet $\frac{1}{z}$ kan ligga om z ligger i B.

Uppgift nr 14 (2977)
0/1 , 0/3

Figuren till höger visar en cylindrisk vedeldad badtunna. När man tömmer tunnan rinner vattnet ut snabbt till en början för att sedan rinna ut allt långsammare när vattendjupet minskar. Enligt en fysikalisk modell gäller då differentialekvationen:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V} \quad \text{där } k > 0$$

V är den kvarvarande vattenvolymen i m^3 och tiden t räknas i minuter.

a) Motivera varför $k > 0$ i detta fall.

$V(t) = \frac{1}{4}(C - kt)^2$ är den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Antag att $V(0) = 5{,}56$ och $V'(0) = -0{,}79$
Hur lång tid tar det att tömma tunnan?

Uppgift nr 15 (2813)
0/2/¤

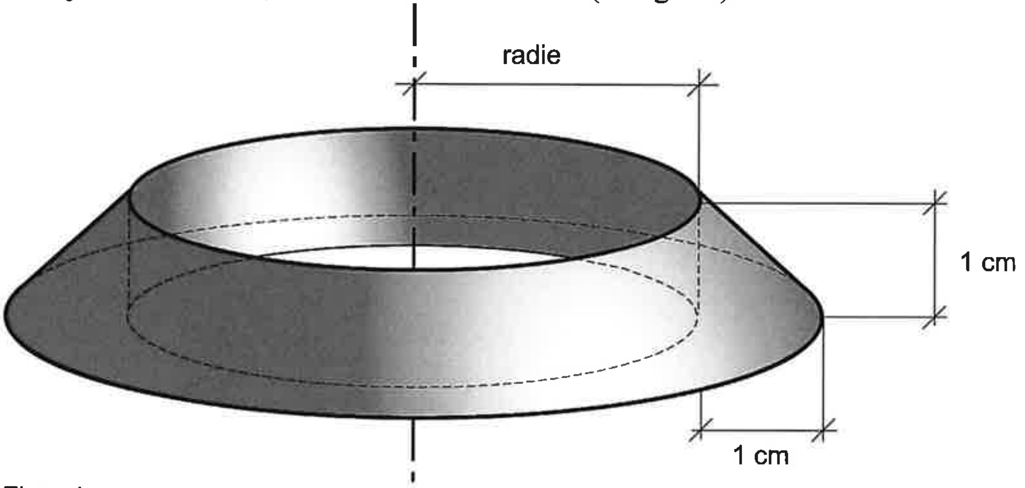
Pia ska bestämma alla lösningar till ekvationen $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$. Efter en stunds funderande bestämmer hon sig för att dividera $(x^3 - 4x^2 + 9x - 10)$ med $(x - 2)$.

Förklara i ord *varför* Pias sätt att börja gör det möjligt för henne att bestämma alla lösningar till ekvationen.

Uppgift nr 16 (2767)
2/4/¤

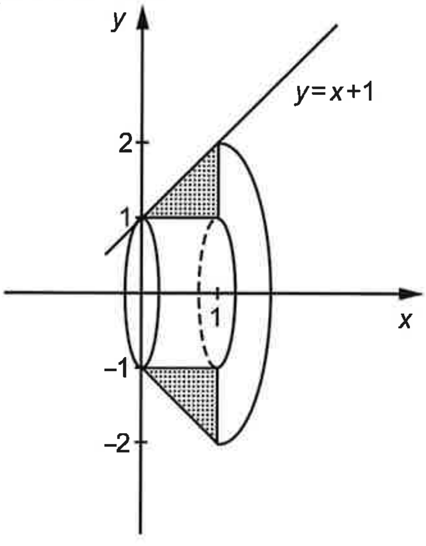
Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:
• hur långt du kommit i din undersökning
• hur generell din undersökning är
• hur väl du redovisat ditt arbete
• hur väl du använt det matematiska språket

Ett företag tillverkar tätningsringar för rör i olika storlekar. Alla ringar har både höjden och tjockleken 1 cm, men kan ha olika radier (se figur 1).

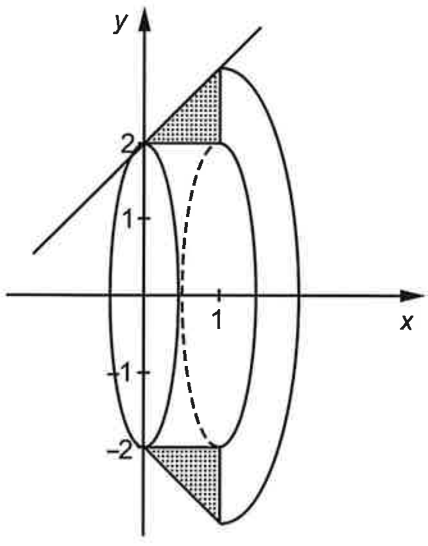


Figur 1

Företagets produktutvecklare funderar på att utöka sortimentet. De vill därför veta hur mycket materialåtgången ökar för varje centimeter som tätningsringarnas radie ökar. Tätningsringar kan representeras matematiskt genom rotation av trianglar runt x-axeln. I figur 2 och 3 ser du exempel på detta. I dessa figurer har ringarna radierna 1 cm respektive 2 cm.



Figur 2



Figur 3

- Undersök och beskriv hur tätningsringarnas volym förändras för varje centimeter som radien ökar.

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Uppgift nr 1 (2812)

Max 1/0

Korrekt svar $\left(y = C\,\mathrm{e}^{7x}\right)$	+1 g

Uppgift nr 2 (2586)

Max 2/0

Redovisad godtagbar ansats, t ex förlängt med nämnarens konjugat	+1 g
med korrekt svar $\left(0{,}2 + 1{,}4\mathrm{i}\right)$	+1 g

Uppgift nr 3 (2569)

Max 2/0

Redovisad godtagbar lösning ($z_1 = \mathrm{i},\ z_2 = -11\mathrm{i}$)	+1-2 g

Uppgift nr 4 (1741)

Max 2/0

Redovisad godtagbar ansats, t ex bestämt första- och andraderivatan	+1 g
med i övrigt redovisad godtagbar lösning ($k = -1$)	+1 g

Uppgift nr 5 (2573)

Max 2/0

Redovisad godtagbar rättning av ett av Miras fel	+1 g
Redovisad godtagbar rättning av ytterligare ett av Miras fel	+1 g

Uppgift nr 6 (2892)

Max 0/3

Redovisad godtagbar lösning + 1-3 vg

Exempel på två olika korrekta lösningar och hur de poängsätts ges nedan. Exemplen visar hur en poäng sätts för korrekt omvandling mellan potensform och vanlig polär form, en poäng för omvandling till formen $a+ib$ och en poäng för algebraisk förenkling eller förenkling av potensuttryck. Andra lösningsförslag får bedömas på likvärdigt sätt.

Exempel 1

$$\frac{6e^{\frac{i2\pi}{3}}}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}=2\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=2\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=1+i\sqrt{3}$$

+1 vg +1 vg +1 vg

Exempel 2

$$\frac{6e^{\frac{i2\pi}{3}}}{3e^{\frac{i\pi}{3}}}=2e^{\frac{i2\pi}{3}-\frac{i\pi}{3}}=2e^{\frac{i\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$

+1 vg +1 vg +1 vg

Uppgift nr 7 (2661)

Max 0/3

Redovisad godtagbar ansats, t ex tecknat uttrycken $a=3b$ och $(a+ib)(a-ib)=a+ib+a-ib$ +1 vg

med i övrigt redovisad godtagbar lösning $\left(z=0 \text{ och } z=\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i\right)$ +1-2 vg

Uppgift nr 8 (2687)

Max 0/3

a) Redovisat godtagbart samband $(F=10A)$ +1 vg

b) Redovisad godtagbar ansats, t ex uppställd kedjeregel $\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$ +1 vg

med godtagbar bestämning av $\frac{dF}{dt}$ (12) +1 vg

Uppgift nr 9 (2822)

Max 3/0

a)	Korrekt svar ($\bar{z} = 3 - \mathrm{i}$ markerat i talplanet)	+1 g
b)	Korrekt svar ($z^2 = 8 + 6\mathrm{i}$ markerat i talplanet)	+1 g
c)	Korrekt svar ($-\mathrm{i}z = 1 - 3\mathrm{i}$ markerat i talplanet)	+1 g

Uppgift nr 10 (2976)

Max 3/0

Redovisad korrekt bestämning av den allmänna lösningen, t ex $y = C\mathrm{e}^{6x} + D\mathrm{e}^{2x}$	+1 g
med redovisad godtagbar bestämning av funktionen ($y = -\ 0{,}5\mathrm{e}^{6x} + 1{,}5\mathrm{e}^{2x}$)	+1-2 g

Uppgift nr 11 (990)

Max 2/0

a)	Korrekt svar $\left(\pi \int_0^5 \left(\frac{10}{\sqrt{x^2+4}} \right)^2 \mathrm{d}x \right)$	+1 g
b)	Korrekt svar (187)	+1 g

Uppgift nr 12 (1984)

Max 2/2

a)	Godtagbart tecknad differentialekvation ($\frac{dy}{dt} = ky$)	+1 g
b)	Redovisad godtagbar ansats, t ex ansätter en exponentialfunktion som allmän lösning till differentialekvationen	+1 g
	med i övrigt redovisad godtagbar numerisk, grafisk eller algebraisk lösning (10 timmar)	+1-2 vg

Uppgift nr 13 (2576)

Max 1/1/¤

Redovisad godtagbar ansats, t ex beräknat $1/z$ för något $z \in B$ eller skrivit om uttrycket $\dfrac{1}{a+ib}$ som $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$	+1 g
Redovisad lösning som troliggör att $1/z$ ligger i F, t ex beräknat $1/z$ för flera $z \in B$ och formulerat hypotesen att $1/z \in F$	+1 vg
Eleven genomför en generell undersökning som visar att $1/z$ alltid ligger i F. Eleven redovisar en klar tankegång med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.	¤

Uppgift nr 14 (2977)

Max 0/4

a)	Godtagbar motivering ("Derivatan måste vara negativ för att volymen ska minska och då måste k vara större än 0")	+1 vg
b)	Redovisad godtagbar bestämning av konstanterna, t ex $C = 2\sqrt{5{,}56}$ och $k = \dfrac{0{,}79}{\sqrt{5{,}56}}$	+1-2 vg
	med redovisad godtagbar bestämning av tidpunkten då tunnan är tömd (14 minuter)	+1 vg

Uppgift nr 15 (2813)

Max 0/2/¤

En fullständig förklaring innehåller

- ett konstaterande av att $x = 2$ är en rot
- en hänvisning till innebörden av faktorsatsen för att motivera att divisionen går jämnt upp
- ett påpekande av att kvoten blir ett andragradspolynom vars nollställen motsvarar de övriga rötterna.

Förklaringen innehåller någon av ovanstående punkter	+1 vg
Förklaringen innehåller ytterligare en av ovanstående punkter	+1 vg
Elevens förklaring innehåller alla ovanstående punkter. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt.	¤

Uppgift nr 16 (2767)

Max 2/4/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** ⟶		**Högre**	**Total-poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problem-situation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven an-vänder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven tecknar ett godtagbart uttryck för volymen av en ring, t ex tecknar en rotationsinte-gral som ger voly-men för en ring. **1 g**	Eleven visar säkerhet i beräkningarna, t ex genom att korrekt beräkna skillnaden mellan volymerna för minst två ringar *eller* påbörjar en generell undersök-ning, t ex genom att teckna ett generellt uttryck för volymen av en ring. **1 g och 1 vg**	Eleven genomför en generell under-sökning, t ex genom att teckna ett generellt ut-tryck för en volymdifferens. **1 g och 2 vg**	1/2
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av mate-matiska resonemang.*	Eleven drar en slutsats om volymökningen baserat på ett specialfall (två beräknade volymer) *eller* en generell undersökning. **1 g**		Eleven drar en *godtagbar* slut-sats om volymökningen baserat på flera specialfall (minst tre beräknade volymer) *eller* en generell undersökning. **1g och 1 vg**	1/1
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner*			Redovisningen är lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**	0/1
Summa				2/4

Eleven undersöker med hjälp av generella metoder och beskriver hur tätningsringarnas volym förändras med radien (Volymen ökar med π cm^3 för varje cm radien ökar). Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. ¤

Elevlösningar

Uppgift nr 13 (2813) – Elevlösning 1 (2 vg)

3 $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$

$2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 10$

$8 - 16 + 18 - 10 = 0$

svar: det är bra efter som 2 är en rot till talet och då kan man bryta ut $x-2$ och då få en x^2 kurva som är mycket enklare att lösa

Kommentar: Även om förklaringen kan sägas innehålla de punkter som krävs för ¤ så är redovisningen inte lätt att följa. Lösningen innehåller felaktiga formuleringar och kan inte sägas hålla MVG-kvalitet.

Elevlösning 2 (2 vg samt ¤)

Restsatsen och faktorsatsen ger:

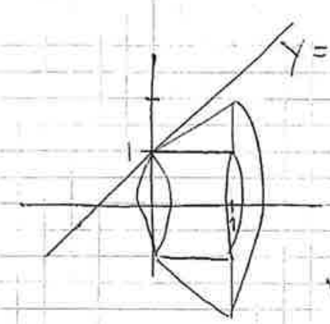
$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 10 = 8 - 16 + 18 - 10 = 0$

$\Rightarrow x - 2$ är en faktor

Svar: Eftersom $x-2$ är en faktor till det givna polynomet ger divisionen endast en kvot (ingen rest). Denna kvot kommer vara ett andragrads-polynom, ett polynom Pia lätt kan lösa med PQ-formeln. Detta ger henne två av rötterna. Eftersom hon nu vet att $x-2$ också är en faktor så är $x=2$ också en rot.

Kommentar: Förklaringen innehåller alla punkter som krävs för ¤. Redovisningen är lätt att följa. Även om vissa felaktigheter ingår (t ex att man kan "lösa" ett polynom) så är det matematiska språket lämpligt och i stort sett korrekt.

Uppgift nr 16 (2767) –



För att räkna på en ökande inre radie byts 1 i y=x+1 ut mot n. Då blir volymen

$$V=\int_0^1 \pi (x+n)^2 dx$$

$$V=\pi\int_0^1 (x^2+2nx+n^2)dx$$

$$V=\pi\left[\frac{x^3}{3}+nx^2+n^2x\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}+n+n^2\right)$$

$n=1,2,3,4,\ldots$

n	V	ΔV
1	$7\pi/3$	—
2	$19\pi/3$	4π
3	$37\pi/3$	6π
4	$61\pi/3$	8π
5	$91\pi/3$	10π
6	$127\pi/3$	12π

Vi ser nu att

$$\Delta V_n=\Delta V_{n-1}+2\pi$$

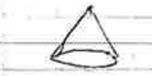
Volymökningen är lika stor som den tidigare termens ökning $+2\pi$

Elevlösning 1 (2 g och 2 vg)

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/1	Eleven påbörjar en generell undersökning. Eleven glömmer att subtrahera cylindern så undersökningen är av relativt låg kvalitet. Den är dock precis över gränsen för vad som krävs för 1 g och 1 vg.
Matematiska resonemang	X	1/0	Eleven drar en slutsats som är strax under gränsen till godtagbar. Dels är formeln för volymökningen rekursiv när det inte behövs (bättre alternativ: $\Delta V = 2\pi$), dels är den rekursiva formeln ofullständig eftersom startvärdet inte är definierat.
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	Eftersom undersökningen är ganska kortfattad så blir redovisningens kvalitet svårbedömd. Den är dock lätt att följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt.
Summa		**2/2**	

Kommentar: (I matrisen markerar X-ens positioner *var* på skalan elevens arbete bedöms ligga kvalitetsmässigt.) Om eleven bara hade behandlat ett enda specialfall och dessutom glömt subtrahera cylinderns volym skulle lösningen inte generera några poäng under "Metodval och genomförande".

Elevlösning 2 (2 g och 4 vg samt ¤)



stora konen

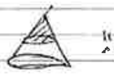
a = radien

$r = a+1$

$h = a+1$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi (a+1)^2 (a+1)}{3}$$

$$V = \frac{\pi (a+1)^3}{3} = \pi a^3 + \pi 3a^2 + \pi 3a + \pi$$

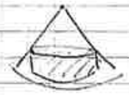


övre lilla konen

$h = a$

$r = a$

$$V = \frac{\pi a^3}{3}$$



cylindern i mitten

$h = 1$

$r = a$

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi a^2$$

Om man tar stora konen − lilla konen och cylindern får man kvar det efterfrågade området.

$$V = \frac{\pi (a+1)^3}{3} - \frac{\pi a^3}{3} - \pi a^2 = \pi a^3 + \pi 3a^2 + \pi 3a + \pi - \frac{\pi a^3}{3} - \pi a^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 + 2\pi a^2 + 3\pi a + \pi$$

Om man deriverar det får man hur volymen förändras vid olika a.

$$\frac{dV}{da} = 2\pi a^2 + 4\pi a + 3\pi$$

	Kvalitativa nivåer				Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande				X	1/2	Eleven tecknar ett korrekt generellt uttryck för en volymdifferens (derivatan), även om slarvfelen som görs i början (nämnaren 3 faller bort) gett följdfel.
Matematiska resonemang			X		1/1	Slutsatsen är godtagbar utifrån den generella undersökning som har genomförts (inklusive följdfel).
Redovisning och matematiskt språk			X		0/1	
Summa					**2/4**	

Kommentar: (I matrisen markerar X-ens positioner *var* på skalan elevens arbete bedöms ligga kvalitetsmässigt.) Elevens undersökning och slutsats uppvisar MVG-kvalitet, även om slarvfelet i början gör beräkningarna mer komplicerade än i ursprungsuppgiften. Språket är lämpligt och i huvudsak korrekt. Lösningen kan sägas vara precis över gränsen för vad som krävs för att den ska bedömas vara av MVG-karaktär.