Skolverket

Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap
Umeå universitet

PBMaE 13-04

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-11
Del II: Uppgift 12-17

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 140 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande, även symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 11 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänt" och "Väl Godkänt" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänt" ska kraven för "Väl godkänt" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn: ______________________________

Skola: ____________________ Klass/program: ____________________

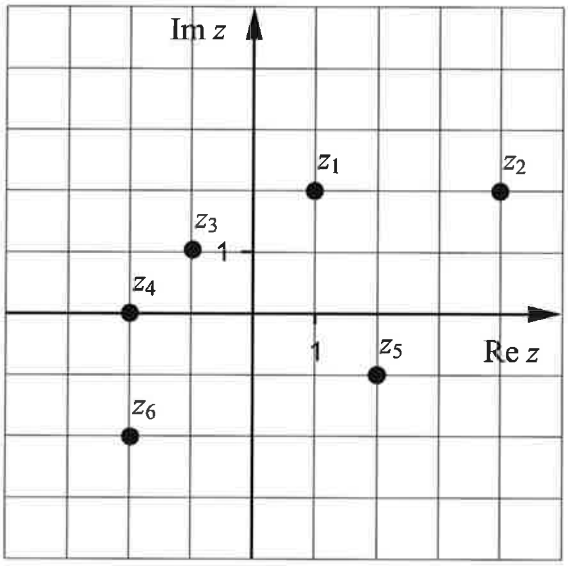
Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (6058)
1/0

Lös differentialekvationen $y' + 5y = 0$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (6059)
1/0 , 1/0

De komplexa talen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 och z_6 är markerade i det komplexa talplanet i figuren.



För vilket eller vilka av talen gäller att

a) $\text{Im}\, z = 2$ *Endast svar fordras*

b) $|z| = \sqrt{2}$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 3 (6060)
2/0

Skriv talet $\dfrac{17-\text{i}}{1-3\text{i}}$ på formen $a + b\text{i}$

Uppgift nr 4 (6061)
2/0

Differentialekvationen $y' = y^2 - x$ har en lösning y som uppfyller villkoret $y(0) = 1$

Bestäm ett närmevärde till $y(2)$ med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod. Välj steglängden 1.

Uppgift nr 5 (6062)
3/0

Lös ekvationen $(z^2 + 9)(z^2 - 2z + 5) = 0$

Uppgift nr 6 (6063)
1/1

Bestäm en rot till ekvationen $z^4 = 2^8(\cos 40° + i\sin 40°)$

Uppgift nr 7 (6064)
1/1

Beräkna värdet på konstanten k, så att $y = x^2 \ln x$ blir en lösning till differentialekvationen $xy' + ky = x^2$

Uppgift nr 8 (6065)
0/1 , 0/1

Ett komplext tal z divideras med det komplexa talet i.

a) Bestäm vilket samband som gäller mellan absolutbeloppen för z och kvoten $\frac{z}{i}$

b) Bestäm vilket samband som gäller mellan argumenten för z och kvoten $\frac{z}{i}$

Uppgift nr 9 (6066)
1/0 , 0/2 , 0/1

Differentialekvationen $y'' + 4y' - 12y = 0$ är given.

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen som har en extrempunkt i punkten (0, 12).

c) Undersök om extrempunkten i b) är en maximipunkt eller en minimipunkt.

Uppgift nr 10 (6067)
0/3/¤

Funktionen $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x$ är definierad för alla reella x.
Visa att funktionens minsta värde är -80

Uppgift nr 11 (6068)
3/4/¤

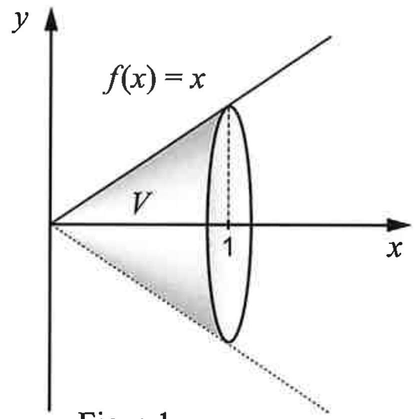
Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

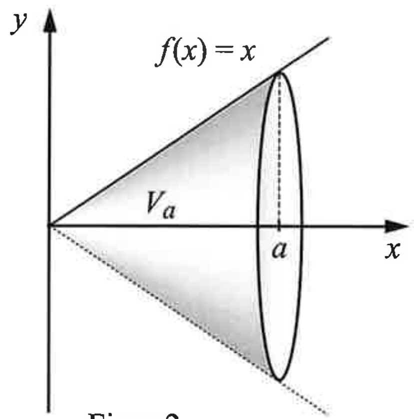
I den här uppgiften ska du undersöka volymer av de kroppar som bildas när området som begränsas av x-axeln, en lodrät linje och grafen till funktionen $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, $p > 0$ roterar kring x-axeln.
Låt V beteckna volymen av rotationskroppen då den lodräta linjen är $x = 1$
Låt V_a beteckna volymen av rotationskroppen då den lodräta linjen är $x = a$

Din uppgift är att för alla $p > 0$ bestämma a så att volymen då den lodräta linjen är $x = a$ blir dubbelt så stor som volymen då $x = 1$, det vill säga så att $V_a = 2V$

- Börja med fallet $p = 1$, det vill säga $f(x) = x$
  Bestäm a så att volymen av rotationskroppen i Figur 2 blir dubbelt så stor som volymen av rotationskroppen i Figur 1.

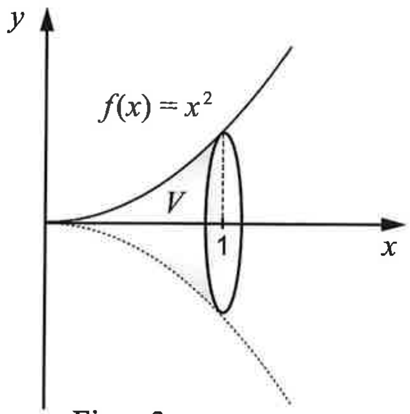


Figur 1

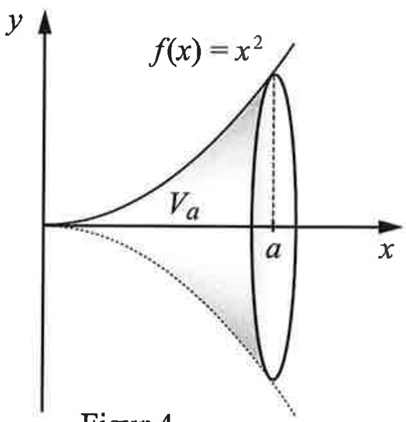


Figur 2

- Undersök nu fallet då $p = 2$. Bestäm a så att volymen av rotationskroppen i Figur 4 blir dubbelt så stor som volymen av rotationskroppen i Figur 3.

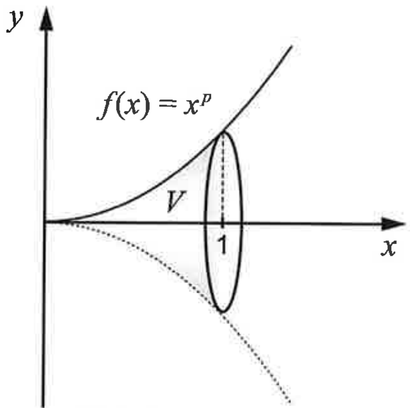


Figur 3

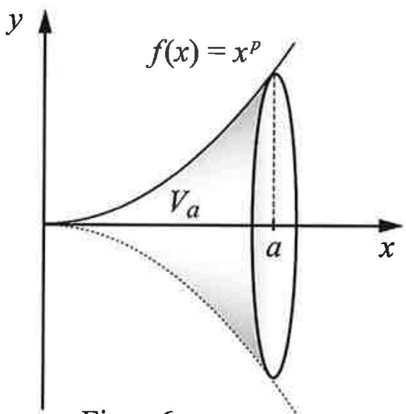


Figur 4

I figurerna 5 och 6 nedan visas grafen till funktionen $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, $p > 0$



Figur 5



Figur 6

- Undersök nu ytterligare ett fall där du själv väljer ett värde på p. Bestäm a så att volymen av rotationskroppen i Figur 6 blir dubbelt så stor som volymen av rotationskroppen i Figur 5.
- Formulera en slutsats om hur a beror av p utifrån dina beräkningar.
- Visa att din slutsats gäller för alla $p > 0$

Uppgift nr 12 (6069)
1/0 , 1/0

Två komplexa tal är givna, $z_1 = 2(\cos 45° + i \sin 45°)$ och $z_2 = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$

Bestäm

a) $\arg(z_1 z_2)$

b) $|z_1 z_2|$

Uppgift nr 13 (6070)
1/1 , 2/0

I en bakterieodling är $y(t)$ antalet bakterier t timmar efter odlingens början.
Processen kan beskrivas med differentialekvationen $y' = 0{,}2y$ tillsammans med villkoret $y(0) = 500$

a) Formulera med ord vad differentialekvationen tillsammans med villkoret säger om bakterieodlingen.

b) Lös den givna differentialekvationen och bestäm antalet bakterier i odlingen 30 timmar efter odlingens början.

Uppgift nr 14 (6071)
2/1

I en region A, som år 2010 hade 3,6 miljoner invånare, har man en prognos som säger att folkmängden kommer att öka med 0,80 % per år av den aktuella folkmängden.

I en annan region B, som år 2010 hade 2,5 miljoner invånare, har man gjort följande prognos över folkmängdsutvecklingen:

$y_B = 3{,}0 \cdot e^{0{,}020t} - 0{,}50$

där y_B är antalet invånare i miljoner t år efter år 2010.

Vilket år kommer folkmängden i region B att överstiga folkmängden i region A enligt prognoserna?

Uppgift nr 15 (6072)
0/2

William har fått rosfeber. Rosfebern visar sig som en cirkulär rodnad runt ett infekterat sår.
Rodnadens radie ökar med 0,7 cm/dygn innan behandling sätts in.
Med vilken hastighet ökar rodnadens area vid den tidpunkt då radien är 0,9 cm om ingen behandling ännu har satts in?

Uppgift nr 16 (6073)
0/3/¤

Bestäm konstanterna a och b så att uttrycket $\dfrac{x^2+a}{x^3-3bx^2+b^2x-1}$ går att förkorta med $(x-1)$

Uppgift nr 17 (6074)
0/2 , 0/1/¤

a) Alla lösningar till differentialekvationen $y'-2y=0$ ska även vara lösningar till differentialekvationen $y''-ay'+ay=0$. Bestäm konstanten a så att detta gäller.

b) Undersök om omvändningen gäller för detta värde på a, det vill säga om alla lösningar till $y''-ay'+ay=0$ är lösningar till $y'-2y=0$

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

Uppgift nr 1 (6058)

Max 1/0

Korrekt svar ($y = Ce^{-5x}$)	+1 g

Uppgift nr 2 (6059)

Max 2/0

a)	Korrekt svar (z_1 och z_2)	+1 g
b)	Korrekt svar (z_3)	+1 g

Uppgift nr 3 (6060)

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex förlänger med nämnarens konjugat	+1 g
med korrekt svar ($2+5i$)	+1 g

Uppgift nr 4 (6061)

Max 2/0

Godtagbar ansats, visar beräkningar t ex med en tabell	+1 g
med godtagbart svar (5)	+1 g

Uppgift nr 5 (6062)

Max 3/0

Godtagbar ansats, t ex en inledande undersökning om för vilka z som någon av faktorerna blir noll	+1 g
med godtagbar bestämning av minst två rötter	+1 g
med godtagbar bestämning av ekvationens samtliga rötter ($z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ $z_3 = 1+2i$, $z_4 = 1-2i$)	+1 g

Uppgift nr 6 (6063)

Max 1/1

Godtagbar ansats, t ex bestämmer absolutbelopp *eller* argument	+1 g
med någon korrekt rot (t ex $4(\cos 10° + i \sin 10°)$)	+1 vg

Uppgift nr 7 (6064)

Max 1/1

Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatan av y, $y' = 2x \ln x + x$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($k = -2$)	+1 vg

Uppgift nr 8 (6065)

Max 0/2

a)	Godtagbar bestämning av sambandet mellan absolutbeloppen ("Absolutbeloppen är samma")	+1 vg
b)	Godtagbar bestämning av sambandet mellan argumenten ("Argumentet minskar med 90° när z delas med i")	+1 vg

Uppgift nr 9 (6066)

Max 1/3

a)	Bestämmer den allmänna lösningen till differentialekvationen korrekt ($y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{2x}$)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt ekvationssystem	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y = 3e^{-6x} + 9e^{2x}$)	+1 vg
c)	Visar att den givna punkten är en minimipunkt	+1 vg

Uppgift nr 10 (6067)

Max 0/3/¤

Visar att $f'(2)=0$	+1 vg
Visar att f har ett lokalt minimum för $x=2$	+1 vg
Motiverar att $x=2$ är det enda nollstället till $f'(x)$	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera funktionen och göra tolkningar som är tillräckliga för att visa att f endast har en extrempunkt, t ex genom att visa att f har ett lokalt minimum för $x=2$ *och* motivera att $x=2$ är det enda nollstället till $f'(x)$
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	visa att -80 är funktionens minsta värde, t ex genom att godtagbart redogöra för att den lokala minimipunkten är ett globalt minimum samt visa att funktionsvärdet för den globala minimipunkten är -80
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk

Elevlösningar återfinns i separata filer i provbanken

Uppgift nr 11 (6068)

Max 3/4/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

<table>
<tr><th>Bedömningen avser</th><th colspan="4">Kvalitativa nivåer
Lägre ——————→ Högre</th><th>Total poäng</th></tr>
<tr><td>Metodval och genomförande
I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.
Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</td><td>Eleven beräknar V samt a för minst ett värde på p.
1-2 g</td><td colspan="2">Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att beräkna a för minst två värden på p
2 g och 1 vg</td><td>Eleven bestämmer a för minst två värden på p och inleder en generell undersökning, t ex tecknar ekvationen
$\pi\int_0^a x^{2p}\,dx = 2\cdot\pi\int_0^1 x^{2p}\,dx$
2 g och 2 vg</td><td>2/2</td></tr>
<tr><td>Matematiska resonemang
Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</td><td colspan="2">Eleven drar någon slutsats om sambandet mellan a och p (t.ex. "a blir mindre då värdet på p blir större") grundat på en undersökning av minst två specialfall.
1 g</td><td colspan="2">Eleven beskriver godtagbart hur a beror av p med hjälp av en generell beräkning eller grundat på en undersökning av minst tre specialfall,
t ex $a = 2^{\frac{1}{2p+1}}$
1 g och 1 vg</td><td>1/1</td></tr>
<tr><td>Redovisning och matematiskt språk
Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Redovisningen är lätt att följa och förstå och omfattar mer än tre av punkterna. Det matematiska språket är acceptabelt.
1 vg</td><td>0/1</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td colspan="4"></td><td>3/4</td></tr>
</table>

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod, t ex teckna ekvationen $\pi\int_0^a x^{2p}\mathrm{d}x = 2\cdot\pi\int_0^1 x^{2p}\mathrm{d}x$ och påbörja en lösning av ekvationen.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa att slutsatsen gäller, $a = 2^{\frac{1}{2p+1}}$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Elevlösningar återfinns i separata filer i provbanken

Uppgift nr 12 (6069)

Max 2/0

a) Korrekt svar med godtagbar motivering ($75°$) +1 g

b) Korrekt svar med godtagbar motivering (6) +1 g

Uppgift nr 13 (6070)

Max 3/1

a) Anger att antalet bakterier från början är 500 +1 g
Godtagbar beskrivning av differentialekvationen, t ex ”antalet bakterier ökar med en hastighet som är 20 % av mängden” +1 vg

b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer differentialekvationens lösning, $y = 500e^{0,2t}$ +1 g
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($2\cdot10^5$) +1 g

Uppgift nr 14 (6071)

Max 2/1

Bestämmer folkmängden i region A som funktion av tiden	+1 g
Ställer upp en ekvation för bestämning av den sökta tidpunkten	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (år 2034)	+1 vg

Uppgift nr 15 (6072)

Max 0/2

Godtagbar ansats, t ex tecknar $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,0 cm^2/dygn)	+1 vg

Uppgift nr 16 (6073)

Max 0/3/¤

Godtagbar ansats, t ex visar att täljaren är delbar med $(x-1)$ om $a=-1$	+1 vg
med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer ett värde på b för vilket nämnaren är delbar med $(x-1)$	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($a=-1$, $b=0$ eller $b=3$)	+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod (faktorsatsen) varav det följer att det inte finns andra värden på a och b som uppfyller det givna villkoret än $a=-1$, $b=0$ eller $b=3$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Uppgift nr 17 (6074)

Max 0/3/¤

a) Godtagbar ansats, t ex inser att $k = 2$ ska vara rot till den karakteristiska ekvationen till $y'' - ay' + ay = 0$ +1 vg
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 4$) +1 vg

b) Bestämmer den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$ eller visar att det finns någon funktion som är lösning till $y'' - 4y' + 4y = 0$ men inte till $y' - 2y = 0$ +1 vg

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ inte är lösningar till $y' - 2y = 0$ med korrekt motivering.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Elevlösningar återfinns i separata filer i provbanken

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 10.
Elevlösning 1 (3 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 - 48 = 0$$
$$x^3 - x^2 - 4 = 0$$
$$x^3 - x^2 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$\begin{array}{r l}
 & x^2 + x + 2 \\
\hline
x - 2 \,\big) & \cancel{x^3} - x^2 - 4 \\
 & -(\cancel{x^3} - 2x^2) \\
\hline
 & + \cancel{x^2} - 4 \\
 & -(\cancel{x^2} - 2x) \\
\hline
 & 2\cancel{x} - \cancel{4} \\
 & -(\cancel{2x} - \cancel{4}) \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -2 + \frac{1}{4}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4}$$
$$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \qquad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

$f(x)$ är endast definierad för alla reella x

$$\Rightarrow f'(2) = 0$$
$$f''(x) = 3x^2 - 2x$$
minimipunkt $\Rightarrow f''(x) > 0$
$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8$$
$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2 = -80$$

Funktionens minimivärde är -80.

Kommentar: Eleven analyserar derivatan och gör tolkningarna att $f'(x) = 0$ endast för $x = 2$ samt att f har ett lokalt minimum för $x = 2$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för analys och tolkning av resultat även om eleven inte drar några slutsatser av sina tolkningar. Eleven ställer upp några villkor för att visa att funktionens minsta värde är -80 men redovisar inte fullständiga resonemang. Lösningen uppfyller därför inte MVG-kvalitet för bevis och resonemang. Eleven redovisar välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för redovisning och matematiskt språk.

Elevlösning 2 (3 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 48x$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48$

$f'(x) = 0$ där det finns extrempunkter

$0 = 12x^3 - 12x^2 - 48 \quad /12$

$0 = x^3 - x^2 - 4$

$x = 2$ verkar vara lösning

$0 = 2^3 - 2^2 - 4$ – Det stämmer

$x_1 = 2$

$$\begin{array}{l} x^2 + x + 2 \\ \hline x^3 - x^2 - 4 \quad \lfloor x - 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 4 \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline 2x - 4 \\ -(2x - 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$(x - 2)(x^2 + x + 2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} \qquad \frac{1}{4} - 2 < 0$

Bara $x_1 = 2$ är en reell lösning.

$f''(x) = 36x^2 - 24x \Rightarrow f''(2) = 144 - 48 > 0$

$\therefore x = 2$ är en minpunkt till f.

Eftersom $x = 2$ är den enda extrempunkten till f och $x = 2$ är en minpunkt måste funktionens minsta värde $f_{min} = f(2)$

$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2 = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 8 - 96$

$= 48 - 32 - 96 = 16 - 96 = \underline{\underline{-80}}$

Kommentar: Eleven analyserar derivatan och gör tolkningarna att $f'(x) = 0$ endast för $x = 2$ samt att f har ett lokalt minimum för $x = 2$. Lösningen uppfyller därför MVG-kvaliteten för analys och tolkning av resultat. Eleven visar att funktionens minsta värde är –80 genom att godtagbart redogöra för att den lokala minimipunkten är ett globalt minimum. Lösningen uppfyller därför MVG-kvalitet för bevis och resonemang. Eleven redovisar välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Lösningen uppfyller därför MVGkvaliteten för redovisning och matematiskt språk.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 11.
Elevlösning 1 (3 g och 1 vg)

$p = 1$

$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$ v.e

$2V = \frac{2\pi}{3}$

$\pi \int_0^a x^2 dx = \frac{\pi a^3}{3}$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$

$a = \sqrt[3]{2}$

• $p = 2$

$\pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \frac{\pi}{5}$ v.e $\Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{5}$

$\pi \int_0^a x^4 dx = \frac{\pi a^5}{5} \Rightarrow a = \sqrt[5]{2}$

• $p = 3$

$\pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \frac{\pi}{7}$ v.e $\Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{7}$

$\pi \int_0^a x^6 dx = \frac{\pi a^7}{7} \Rightarrow a = \sqrt[7]{2}$

Slutsats: Det verkar som att sambandet är att a är udda rot ur 2

$a = \sqrt[3]{2}$, $a = \sqrt[5]{2}$, $a = \sqrt[7]{2}$ osv ...

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	2/1	
Matematiska resonemang	X	1/0	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	
Summa		**3/1**	

Kommentar: Eleven drar en enkel slutsats om sambandet för *a*. Däremot görs ingen koppling mellan *a* och *p* i slutsatsen. Lösningen erhåller därmed 1 g för matematiska resonemang

Elevlösning 2 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna).

$p = 1 \Rightarrow y = x$

$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{3}$

$V_1 = \pi \int_0^a x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$

$\frac{\pi a^3}{\cancel{3}} = \frac{2\pi}{\cancel{3}} \Rightarrow a^3 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{2}}$

$p = 2 \Rightarrow y = x^2$

$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{5}$

$V_1 = \pi \int_0^a x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{a^5 \pi}{5}$

$\frac{a^5 \cancel{\pi}}{\cancel{5}} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{5}} \Rightarrow a^5 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[5]{2}}$

$p = 3 \Rightarrow y = x^3$

$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{\pi}{7} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{7}$

$V_1 = \pi \int_0^a x^6 dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^a = \frac{a^7 \pi}{7}$

$\frac{a^7 \cdot \pi}{7} = \frac{2\pi}{\cancel{7}} \Rightarrow a^7 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[7]{2}}$

Slutsats: a minskar med $\sqrt[2p+1]{2}$ för varje grad på p då volymen skall dubbleras (om volymen ökas 3 ggr blir det $\sqrt[2p+1]{3}$ osv)

$$V = \pi \int_0^1 x^{2p}\,dx = \pi \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2p+1} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{2p+1}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^{2p}\,dx = \pi \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^a = \frac{\pi a^{2p+1}}{2p+1}$$

$$\frac{2\pi}{2p+1} = \frac{\pi a^{2p+1}}{2p+1} \Rightarrow a^{2p+1} = 2$$

$$\boxed{a = \sqrt[2p+1]{2}}$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	2/2	
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**3/4**	

Kommentar: Eleven visar MVG-kvaliteter genom att behandla den generella lösningen och visa hur *a* beror av *p*. Dessutom visar eleven MVG-kvalitet genom att redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17b).

När eleven löser uppgiften finns delar av det som krävs som lösning till 17b) i 17a). Därför innehåller exemplen på elevlösningarna båda deluppgifterna, men det är endast 17b) som bedöms.

Elevlösning 1 (1 vg).

a) $y' - 2y = 0$

$y = C \cdot e^{2x}$

$y'' - ay' + ay = 0$

$r^2 - ar + a = 0$

$r = 2$

$\longrightarrow 4 - 2a + a = 0$

$4 = a$

$y = e^{2x}(C + Dx)$ $\quad a = 4$

b) $y = Ce^{2x} + Dx \cdot e^{2x}$

$y = Ce^{2x}$

Alla lösningar till $y' - 2y = 0$ är lösningar till $y'' - ay' + ay = 0$ för $a = 4$ om konstanten $D = 0$

Kommentar: Eleven bestämmer den allmänna lösningen men drar inte slutsatsen att det finns lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ som inte är lösningar till $y' - 2y = 0$. Lösningen erhåller därmed 1 vg-poäng

Elevlösning 2 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna).

$$\left.\begin{array}{ll} ① & y' - 2y = 0 \\ ② & y'' - ay' + ay = 0 \end{array}\right\}$$ Alla lösningar lika

① $y = Ce^{2x}$ ska vara resultat till alla lösningar på ②

$r = 2 \Rightarrow 2^2 - 2a + a = 0 \rightarrow a = 4$

$y'' - 4y' + 4y = 0$

b) ② $y = e^{2x}(Cx + D)$ Om Cx är 0 så blir C·nr ① = D·nr ②

$C_1 e^{2x} = e^{2x}(C_2 x + D_2)$

$\Downarrow$

$C_1 = C_2 x + D_2$ Alla fungerar som lösningar om C_2 är Noll.

Nej för att

$C_1 e^{2x} = e^{2x}(C_2 x + D_2)$

för att

$C_2 x + D$ inte är en konstant

om C_2 inte är noll.

då förändras konstanten och lösningen bara gälla i en punkt på kurvan och inte alla.

$C_1 e^{2x} = C_2 x e^{2x} + De^{2x}$

är inte samma sak

Kommentar: Eleven ger en korrekt motivering till varför alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ inte är lösningar till $y' - 2y = 0$, vilket innebär att eleven erhåller MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Däremot kan eleven inte uppnå MVG-kvalitet vad gäller matematiskt språk. T.ex. saknas redovisning av den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$ och på några ställen är kommentarerna otydliga och bristfälliga.