

## PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-12

Del II: Uppgift 13-18

### Anvisningar

- Provtid** Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 150 minuter för arbetet med Del I.
- Hjälpmedel** Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs E"  
*Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.*  
Del II: Miniräknare (grafitande, även symbolhanterande) och formelblad.
- Provmaterial** Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar.  
Skriv namn och klass på de papper du lämnar in.  
*Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
- Provet** Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1.  
  
Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges.  
Uppgift 12 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
- Betygsgränser** Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänt" och "Väl Godkänt" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänt" ska kraven för "Väl godkänt" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella □-uppgifter.

Namn: _____		
Skola: _____	Klass/program: _____	
Kvinna <input type="checkbox"/>	Man <input type="checkbox"/>	Annat modersmål än svenska <input type="checkbox"/>

**Prov och provmaterial som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap 4§ offentlighets- och sekretesslagen. Avsikten är att prov och provmaterial ur provbanken ska kunna återanvändas genom att lösenordsskyddade ingående material. Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.**

---

Uppgift nr 1 (5746)  
1/0

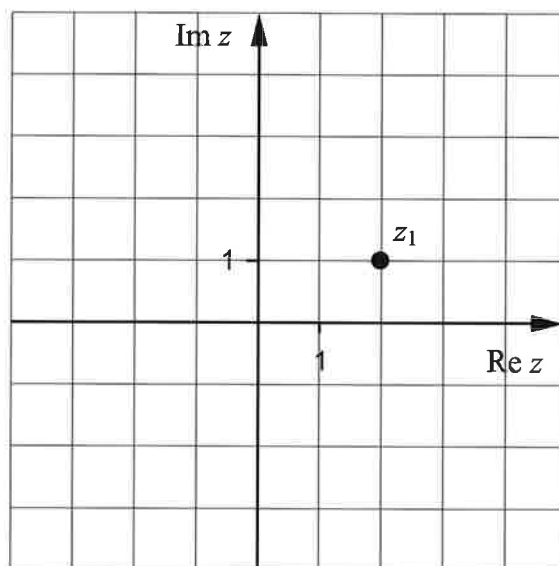
Lös differentialekvationen  $y' + 6y = 0$

*Endast svar fordras*

---

Uppgift nr 2 (5747)  
1/0, 1/0, 1/0

Figuren visar ett komplext talplan där talet  $z_1$  är markerat.



Bestäm på formen  $z = a + bi$

a)  $\bar{z}_1$

*Endast svar fordras*

b)  $z_1 - \bar{z}_1$

*Endast svar fordras*

c)  $-iz_1$

*Endast svar fordras*

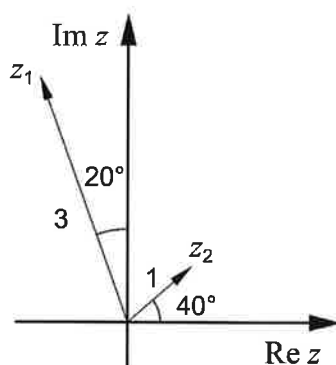
---

Uppgift nr 3 (5378)

2/0

Figuren visar två komplexa tal,  $z_1$  och  $z_2$ , i det komplexa talplanet.

Bestäm  $\frac{z_1}{z_2}$  i polär form.



---

Uppgift nr 4 (5588)

2/0

Differentialekvationen  $y' = \frac{x}{y} + 2$  har en lösning  $y$  som uppfyller villkoret  $y(0) = 1$

Bestäm ett närmevärde till  $y(1)$  med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod, med steglängden 0,5

---

Uppgift nr 5 (5410)

1/1

Låt  $z = 3 + ki$  och bestäm det reella talet  $k$  så att  $z^2 - z$  blir rent imaginärt.

---

Uppgift nr 6 (5377)

1/1, 0/1

En rot till ekvationen  $z^5 = w$  är  $z_1 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

- Beräkna  $w$ .
- Bestäm ytterligare en rot till ekvationen.

---

Uppgift nr 7 (5589)

1/0 , 0/1

Differentialekvationen  $y' - 2y = 6e^{5x}$  är given.

- Visa att  $y = 2e^{5x}$  är en lösning till den givna differentialekvationen.
- Bestäm alla lösningar till den givna differentialekvationen.

---

Uppgift nr 8 (5099)

1/1

Bestäm  $z$  om villkoren  $|z| = \sqrt{13}$  och  $\operatorname{Re} z = 3$  gäller.

---

Uppgift nr 9 (5402)

1/2

Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen  $y'' + 4y = 0$  som har en maximipunkt i  $(0, 3)$ .

---

Uppgift nr 10 (5392)

0/2 , 0/1

Differentialekvationen  $y''' + 8y = 0$  är given.

$y'''$  är tredjederivatan av  $y$ , det vill säga derivatan av andraderivatan.

- Bestäm det reella talet  $k$  så att  $y = e^{kx}$  blir en lösning till differentialekvationen.
  - Bestäm minst två andra lösningar till differentialekvationen.
-

Uppgift nr 11 (5119)  
0/2/α

Motivera varför varje nollställe till polynomet  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  också är ett nollställe till polynomet  $z^5 - 1$

---

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

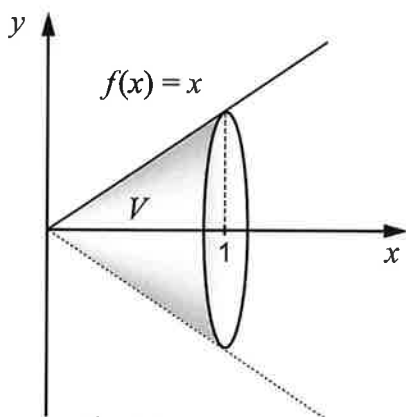
I den här uppgiften ska du undersöka volymer av de kroppar som bildas när området som begränsas av  $x$ -axeln, en lodrät linje och grafen till funktionen  $f(x) = x^p$ ,  $x \geq 0$ ,  $p > 0$  roterar kring  $x$ -axeln.

Låt  $V$  beteckna volymen av rotationskroppen då den lodräta linjen är  $x = 1$

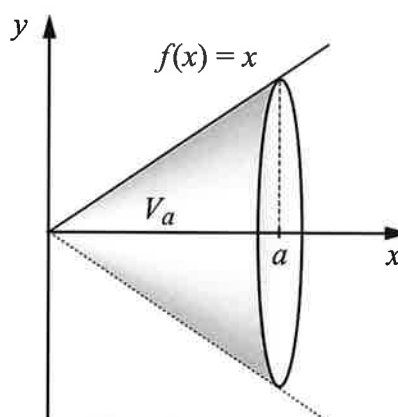
Låt  $V_a$  beteckna volymen av rotationskroppen då den lodräta linjen är  $x = a$

Din uppgift är att för alla  $p > 0$  bestämma  $a$  så att volymen då den lodräta linjen är  $x = a$  blir dubbelt så stor som volymen då  $x = 1$ , det vill säga så att  $V_a = 2V$

- Börja med fallet  $p = 1$ . Bestäm  $a$  så att volymen av rotationskroppen i figur 2 blir dubbelt så stor som volymen av rotationskroppen i figur 1.

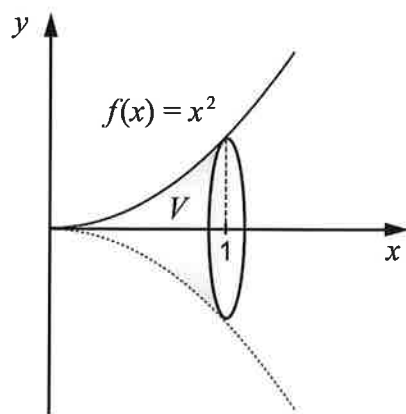


Figur 1

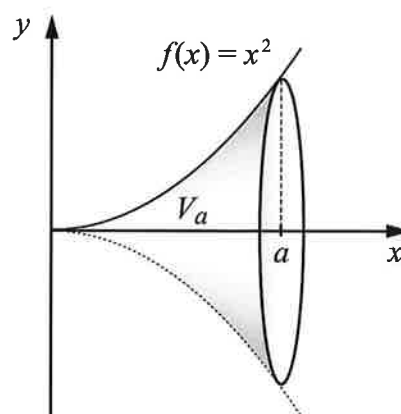


Figur 2

- Undersök nu fallet då  $p = 2$ . Bestäm  $a$  så att volymen av rotationskroppen i figur 4 blir dubbelt så stor som volymen av rotationskroppen i figur 3.

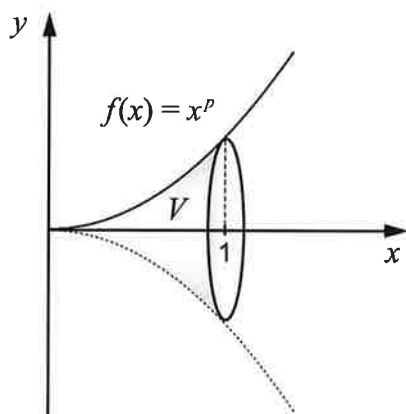


Figur 3

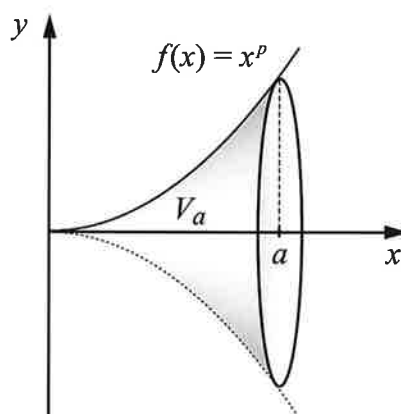


Figur 4

I figurerna 5 och 6 nedan visas grafen till funktionen  $f(x) = x^p$ ,  $x \geq 0$ ,  $p > 0$



Figur 5



Figur 6

- Undersök nu ytterligare ett fall där du själv väljer ett värde på  $p$ . Bestäm  $a$  så att volymen av rotationskroppen i figur 6 blir dubbelt så stor som volymen av rotationskroppen i figur 5.
- Formulera en slutsats om hur  $a$  beror av  $p$  utifrån dina beräkningar.
- Visa att din slutsats gäller för alla  $p > 0$

Uppgift nr 13 (5587)

2/0

Lös ekvationen  $z^2 + 38z + 650 = 0$

---

Uppgift nr 14 (5113)

1/0, 2/0

I en bakterieodling ökar antalet bakterier med en hastighet som är 20 % per timme av den aktuella mängden.

Låt  $y(t)$  vara antalet bakterier i odlingen  $t$  timmar efter odlingens början.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver förloppet.

*Endast svar fordras*

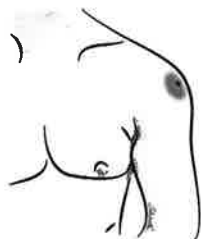
b) Från början är det 500 bakterier i odlingen.

Bestäm antalet bakterier i odlingen 30 timmar efter odlingens början.

---

Uppgift nr 15 (5388)

0/2



William har fått rosfeber. Rosfebern visar sig som en cirkulär rodnad runt ett infekterat sår. Rodnadens radie ökar med 0,7 cm/dygn innan behandling sätts in. Med vilken hastighet ökar rodnadens area vid den tidpunkt då radien är 0,9 cm om ingen behandling ännu har satts in?

---



Uppgift nr 16 (5386)

0/2

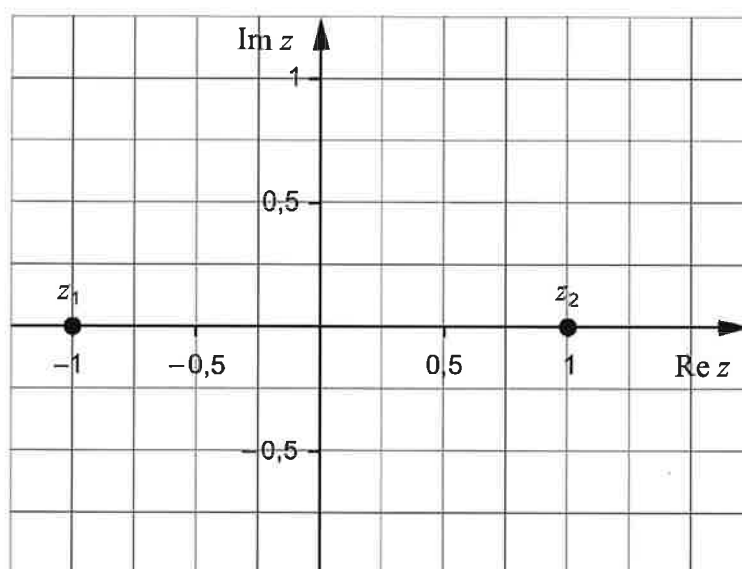
Det område som begränsas av  $y = xe^{-x}$ , linjen  $x = 2$  och  $x$ -axeln får rotera kring  $x$ -axeln. Bestäm rotationskroppens volym. Svara med minst tre värdesiffror.

---

Uppgift nr 17 (5102)

1/1/□

De komplexa talen  $z_1$ ,  $z_2$  och  $z_3$  bildar en *rätvinklig* triangel i det komplexa talplanet. Bestäm var i det komplexa talplanet  $z_3$  kan ligga då  $z_1 = -1$  och  $z_2 = 1$



---

Uppgift nr 18 (5393)

0/2/□

Låt  $u$  vara en lösning till differentialekvationen  $\frac{dy}{dx} + ay = 0$  där  $a$  är en konstant.

Sätt  $w = u \cdot e^{ax}$ . Visa att  $\frac{dw}{dx} = 0$

---

---

## Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

---

---

### Uppgift nr 1 (5746)

**Max 1/0**

Korrekt svar ( $y = Ce^{-6x}$ )

+1 g

### Uppgift nr 2 (5747)

**Max 3/0**

a) Korrekt svar ( $2 - i$ )

+1 g

b) Korrekt svar ( $2i$ )

+1 g

c) Korrekt svar ( $1 - 2i$ )

+1 g

### Uppgift nr 3 (5378)

**Max 2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer absolutbeloppet eller argumentet

+1 g

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ )

+1 g

### Uppgift nr 4 (5588)

**Max 2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. redovisar det första steget korrekt

+1 g

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,125)

+1 g

### Uppgift nr 5 (5410)

**Max 1/1**

Godtagbar ansats, t.ex. utvecklar  $z^2 - z$  korrekt

+1 g

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $k = \pm\sqrt{6}$ )

+1 vg

Uppgift nr 6 (5377)

**Max 1/2**

- a) Godtagbar ansats, bestämmer absolutbeloppet eller argumentet med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (+1 g)  
 $(w = 2^5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ))$  (+1 vg)
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex.  $z_2 = 2(\cos 92^\circ + i \sin 92^\circ)$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 7 (5589)

**Max 1/1**

- a) Godtagbar verifiering av att  $y = 2e^{5x}$  är en lösning (+1 g)
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar ( $y = Ce^{2x} + 2e^{5x}$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 8 (5099)

**Max 1/1**

- Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp  $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$  (+1 g)  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $z = 3 \pm 2i$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 9 (5402)

**Max 1/2**

- Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer den allmänna lösningen,  
 $y = A \cos 2x + B \sin 2x$  (+1 g)  
 med godtagbar bestämning av lösningskurvan ( $y = 3 \cos 2x$ ) (+1 vg)  
 med godtagbar verifiering av maximum (+1 vg)

Uppgift nr 10 (5392)

**Max 0/3**

- a) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer uttryck för  $y'''$  korrekt (+1 vg)  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $k = -2$ ) (+1 vg)
- b) Godtagbar bestämning av ytterligare två lösningar med godtagbar motivering  
 (t.ex.  $y = 2e^{-2x}$ ,  $y = 0$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 11 (5119)

Max 0/2/□

Godtagbar ansats, t.ex. inser att  $z=1$  är ett nollställe till  $z^5 - 1$  +1 vg  
 med godtagbar fortsättning, t.ex. korrekt genomförd faktorisering

$z^5 - 1 = (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z - 1)$  +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	tolka $z^5 - 1 = (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z - 1)$ och ge en godtagbar motivering till varför varje nollställe till $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ också måste vara ett nollställe till $z^5 - 1$
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Total poäng
	Lägre	→ Högre		
<p><b>Metodval och genomförande</b>  <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.  Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	<p>Eleven beräknar <math>V</math> samt <math>a</math> för minst ett värde på <math>p</math>.</p>	<p>Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att beräkna <math>a</math> för minst två värden på <math>p</math></p>	<p>Eleven bestämmer <math>a</math> för minst två värden på <math>p</math> och inleder en generell undersökning, t.ex. tecknar ekvationen</p> $\pi \int_0^a x^{2p} dx =$ $2 \cdot \pi \int_0^1 x^{2p} dx$	
	<b>1-2 g</b>	<b>2 g och 1 vg</b>	<b>2 g och 2 vg</b>	<b>2/2</b>
<p><b>Matematiska resonemang</b>  <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i></p>	<p>Eleven drar någon slutsats om sambandet mellan <math>a</math> och <math>p</math> (t.ex. "<math>a</math> blir mindre då värdet på <math>p</math> blir större") grundat på en undersökning av minst två specialfall.</p>	<p>Eleven beskriver godtagbart hur <math>a</math> beror av <math>p</math> med hjälp av en generell beräkning eller grundat på en undersökning av minst tre specialfall,  t.ex. <math>a = 2^{\frac{1}{2p+1}}</math></p>		
	<b>1 g</b>	<b>1 g och 1 vg</b>		<b>1/1</b>
<p><b>Redovisning och matematiskt språk</b>  <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>		<p>Redovisningen är lätt att följa och förstå och omfattar mer än tre av punkterna. Det matematiska språket är acceptabelt.</p>		
		<b>1 vg</b>		<b>0/1</b>
<b>Summa</b>				<b>3/4</b>

**MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida**

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod, t.ex. teckna ekvationen $\pi \int_0^a x^{2p} dx = 2 \cdot \pi \int_0^1 x^{2p} dx$ och påbörja en lösning av ekvationen.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa att slutsatsen gäller, $a = 2^{\frac{1}{2p+1}}$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgift nr 13 (5587)

**Max 2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar  $z = -19 \pm \sqrt{361 - 650}$  +1 g  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $z = -19 \pm 17i$ ) +1 g

Uppgift nr 14 (5113)

**Max 3/0**

- a) Korrekt svar ( $y' = 0,2y$ ) +1 g
- b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer differentialekvationens lösning,  $y = 500e^{0,2t}$  +1 g  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $2 \cdot 10^5$ ) +1 g

Uppgift nr 15 (5388)

**Max 0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar  $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $4,0 \text{ cm}^2/\text{dygn}$ ) +1 vg

Uppgift nr 16 (5386)

**Max 0/2**

Ställer upp ett korrekt integraluttryck för volymen,  $\pi \int_0^2 (xe^{-x})^2 dx$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,598 v.e.) +1 vg

Uppgift nr 17 (5102)

**Max 1/1/□**

Godtagbar ansats, t.ex. anger något korrekt  $z_3$  +1 g  
 Inser att  $z_3$  kan ligga på linjerna där  $\operatorname{Re} z = \pm 1$  eller  
 bestämmer att  $z_3$  kan ligga på kurvan  $|z| = 1$  +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod och visa att $z_3$ ligger på kurvan $ z  = 1$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att $z_3$ ligger på linjerna där $\operatorname{Re} z = \pm 1$ och på kurvan $ z  = 1$
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	analysera sin slutsats och poängtera att $z_3$ dock inte får sammanfalla med $z_1$ eller $z_2$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgift nr 18 (5393)

Max 0/2/□

Godtagbar ansats, t.ex. deriverar  $w$  korrekt med hjälp av produktregeln eller visar att  $w$  är konstant genom att sätta in  $u = Ce^{-ax}$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis där vissa motiveringar kan vara bristfälliga eller saknas +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	korrekt slutföra beviset.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	



Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 11.

Elevlösning 1 (2 vg och en MVG-kvalitet)

11)  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ , s nollställena är  
nollställena till  $z^5 - 1$

$$f(x) = z^5 - 1, \quad g(x) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

$f(x) = 0$  ger nollställena

$$\Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow z^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}}$$

$$z = 1 \Rightarrow z - 1 = 0 \text{ är en lösning}$$

Om  $f(x)/g(x)$  inte har någon rest

betyder det att  $g(x)$  är en lösning till  $f(x)$

och det betyder att varje lösning till  $g(x)$   
är en lösning till  $f(x)$

$$\begin{array}{r} z-1 \\ \hline z^5-1 \quad (z^4+z^3+z^2+z+1) \\ - (z^5+z^4+z^3+z^2+z) \\ \hline -z^4-z^3-z^2-z-1 \\ - (-z^4-z^3-z^2-z-1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$f(x)/g(x)$  ger inte någon rest utan  $g(x)$

kan dela  $f(x)$  helt.  $\Rightarrow$

$g(x)$  är <sup>själv</sup> en lösning till  $f(x)$  och det

betyder att varje lösning till  $g(x)$

är en lösning till  $f(x)$

*Kommentar:* Eleven ger en godtagbar motivering av varför varje nollställe till

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  också måste vara ett nollställe till  $z^5 - 1$ , vilket innebär att eleven erhåller MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Däremot anses eleven inte kunna uppnå MVG-kvalitet vad gäller matematiskt språk. T.ex. betecknas funktionen  $f(x)$  men funktionen innehåller variabeln  $z$ . Eleven hänvisar också felaktigt (på ett flertal ställen) att  $g(x)$  är en lösning till  $f(x)$ .

Elevlösning 2 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)

11)

$z = 1$  är ett nollställe till  $z^5 - 1$

$z^5 - 1$  är delbart med  $z - 1$

Genom polynomdivision borde man få<sup>o</sup>

$$\frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

Kontroll

$$\begin{aligned} (z-1) \cdot (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) &= \\ z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z - z^4 - z^3 - z^2 - z - 1 &= \\ = z^5 - 1 \end{aligned}$$

dvs

$$z^5 - 1 = (z - 1) \cdot (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

Om höger ledet blir 0 så måste vänsterledet bli noll. Alltså måste alla nollställena till  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  vara nollställena till  $z^5 - 1$

*Kommentar:* Eleven drar den korrekta slutsatsen att  $z = 1$  är ett nollställe och motiverar varför varje nollställe till  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  också är nollställen till  $z^5 - 1$  och erhåller därmed MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Redovisningen är välstrukturerad och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk och uppfyller därmed MVG-kvaliteten för matematiskt språk.

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 12.**  
**Elevlösning 1 (3 g och 1 vg)**

12).  $p = 1$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \text{ v.e.}$$

$$2V = \frac{2\pi}{3}$$

$$\pi \int_0^a x^2 dx = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$a = \sqrt[3]{2}$$

•  $p = 2$

$$\pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \frac{\pi}{5} \text{ v.e.} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{5}$$

$$\pi \int_0^a x^4 dx = \frac{\pi a^5}{5} \Rightarrow a = \sqrt[5]{2}$$

•  $p = 3$

$$\pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \frac{\pi}{7} \text{ v.e.} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{7}$$

$$\pi \int_0^a x^6 dx = \frac{\pi a^7}{7} \Rightarrow a = \sqrt[7]{2}$$

Slutsats: Det verkar som att sambandet är att  $a$  är udda rot ur 2  
 $a = \sqrt[3]{2}$ ,  $a = \sqrt[5]{2}$ ,  $a = \sqrt[7]{2}$  osv...

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	x	2/1	
Matematiska resonemang	x	1/0	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	
<b>Summa</b>		<b>3/1</b>	

Kommentar: Eleven drar en enkel slutsats om sambandet för  $a$ . Däremot görs ingen koppling mellan  $a$  och  $p$  i slutsatsen. Lösningen erhåller därmed 1 g för matematiska resonemang

Elevlösning 2 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna).

1/2)  $p = 1 \Rightarrow y = x$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{3}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$\frac{\pi a^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a^3 = 2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$$

$p = 2 \Rightarrow y = x^2$

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{5}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{a^5 \pi}{5}$$

$$\frac{a^5 \pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow a^5 = 2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[5]{2}$$

$p = 3 \Rightarrow y = x^3$

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{\pi}{7} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{7}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^6 dx = \pi \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^a = \frac{a^7 \pi}{7}$$

$$\frac{a^7 \pi}{7} = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow a^7 = 2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[7]{2}$$

Slutsats:  $a$  minskar med  $\sqrt[2p+1]{2}$

för varje grad  $p$  på  $p$  då volymen skall dubbleras (om volymen ökas 3 ggr blir det  $\sqrt[2p+1]{3}$  osv)

$$\begin{aligned}
 \bullet V &= \pi \int_0^1 x^{2p} dx = \pi \left[ \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2p+1} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{2p+1} \\
 V_1 &= \pi \int_0^a x^{2p} dx = \pi \left[ \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^a = \frac{\pi a^{2p+1}}{2p+1} \\
 \frac{2\pi}{2p+1} &= \frac{\pi a^{2p+1}}{2p+1} \Rightarrow a^{2p+1} = 2 \\
 a &= \sqrt[2p+1]{2}
 \end{aligned}$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	————— x —————>	2/2	
Matematiska resonemang	————— x —————>	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	————— x —————>	0/1	
<b>Summa</b>		<b>3/4</b>	

*Kommentar:* Eleven visar MVG-kvaliteter genom att behandla den generella lösningen och visa hur  $a$  beror av  $p$ . Dessutom visar eleven MVG-kvalitet genom att redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17.**

**Elevlösning 1 (1 g och 1 vg och en av MVG-kvaliteterna)**

17) För att  $\triangle z_1 z_2 z_3$  ska vara rätvinklig  
i vinkeln  $z_1$  så måste  $z_3 = -1 + bi$  ✓  
där  $b < 0$  eller  $b > 0$ .  
För att  $\triangle z_1 z_2 z_3$  ska vara rätvinklig  
i vinkeln  $z_2$  så måste  $z_3 = 1 + bi$   
där  $b < 0$  eller  $b > 0$ .  
För att  $\triangle z_1 z_2 z_3$  ska vara rätvinklig  
i vinkeln  $z_3$  så måste linjerna  
 $(z_1 z_3)^2 + (z_2 z_3)^2 = (z_1 z_2)^2$

*Kommentar:* Eleven utför en korrekt analys av hur linjerna kring  $z_1$  och  $z_2$  ska vara och dessutom poängterar att  $z_3$  inte får sammanfalla med  $z_1$  eller  $z_2$ . Lösningen uppfyller därmed MVG-kvaliteten för bevis och analys. Eleven har påbörjat diskussion kring cirkeln men slutför den ej och erhåller därför inte MVG-kvaliteterna för "tolkning" och "utvecklar problem".

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 18.

Elevlösning 1 (2 vg)

$$18) \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

$$w = u e^{ax}$$

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = u' e^{ax} + a u e^{ax}$$

$$0 = -a C e^{-ax} e^{ax} + C e^{-ax} a e^{ax}$$

$$a C e^{-ax} e^{ax} = a C e^{-ax} e^{ax}$$

$$VL = HL$$

Svar: Härledningarna ovan visar att

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

$u$  är en lösning

$$u = C e^{-ax}$$

$$u' = -a C e^{-ax}$$

byter ut  $u$  och  $u'$

mot deras värden

*Kommentar:* Elevens lösning bygger på likheten som ska visas och erhåller därför inte MVG-kvaliteten för bevis.