Skolverket

Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap
Umeå universitet

PBMaE 10-04

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-11
Del II: Uppgift 12-17

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 150 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande, även symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 11 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänt" och "Väl Godkänt" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänt" ska kraven för "Väl godkänt" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn: ______________________________

Skola: ____________________ Klass/program: ____________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (5117)
1/0

Bestäm $z+\bar{z}$ då $z=2+3\text{i}$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (5105)
2/0

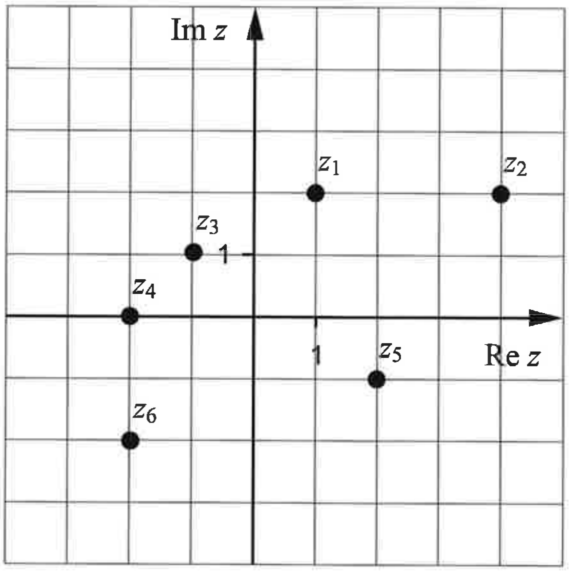
Skriv $\dfrac{20}{3-\text{i}}$ på formen $a+\text{i}b$

Uppgift nr 3 (5104)
1/0

Lös differentialekvationen $2y'=5y$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 4 (5103)
1/0 , 1/0 , 0/1

De komplexa talen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 och z_6 är markerade i det komplexa talplanet i figuren.



För vilket eller vilka av talen gäller att

a) $\text{Im}\,z=2$ *Endast svar fordras*

b) $|z|=\sqrt{2}$ *Endast svar fordras*

c) $|\text{Re}\,z|=|\text{Im}\,z|$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 5 (5106)
3/0

Lös ekvationen $(z^2+4)(z^2-4z+5)=0$

Uppgift nr 6 (5107)
1/0 , 1/1

a) Bestäm det reella talet a så att $y = ae^{3x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y''-y=e^{3x}$

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''-y=e^{3x}$

Uppgift nr 7 (5108)
1/1

Bestäm en rot till ekvationen $z^5 = 2^{10}(\cos 50° + i\sin 50°)$

Uppgift nr 8 (5109)
1/0 , 0/2 , 0/1

Differentialekvationen $y''+4y'-12y=0$ är given.

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen som har en extrempunkt i punkten (0, 12).

c) Undersök om extrempunkten i b) är en maximipunkt eller en minimipunkt.

Uppgift nr 9 (5110)
0/3/¤

Funktionen $f(x)=3x^4-4x^3-48x$ är definierad för alla reella x.
Visa att funktionens minsta värde är -80

Uppgift nr 10 (5111)
0/1 , 0/1/¤

a) Bestäm $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right)$ för $z=\mathrm{i}$ och för $z=1$

b) Låt z vara ett godtyckligt komplext tal med egenskapen $|z|=1$

Bestäm vilket eller vilka värden $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}\right)$ kan anta då $z\neq-\mathrm{i}$

Uppgift nr 11 (5112)
3/3/¤

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

Det område som begränsas av kurvan $y=x^k$, linjen $x=1$ och x-axeln får rotera kring x-axeln. Volymen av den rotationskropp som bildas betecknas med V.

Din uppgift är att undersöka hur V beror av k.

- Du kan börja med att välja några enkla värden på k, t ex $k=1$, $k=2$, $k=3$ och beräkna V i dessa fall.

k	V
1	
2	
3	

- Uttryck sambandet mellan V och k med en formel och visa att den gäller för alla $k\geq 0$

- När $k<0$ är det område som roterar obegränsat, eftersom $y=x^k$ då inte skär y-axeln. Rotationsvolymen kan ändå få ett ändligt värde om den definieras som i faktarutan.

  Undersök för vilka negativa värden på k som formeln för sambandet mellan V och k gäller.

FAKTARUTA

Definition av $\int_0^1 x^p \mathrm{d}x$ för $p < 0$

Låt a vara ett positivt tal som närmar sig 0

Om $\int_a^1 x^p \mathrm{d}x$ då närmar sig ett ändligt värde, definieras detta

gränsvärde som värdet av $\int_0^1 x^p \mathrm{d}x$

Uppgift nr 12 (4784)
1/0 , 1/0

Två komplexa tal är givna, $z_1 = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$ och $z_2 = \cos 30° + i \sin 30°$
Bestäm

a) $\arg(z_1 z_2)$

b) $|z_1 z_2|$

Uppgift nr 13 (4789)
3/0

Det område i första kvadranten som begränsas av kurvan $y = 1 + 5x - e^x$ och x-axeln roteras kring x-axeln. Bestäm ett närmevärde till volymen av den rotationskropp som bildas. Svara med minst tre värdesiffror.

Uppgift nr 14 (5115)
2/0 , 0/1

Differentialekvationen $y' = y^2 - x$ har en lösning y som uppfyller villkoret $y(0) = 1$

a) Bestäm ett närmevärde till $y(2)$ med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod. Välj steglängden 1.

b) Förklara med hjälp av figur och resonemang hur metoden fungerar i detta fall.

Uppgift nr 15 (5114)
1/1

När en viss brustablett löses upp i vatten kan följande samband mellan tablettens volym V och dess höjd h användas: $V = 4\pi h^3$

Anta att volymen minskar med den konstanta hastigheten 34 mm^3/s.

Med vilken hastighet minskar höjden för denna brustablett i det ögonblick då höjden är 2,0 mm?

Uppgift nr 16 (5118)
0/3/¤

Österåkers kommun ska minska sina utsläpp av växthusgaser. Målet är att komma ned till 0,9 ton per person och år. År 2009 var utsläppet 4,1 ton per person och år. Man har beslutat om åtgärder som varje år minskar utsläppen med 3,7 % av befintlig mängd per person och år.

Man vill, förutom de redan beslutade åtgärderna, varje år minska utsläppen med 0,1 ton per person och år.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen och beräkna när målet uppnås.

Uppgift nr 17 (5116)
0/3/¤

Bestäm konstanterna a och b så att uttrycket $\dfrac{x^2+a}{x^3-3bx^2+b^2x-1}$ går att förkorta med $(x-1)$.

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Uppgift nr 1 (5117)

Max 1/0

Korrekt svar (4)	+1 g

Uppgift nr 2 (5105)

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex förlänger med konjugatet till nämnaren	+1 g
med korrekt bestämning av svaret ($6+2\mathrm{i}$)	+1 g

Uppgift nr 3 (5104)

Max 1/0

Godtagbart svar ($y = Ce^{\frac{5x}{2}}$)	+1 g

Uppgift nr 4 (5103)

Max 2/1

a)	Korrekt svar (z_1 och z_2)	+1 g
b)	Korrekt svar (z_3)	+1 g
c)	Korrekt svar (z_3 och z_6)	+1 vg

Uppgift nr 5 (5106)

Max 3/0

Godtagbar ansats, t ex en inledande undersökning om för vilka z som någon av faktorerna blir noll	+1 g
med godtagbar bestämning av minst två rötter	+1 g
med godtagbar bestämning av ekvationens samtliga rötter ($z_1 = 2\mathrm{i}$, $z_2 = -2\mathrm{i}$ $z_3 = 2+\mathrm{i}$, $z_4 = 2-\mathrm{i}$)	+1 g

Uppgift nr 6 (5107)

Max 2/1

a)	Bestämmer a korrekt $\left(\frac{1}{8}\right)$	+1 g
b)	Bestämmer den homogena lösningen korrekt $y_h = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$	+1 g
	med korrekt bestämning av den allmänna lösningen $\left(y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{3x} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\right)$	+1 vg

Uppgift nr 7 (5108)

Max 1/1

Godtagbar ansats, t ex bestämmer absolutbelopp *eller* argument	+1 g
med någon korrekt rot (t ex $4(\cos 10° + i\sin 10°)$)	+1 vg

Uppgift nr 8 (5109)

Max 1/3

a)	Bestämmer den allmänna lösningen till differentialekvationen korrekt ($y = C_1\mathrm{e}^{-6x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt ekvationssystem	+1 vg
	med godtagbar redovisning och korrekt svar ($y = 3\mathrm{e}^{-6x} + 9\mathrm{e}^{2x}$)	+1 vg
c)	Visar att den givna punkten är en minimipunkt	+1 vg

Uppgift nr 9 (5110)

Max 0/3/¤

Visar att $f'(2)=0$	+1 vg
Visar att f har ett lokalt minimum för $x=2$	+1 vg
Motivera att $x=2$ är det enda nollstället till $f'(x)$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera funktionen och göra tolkningar som är tillräckliga för att visa att f endast har en extrempunkt, t ex genom att visa att f har ett lokalt minimum för $x=2$ *och* motivera att $x=2$ är det enda nollstället till $f'(x)$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att -80 är funktionens minsta värde, t ex genom att godtagbart redogöra för att den lokala minimipunkten är ett globalt minimum samt visa att funktionsvärdet för den globala minimipunkten är -80
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk

Elevlösningar återfinns i separata filer i provbanken

Uppgift nr 10 (5111)

Max 0/2/¤

a) Beräknar imaginärdelen för de angivna z-värdena $\left(-\frac{1}{2}\right)$ +1 vg

b) Drar slutsatsen att $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)=-\frac{1}{2}$ baserat på en generell beräkning eller en beräkning för ytterligare ett z-värde där $|z|=1$ +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)=-\frac{1}{2}$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppgift nr 11 (5112)

Max 3/3/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre** ⟶		**Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem. Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Beräknar V för ett värde på k **1g**	Beräknar V för minst två värden på k **2g**	Påbörjar en generell bestämning av V uttryckt i k och bestämmer korrekt en primitiv funktion till x^{2k} **2g och 1vg**	**2/1**
Matematiskt resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Formulerar ett samband mellan V och k baserat på beräkning för minst två värden på k **1g**		Visar ett samband mellan V och k generellt för $k \geq 0$ $(V = \dfrac{\pi}{2k+1})$ **1g och 1vg**	**1/1**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*			Redovisningen är lätt att följa och omfattar vissa generella beräkningar eller resonemang. Det matematiska språket är acceptabelt. **1vg**	**0/1**
Summa				**3/3**

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida.

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod för att bestämma sambandet mellan V och k
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att formeln inte kan gälla för $k \le -\frac{1}{2}$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att $V = \frac{\pi}{2k+1}$ gäller för $-\frac{1}{2} < k < 0$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk där även negativa värden behandlas

Elevlösningar återfinns i separata filer i provbanken

Uppgift nr 12 (4784)

Max 2/0

a)	Korrekt svar med godtagbar motivering ($75°$)	+1 g
b)	Korrekt svar med godtagbar motivering ($\sqrt{2}$)	+1 g

Uppgift nr 13 (4789)

Max 3/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer områdets högra ändpunkt	+1 g
Tecknar godtagbart ett integraluttryck för den sökta volymen	+1 g
med beräkning av godtagbart svar (71,2 v.e.)	+1 g

Uppgift nr 14 (5115)

Max 2/1

a)	Godtagbar ansats, visar beräkningar t ex med en tabell	+1 g
	med godtagbart svar (5)	+1 g
b)	Förklarar hur metoden fungerar med figur och resonemang	+1 vg

Uppgift nr 15 (5114)

Max 1/1

Godtagbar ansats, t ex använder kedjeregeln	+1 g
med godtagbar bestämning av hastigheten (0,23 mm/s)	+1 vg

Uppgift nr 16 (5118)

Max 0/3/¤

Korrekt uppställd inhomogen differentialekvation	+1 vg
med godtagbar lösning, $y = 6{,}8e^{-0{,}037x} - 2{,}7$	+1 vg
med godtagbart svar (år 2026)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	ställa upp en differentialekvation som modell för situationen
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk

Uppgift nr 17 (5116)

Max 0/3/¤

Godtagbar ansats, t ex visar att täljaren är delbar med $(x-1)$ om $a=-1$	+1 vg
Bestämmer ett värde på b för vilket nämnaren är delbar med $(x-1)$	+1 vg
Bestämmer korrekt svar ($a=-1$, $b=0$ eller $b=3$) med godtagbar motivering	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod (faktorsatsen) varav det följer att det inte finns andra värden på a och b som uppfyller det givna villkoret än $a=-1$, $b=0$ eller $b=3$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 9.

Elevlösning 1 (3 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 - 48 = 0$$
$$x^3 - x^2 - 4 = 0$$
$$x^3 - x^2 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ \hline x - 2 & x^3 - x^2 - 4 \\ & -(x^3 - 2x^2) \\ \hline & + x^2 - 4 \\ & -(x^2 - 2x) \\ \hline & 2x - 4 \\ & -(2x - 4) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -2 + \frac{1}{4}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}$$
$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

$f'(x)$ är endast definierad för alla reella x

Motivering till att $f'(x)$ bara har ett nollställe

$$\Rightarrow f'(2) = 0$$

Visar att $x = 2$ är ett lokalt minimum

$$\begin{cases} f''(x) = 3x^2 - 2x \\ \text{minimipunkt} \Rightarrow f''(x) > 0 \\ f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8 \end{cases}$$

Resonemang saknas

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2 = -80$$

Funktionens minimivärde är -80.

Kommentar: Eleven analyserar derivatan och gör tolkningarna att $f'(x) = 0$ endast för $x = 2$ samt att f har ett lokalt minimum för $x = 2$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för analys och tolkning av resultat även om eleven inte drar några slutsatser av sina tolkningar. Eleven ställer upp några villkor för att visa att funktionens minsta värde är -80 men redovisar inte fullständiga resonemang. Lösningen uppfyller därför inte MVG-kvalitet för bevis och resonemang. Eleven redovisar välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för redovisning och matematiskt språk.

Elevlösning 2 (3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48$

$f'(x) = 0$ där det finns extrempunkter

$0 = 12x^3 - 12x^2 - 48 \quad /12$

$0 = x^3 - x^2 - 4$

$x = 2$ verkar vara lösning

$0 = 2^3 - 2^2 - 4$ – Det stämmer

$x_1 = 2$

$$\begin{array}{l} \quad x^2 + x + 2 \\ \hline x^3 - x^2 - 4 \;\; \big|\, x - 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad x^2 - 4 \\ \quad -(x^2 - 2x) \\ \hline \qquad 2x - 4 \\ \qquad -(2x - 4) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$(x-2)(x^2 + x + 2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} \qquad \frac{1}{4} - 2 < 0$

Bara $x_1 = 2$ är en reell lösning.

$f''(x) = 36x^2 - 24x \Rightarrow f''(2) = 144 - 48 > 0$

$\therefore$ $x = 2$ är en minpunkt till f.

Eftersom $x = 2$ är den enda extrempunkten till f och $x = 2$ är en minpunkt måste funktionens minsta värde $f_{min} = f(2)$

$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2 = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 8 - 96 =$

$= 48 - 32 - 96 = 16 - 96 = \underline{\underline{-80}}$

Kommentar: Eleven analyserar derivatan och gör tolkningarna att $f'(x) = 0$ endast för $x = 2$ samt att f har ett lokalt minimum för $x = 2$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för analys och tolkning av resultat. Eleven visar att funktionens minsta värde är -80 genom att godtagbart redogöra för att den lokala minimipunkten är ett globalt minimum. Lösningen uppfyller därför MVG-kvalitet för bevis och resonemang. Eleven redovisar välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för redovisning och matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 11.

Elevlösning 1 (3 g och 3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

$y = x^k$

$V = \pi \int_0^1 y^2 dx$

- $k=1 \Rightarrow V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$

$k=2 \Rightarrow V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \cdot \pi = \frac{\pi}{5}$

$k=3 \Rightarrow V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 \cdot \pi = \frac{\pi}{7}$

- Det verkar som om $V = \frac{\pi}{2k+1}$ då $k > 0$

Undersöker saken:

$V = \pi \int_0^1 (x^k)^2 dx = \pi \int_0^1 x^{2k} dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 \cdot \pi = \frac{\pi}{2k+1}$

V.S.V.

- $V = \frac{\pi}{2k+1}$

Volymen får inte bli negativ alltså måste

$2k+1 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{2}$

Nämnaren blir noll om $k = -\frac{1}{2}$ därför

måste $k > -\frac{1}{2}$

Svar: Formeln gäller alltså för negativa värden på k om $k > -\frac{1}{2}$

Kommentar: Eleven använder en generell metod för att bestämma sambandet mellan V och k. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för generella metoder vid problemlösning.

Eleven drar slutsatsen att formeln inte kan gälla då $k \leq -\frac{1}{2}$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för analys och tolkning av resultat. Eleven visar *dock inte* att formeln gäller då $-\frac{1}{2} < k < 0$. Lösningen uppfyller därför inte MVG-kvaliteten för matematiska resonemang och bevis. Eleven redovisar välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk, men behandlar inte fallet då $k < 0$ fullt ut. Lösningen uppfyller nätt och jämt MVG-kvaliteten för matematiskt språk.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande		2/1	
Matematiska resonemang		1/1	
Redovisning och matematiskt språk		0/1	
Summa		**3/3**	

Elevlösning 2 (3 g och 3 vg och fyra av MVG-kvaliteterna)

k	V
1	$\frac{\pi}{3}$
2	$\frac{\pi}{5}$
3	$\frac{\pi}{7}$

$k=1$

$$V=\int_0^1 x^2\,dx\cdot\pi=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}$$

$k=2$

$$V=\int_0^1 x^4\,dx\cdot\pi=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$$

$k=3$

$$V=\int_0^1 x^6\,dx\cdot\pi=\pi\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{\pi}{7}$$

$$V=\frac{\pi}{1+2k}$$

$$V=\int_0^1 (x^k)^2\,dx\cdot\pi=\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1\cdot\pi=\frac{\pi}{2k+1}=\frac{\pi}{1+2k}$$

Det stämmer.

- Formeln kan inte gälla om $2k+1=0$, ($k=-\frac{1}{2}$) eftersom nämmnaren då blir 0.
  Värdet blir negativt om $k<-\frac{1}{2}$.
  ~~Undersöker~~ Undersöker $-\frac{1}{2}<k<0$:

$$\int_a^1 x^{2k}\,dx=\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_a^1=\frac{1}{2k+1}-\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

Ändligt värde?

$$a\to 0\implies\frac{a^{2k+1}}{2k+1}\to 0\quad\text{eftersom } a^{2k+1}\to 0$$

Då blir $V=\frac{\pi}{2k+1}$ när $-\frac{1}{2}<k<0$

Kommentar: Eleven använder en generell metod för att bestämma sambandet mellan V och k. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för generella metoder vid problemlösning.

Eleven drar slutsatsen att formeln inte kan gälla då $k \leq -\frac{1}{2}$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för analys och tolkning av resultat. Eleven visar även att formeln gäller då $-\frac{1}{2} < k < 0$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvalitet för bevis. Eleven redovisar välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk och behandlar fallet då $k < 0$ fullt ut. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för matematiskt språk.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande		2/1	
Matematiska resonemang		1/1	
Redovisning och matematiskt språk		0/1	
Summa		**3/3**	