Skolverket

Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap
Umeå universitet

PBMaE 12-04

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-16

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 120 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande, även symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 9 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänt" och "Väl Godkänt" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänt" ska kraven för "Väl godkänt" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn:______________________________

Skola:________________ Klass/program:____________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Prov och provmaterial som ska återanvändas omfattas av sekretess enligt 17 kap 4§ offentlighets- och sekretesslagen. Avsikten är att prov och provmaterial ur provbanken ska kunna återanvändas genom att lösenordsskydda ingående material. Vid sekretessbedömning ska detta beaktas.

Uppgift nr 1 (5855)
1/0 , 2/0

Skriv de komplexa talen på formen $a+bi$

a) $(5-4i)(5+4i)$ *Endast svar fordras*

b) $\dfrac{5+5i}{3-4i}$

Uppgift nr 2 (6037)
2/0

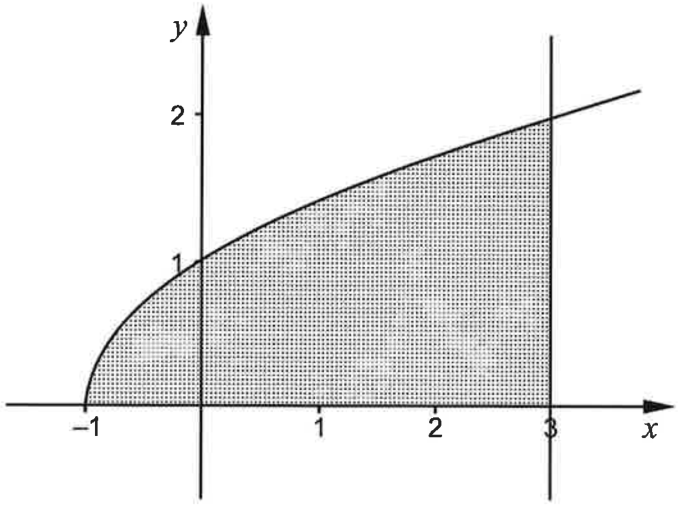
Lös ekvationen $z^2 = 2z - 4$

Uppgift nr 3 (5859)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 6y' - 7y = 0$ för vilken $y(0) = 7$ och $y'(0) = 9$

Uppgift nr 4 (5856)
2/0

Det område som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x+1}$, linjen $x = 3$ och x-axeln får rotera runt x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.



Uppgift nr 5 (5858)
2/0

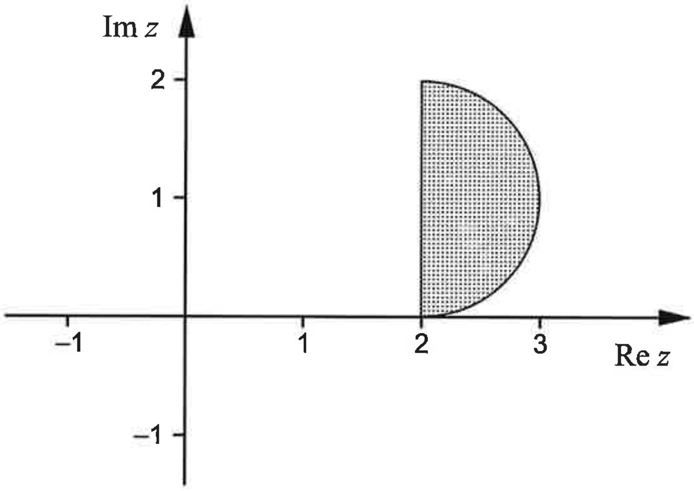
Skriv talet $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$ på formen $a + bi$
Förenkla svaret så långt som möjligt.

Uppgift nr 6 (5857)
1/1

$z_1 = 8(\cos 80° + i \sin 80°)$
Bestäm z_2 så att $z_1 z_2 = 24i$

Uppgift nr 7 (5860)
0/1

Vilket av alternativen A-D beskriver bäst det markerade området i det komplexa talplanet?
Endast svar fordras



A) $|z-2i| \leq 1$ och $\text{Re}\, z \leq 2$
B) $|z-2-i| \leq 1$ och $\text{Re}\, z \geq 2$
C) $|z-2i| \leq 1$ och $\text{Re}\, z \geq 2$
D) $|z-2+i| \geq 1$ och $\text{Re}\, z \leq 2$

Uppgift nr 8 (5381)
2/0 , 0/2/¤

Funktionen f är definierad genom $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24x$

a) Visa att f har en lokal maximipunkt för $x = 1$

b) Visa att f har en lokal minimipunkt i intervallet $x < 0$ och bestäm dess x-koordinat.

Uppgift nr 9 (5864)
3/4/¤

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

I den här uppgiften ska du studera tredjegradsekvationer av typen $z^3 + az + b = 0$, där a och b är reella tal.

Du ska bestämma antalet reella och antalet icke-reella rötter till ekvationen för olika värden på a och b.
Du får utgå ifrån att tredjegradsekvationer har 3 rötter, se faktarutan.

FAKTARUTA

Antal rötter till ekvationer
En andragradsekvation med reella koefficienter har antingen två reella rötter, en reell dubbelrot eller två icke-reella rötter. Om man räknar dubbelroten som två rötter kan man säga att en andragradsekvation alltid har två rötter.
På motsvarande sätt gäller det att tredjegradsekvationer har tre rötter, fjärdegradsekvationer har fyra rötter, osv

- Börja med fallet $a \neq 0, b = 0$, det vill säga ekvationen $z^3 + az = 0$
Undersök, för några olika värden på *a*, antalet reella och antalet icke-reella rötter till ekvationen $z^3 + az = 0$
(som direkt inses är en av rötterna $z = 0$ som är ett reellt tal).

Sammanfatta resultaten av dina undersökningar i en tabell:

a	b	Antal reella rötter	Antal icke-reella rötter
1	0		
−1	0		
	0		
	0		

- Formulera en slutsats om antalet reella och icke-reella rötter till ekvationen i fallet $b = 0$

- Undersök sedan fallet $a = 0, b \neq 0$, det vill säga ekvationen $z^3 + b = 0$, för olika värden på *b*.
Formulera en slutsats om antalet reella och icke-reella rötter till ekvationen i detta fall.

- Undersök slutligen fallet $a > 0, b \neq 0$ godtyckligt.
  Formulera och bevisa en slutsats om antalet reella och icke-reella rötter till ekvationen i detta fall.

- En tredjegradsekvation har högst tre reella rötter.
  Sammanfatta de slutsatser du har dragit i övriga punkter och ange antalet reella rötter som ekvationen $z^3 + az + b = 0$ kan ha.

Uppgift nr 10 (6038)
2/0

Bestäm $y(5)$ då $5y' - y = 0$ och $y(0) = 10$

Uppgift nr 11 (6039)
1/0 , 1/0 , 0/2

I en bakterieodling växer antalet bakterier under de första 30 timmarna med en hastighet som är 5 % av den aktuella mängden per timme. Från början är antalet bakterier 200.
Låt $y(t)$ vara antalet bakterier t timmar efter odlingens början.

a) Ställ upp en differentialekvation för bestämning av $y(t)$ för $0 \leq t \leq 30$

b) Bestäm funktionen $y(t)$ för $0 \leq t \leq 30$

Efter 30 timmar ökar man temperaturen vilket får till följd att antalet bakterier under de därefter följande 20 timmarna växer med en hastighet som är 7 % av den aktuella mängden per timme.

c) Bestäm funktionen $y(t)$ för $30 \leq t \leq 50$

Uppgift nr 12 (5869)
1/1 , 0/1

Volymen av en sfärisk ballong ökar med hastigheten 600 cm^3/min.

a) Med vilken hastighet ökar radien i det ögonblick då den är 5,0 cm?

b) Med vilken hastighet ökar ballongens area i det ögonblick då radien är 5,0 cm?

Uppgift nr 13 (6018)
0/1 , 0/1

Funktionen f har derivatan $f'(x) = e^{0,1x^2} - 2\sin x$

a) Visa att funktionen f har en lokal maximipunkt.

b) Bestäm maximipunktens x-koordinat med minst tre värdesiffror.

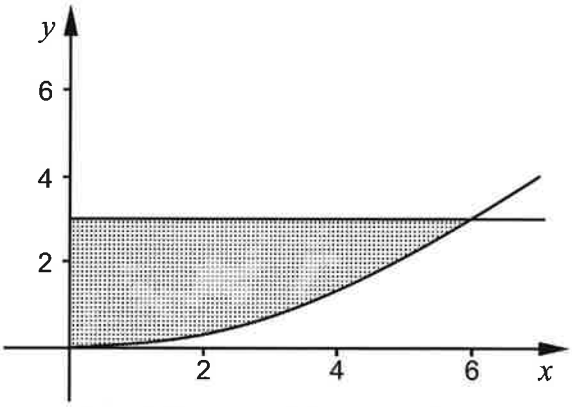
Uppgift nr 14 (5871)
0/1

Volymen av en rotationskropp ges av integralen $\pi\int_0^4 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

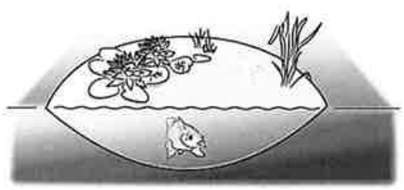
Bestäm ett område i första kvadranten som vid rotation kring x-axeln ger upphov till den rotationskropp vars volym ges av den givna integralen.

Uppgift nr 15 (6020)
0/3/¤

En trädgårdsdamm har samma form som den rotationskropp som bildas då det område i första kvadranten som begränsas av kurvan $y=\frac{x^2}{12}$, linjen $y=3$ och y-axeln, roterar kring y-axeln.



1 l.e. i figuren motsvarar 1 dm.



Vatten rinner in i dammen med hastigheten $u(t)$ liter/min, där t är tiden i minuter och $u(t)=10+0{,}4t$. Vid $t=0$ är dammen tom.

Hur lång tid tar det att fylla dammen?

Uppgift nr 16 (6017)
0/2 , 0/1/¤

a) Alla lösningar till differentialekvationen $y' - 2y = 0$ ska även vara lösningar till differentialekvationen $y'' - ay' + ay = 0$. Bestäm konstanten a så att detta gäller.

b) Undersök om omvändningen gäller för detta värde på a, det vill säga om alla lösningar till $y'' - ay' + ay = 0$ är lösningar till $y' - 2y = 0$

==

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

==

Uppgift nr 1 (5855)

Max 3/0

a)	Korrekt svar (41)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex förlänger med konjugatet	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(-\frac{1}{5}+\frac{7i}{5}\right)$	+1 g

Uppgift nr 2 (6037)

Max 2/0

Godtagbar metod	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z=1\pm i\sqrt{3}$)	+1 g

Uppgift nr 3 (5859)

Max 3/0

Korrekt uppställd och löst karakteristisk ekvation	+1 g
med korrekt allmän lösning till differentialekvationen	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y=5e^{-x}+2e^{7x}$)	+1 g

Uppgift nr 4 (5856)

Max 2/0

Korrekt uppställd integral	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (8π)	+1 g

Uppgift nr 5 (5858)

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex tecknar sambandet $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(1+i)$	+1 g

Uppgift nr 6 (5857)

Max 1/1

Godtagbar ansats, bestämmer $\mid z_2 \mid$ eller $\arg(z_2)$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_2 = 3(\cos 10° + i\sin 10°)$)	+1 vg

Uppgift nr 7 (5860)

Max 0/1

Korrekt svar (B: $\mid z-2-i \mid \leq 1$ och $\text{Re}\, z \geq 2$)	+1 vg

Uppgift nr 8 (5381)

Max 2/2/¤

a)	Godtagbar ansats, t ex visar att derivatan har ett nollställe för $x=1$	+1 g
	med godtagbar motivering av att det är en maximipunkt	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatans övriga nollställen, $x = \pm\sqrt{2}$ *	+1 vg
	med godtagbart slutfört bevis av att f har ett minimum för $x = -\sqrt{2}$, där vissa motiveringar kan vara bristfälliga eller saknas	+1 vg

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod (faktorsatsen) för att lösa ekvationen $f'(x)=0$ *
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	genomföra beviset formellt korrekt.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

*MVG-kvaliteten gällande generella metoder utfaller samtidigt som den första vg-poängen delas ut.

Uppgift nr 9 (5864)

Max 3/4/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre**		**→ Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + az = 0$ för minst ett värde på $a \neq 0$ **1 g**	Eleven bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + az = 0$ för minst ett positivt och ett negativt värde på a. **2 g**	Eleven bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + az = 0$ för minst ett positivt och ett negativt värde på a *och* bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + b = 0$ för minst ett värde på $b \neq 0$ **2 g och 1 vg**	**2/1**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ *eller* i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$ baserat på ett specialfall. **1 g**	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ *eller* i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$ baserat på några specialfall eller generella undersökningar. **1 g och 1 vg**	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ *och* i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$ baserat på några specialfall eller generella undersökningar. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är lätt följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**		**0/1**
Summa				**3/4**

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	genomföra generella undersökningar både i fallet $z^3 + az = 0$, $a \neq 0$ och i fallet $z^3 + b = 0$, $b \neq 0$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med godtagbar motivering dra slutsatsen att det möjliga antalet reella rötter till ekvationen är ett eller tre.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa att ekvationen har 1 reell rot och 2 icke-reella rötter i fallet $z^3 + az + b = 0$, $a > 0$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen omfattar vissa generella beräkningar eller resonemang.

Uppgift nr 10 (6038)

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer den allmänna lösningen $y = Ce^{0,2x}$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (27)	+1 g

Uppgift nr 11 (6039)

Max 2/2

a)	Godtagbar ansats, t ex ställer upp en differentialekvation som beskriver förloppet, $y' = 0,05y$	+1 g
b)	Godtagbar lösning med korrekt svar ($y(t) = 200e^{0,05t}$)	+1 g
c)	Ställer upp en differentialekvation som gäller i intervallet $30 \leq t \leq 50$ och anger begynnelsevillkoret $y(30) \approx 896$	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($y(t) = 110e^{0,07t}$)	+1 vg

Uppgift nr 12 (5869)

Max 1/2

a)	Godtagbar ansats, t ex tecknar $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,9 cm/min)	+1 vg
b)	Godtagbar lösning med godtagbart svar (240 cm^2/min)	+1 vg

Uppgift nr 13 (6018)

Max 0/2

a)	Godtagbar motivering av att f har en lokal maximipunkt	+1 vg
b)	Godtagbar bestämning av x-koordinaten ($x \approx 0{,}541$)	+1 vg

Uppgift nr 14 (5871)

Max 0/1

Godtagbar ansats, t ex beskriver ett område som begränsas av

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ +1 vg

Uppgift nr 15 (6020)

Max 0/3/¤

Godtagbar ansats, t ex beräknar dammens volym, 170 liter	+1 vg
Ställer upp en ekvation för bestämning av tiden*	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (13 min)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod och ställa upp en ekvation för bestämning av tiden*.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

*MVG-kvaliteten gällande generella metoder utfaller samtidigt som den andra vg-poängen delas ut.

Uppgift nr 16 (6017)

Max 0/3/¤

a) Godtagbar ansats, t ex inser att $k = 2$ ska vara rot till den karakteristiska ekvationen till $y'' - ay' + ay = 0$ +1 vg

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 4$) +1 vg

b) Bestämmer den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$ eller visar att det finns någon funktion som är lösning till $y'' - 4y' + 4y = 0$ men inte till $y' - 2y = 0$ +1 vg

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ inte är lösningar till $y' - 2y = 0$ med korrekt motivering.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 9.

Elevlösning 1 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

• $a = 1$, $b = 0$ ger
$$z^3 + z = 0$$
$$z(z^2+1) = 0$$
$$z^2 + 1 = 0$$
$$z^2 = -1$$
$$z = \pm i$$

Svar: 1 reell, 2 icke-reella

• $a = -1$, $b = 0$ ger
$$z^3 - z = 0$$
$$z(z^2-1) = 0$$
$$z^2 - 1 = 0$$
$$z^2 = 1$$
$$z = \pm 1$$

Svar: 3 reella rötter

• $a \neq 0$, $b = 0$ ger
$$z^3 + az = 0$$
$$z(z^2+a) = 0 \qquad z_1 = 0 \text{ reell}$$
$$z^2 + a = 0$$
$$z^2 = -a$$
$$z = \pm\sqrt{-a} \qquad a > 0 \ \ 2 \text{ icke reella}$$
$$a < 0 \ \ 2 \text{ reella}$$

• $a = 0$, $b = 1$ ger
$$z^3 + 1 = 0 \qquad z = re^{\varphi i} \quad |-1| = 1 \quad \arg(-1) = \pi$$
$$z^3 = -1$$
$$r^3 e^{3\varphi i} = 1e^{\pi i}$$
$$r^3 = 1 \qquad 3\varphi = \pi + n2\pi \qquad n = 0,1,2 \ldots$$
$$r = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3}$$
$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Svar: En reell, två icke-reella

•

a	b	reella rötter	imaginära rötter
1	0	1	2
-1	0	3	0
0	1	1	2

$a = 0$
$b \neq 0$ ger $z^3 + b = 0$
$z^3 = -b$

$\boxed{b < 0 \text{ ger positivt tal}}$

positiva reella b har $|b| = b$
$\arg(b) = 0$

$z^3 = r^3 \cdot e^{3\varphi i}$ $\quad r = \sqrt[3]{b} = R$

$r^3 \cdot e^{3\varphi i} = b e^{0i}$

$3\varphi = 0 + n2\pi \quad n = 0,1,2$

$\varphi = \frac{n2\pi}{3}$

$z_1 = R(\cos 0 + i \sin 0) = R$ reell

$z_2 = R(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{R}{2} + R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = R(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{R}{2} - R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$a = 0$
$b < 0$ ger 1 reell rot
2 imaginära rötter

$\boxed{b > 0 \text{ ger negativt tal}}$

negativa reella b har $|b| = b$
$\arg(b) = \pi$

$z^3 = r^3 \cdot e^{3\varphi i}$

$r^3 e^{3\varphi i} = b e^{\pi i}$

$3\varphi = \pi + n2\pi \quad n = 0,1,2$

$\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3}$

$z_1 = R(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{R}{2} + R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = R(\cos\pi + i\sin\pi) = -R$

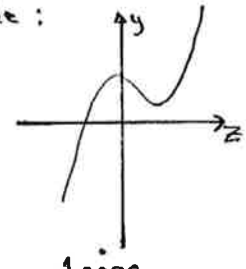
$z_3 = R(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{R}{2} - R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$a = 0$
$b > 0$ ger 1 reell rot
2 imaginära rötter

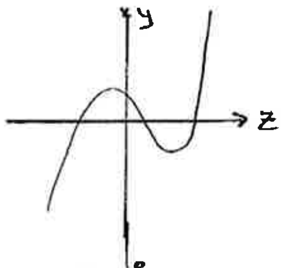
I fallet $a = 0$, $b \neq 0$ ger $b > 0$ och $b < 0$ samma svar.

$a > 0$
$b \neq 0$ ger $z^3 + az + b = 0$

Jag kan inte visa detta algebraiskt, men jag kan med text.
En tredjegradsfunktion korsar z-axeln 1 eller 3 gånger (obs, aldrig 2!) enligt följande:



1 gång



3 gånger

Om z korsas 1 gång ger det 1 reell och 2 imaginära rötter. Om z korsas 3 gånger ger det 3 reella rötter. Dock kan z endast korsas 3 gånger om det finns en z^2-term som styr så att parabeln svänger tillbaka till under nollstället, och det finns ingen z^2-term i z^3+az+b. Därför har $z^3+az+b=0$ en reell rot och två imaginära.

Resultat

a	b	Imaginära -	Reella - rötter
>0	0	2	1
<	0	0	3
0	>0	2	1
0	<0	2	1
>0	>0	2	1
>0	<0	2	1

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	2/1	
Matematiska resonemang	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	0/1	
Summa	**3/4**	

Kommentar: Eleven genomför generella undersökningar både i fallet $z^3+az=0$, $a\neq 0$ och i fallet $z^3+b=0$, $b\neq 0$. Eleven visar MVG-kvaliteter genom att med ett godtagbart resonemang förklara och dra slutsatsen att det möjliga antalet reella rötter är ett eller tre. Dessutom visar eleven MVG-kvalitet genom att redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16b.

När eleven löser uppgiften finns delar av det som krävs som lösning till 16b) i 16a). Därför innehåller exemplen på elevlösningarna båda deluppgifterna, men det är endast 16b) som bedöms.

Elevlösning 1 (1 vg).

a) $y' - 2y = 0$ $\quad$ $y'' - ay' + ay = 0$

$y = C \cdot e^{2x}$ $\quad$ $r^2 - ar + a = 0$

$r = 2$

$\longrightarrow 4 - 2a + a = 0$

$4 = a$

$y = e^{2x}(C + Dx)$ $\quad$ $a = 4$

b) $y = Ce^{2x} + Dx \cdot e^{2x}$

$y = Ce^{2x}$

Alla lösningar till $y' - 2y = 0$ är lösningar till $y'' - ay' + ay = 0$ för $a = 4$ om konstanten $D = 0$

Kommentar: Eleven bestämmer den allmänna lösningen men drar inte slutsatsen att det finns lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ som inte är lösningar till $y' - 2y = 0$. Lösningen erhåller därmed 1 vg-poäng

Elevlösning 2 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna).

$$\left.\begin{array}{ll} ① & y' - 2y = 0 \\ ② & y'' - ay' + ay = 0 \end{array}\right\}$$ Alla lösningar lika

① $y = Ce^{2x}$ ska vara resultat till alla lösningar på ②

$r = 2 \Rightarrow 2^2 - 2a + a = 0 \rightarrow a = 4$

$y'' - 4y' + 4y = 0$

b) ② $y = e^{2x}(Cx + D)$ Om Cx är 0 så blir $C \cdot$ nr ① = $D \cdot$ nr ②

$C_1 e^{2x} = e^{2x}(C_2 x + D_2)$

$\Downarrow$

$C_1 = C_2 x + D_2$ Alla fungerar som lösningar om C_2 är Noll.

Nej för att

$C_1 e^{2x} = e^{2x}(C_2 x + D_2)$

för att

$C_2 x + D$ inte är en konstant

om C_2 inte är noll.

då förändras konstanten och lösningen bara gälla i en punkt på kurvan och inte alla.

$$\underline{C_1 e^{2x} = C_2 x e^{2x} + De^{2x}}$$

är inte samma sak

Kommentar: Eleven ger en korrekt motivering till varför alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ inte är lösningar till $y' - 2y = 0$, vilket innebär att eleven erhåller MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Däremot kan eleven inte uppnå MVG-kvalitet vad gäller matematiskt språk. T.ex. saknas redovisning av den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$ och på några ställen är kommentarerna otydliga och bristfälliga.