NATIONELLT PROV I MATEMATIK KURS E VÅREN 1996

Anvisningar

Provperiod	9 maj - 15 maj 1996.
Provtid	240 minuter utan rast.
Hjälpmedel	Miniräknare (ej symbolhanterande) och formelsamling.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 14 uppgifter. De flesta uppgifterna är av *långsvarstyp* (som ger *2 poäng eller mera*) Här räcker inte bara ett kort svar utan här krävs • att du skriver ned vad du gör och att du förklarar dina tankegångar, • att du ritar figurer vid behov och • att du skriver ned de beräkningar du gör. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl Godkänd”. Provet ger maximalt 50 poäng.

1. Skriv i polär form talet $3 + i\sqrt{3}$. (2p)

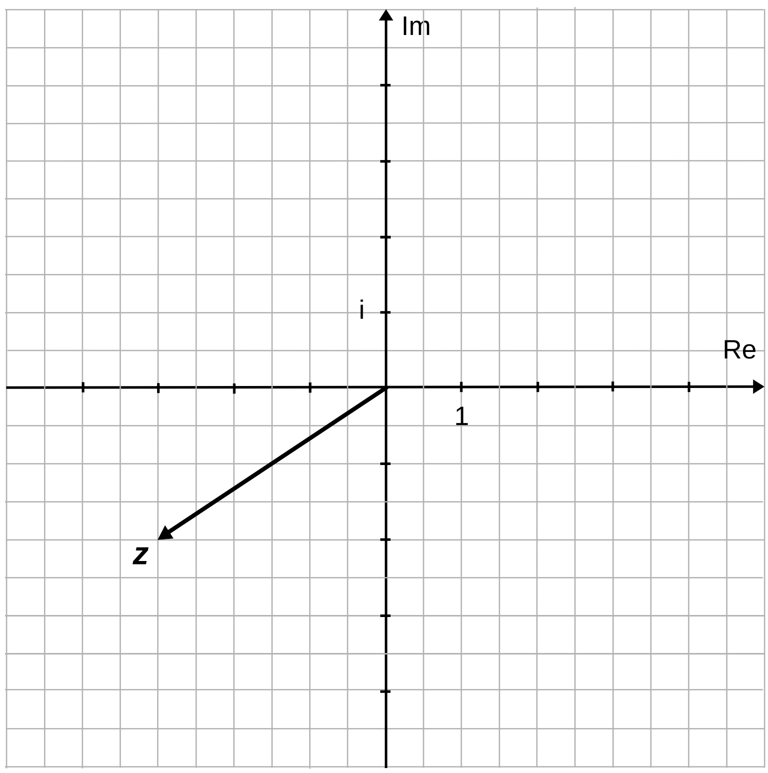
2. Förenkla det komplexa talet z så långt som möjligt. Svara i formen $a + bi$. (2p)

$$z = \frac{4 - 3i}{3 - 4i}$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (2p)

$$y'' - 12y' + 32y = 0$$

4. Det komplexa talet z är markerat i nedanstående figur.



Rita ett komplext talplan och markera talet $1 - z$. (2p)

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen (3p)

$$3y' - 2y = 0$$

för vilken gäller att $y'(0) = 5$.

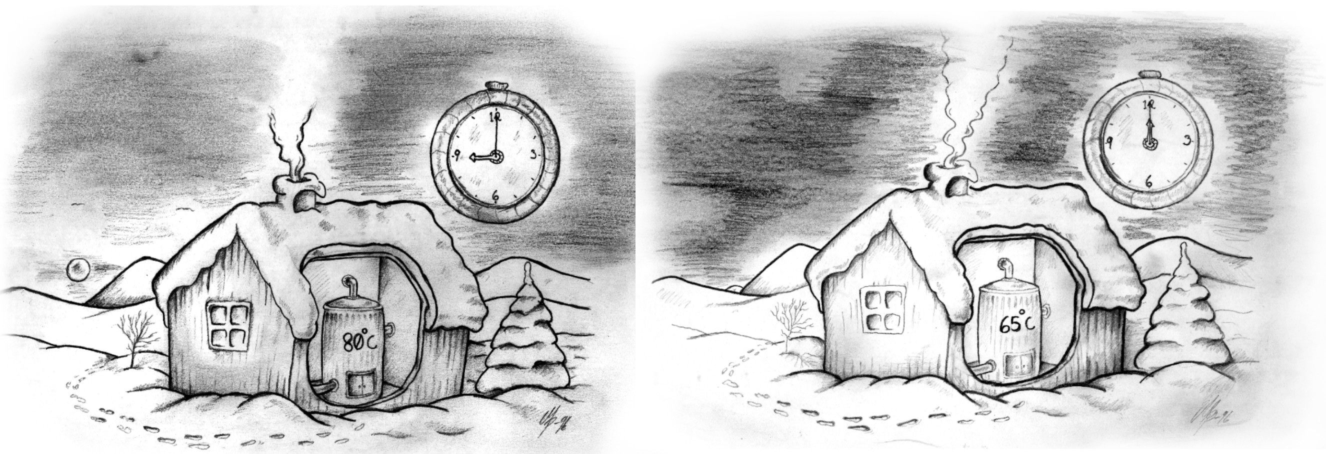
6. Strömstyrkan y milliampere genom en spole beror av tiden x sekunder enligt ekvationen

$$y = 11{,}2 + 5{,}28x - 0{,}044x^2 \qquad \text{då} \qquad 0 \le x \le 60$$

När ökar strömstyrkan med hastigheten 2,5 milliampere per sekund? (3p)

7. Lös ekvationen $z^3 + 6z^2 + 11z = 0$ fullständigt. (3p)

8.



En varmvattenberedare uppvärms vintertid med vedeldning. Varmvattenberedaren står i ett förrådsutrymme där omgivningens temperatur är 0 °C. Då man slutat elda är vattnets temperaturförändring per tidsenhet i varje ögonblick proportionell mot dess temperatur y °C. En vinterdag slutar man elda kl 21.00 och då är vattnets temperatur 80 °C. Vid midnatt kl 24.00 har vattnets temperatur sjunkit till 65 °C.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen och bestäm när man senast måste stiga upp morgonen därpå, om man vill duscha i 40-gradigt vatten. (4 p)

9. Välj numeriska värden på konstanterna k och m ($k \neq 0$, $m \neq 0$) så att integralen

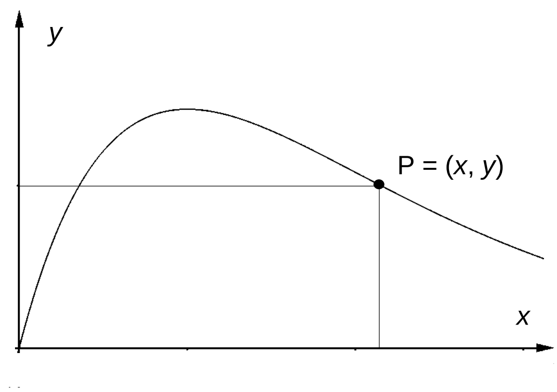
$\int_0^2 (kx + m)\,\mathrm{d}x$ får värdet 0 med ditt val av k och m. (2p)

10. Differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ har en lösning $y = 3\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{2x}$.

Bestäm konstanterna a och b samt ange begynnelsevillkor för $x = 0$ som ger just denna lösning. (4p)

11. Figuren visar grafen till funktionen $y = 4x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ i intervallet $x \geq 0$.

Från en punkt P på kurvan dras linjer mot x-axeln och y-axeln så att en rektangel bildas (se figur).



Visa med hjälp av derivata att rektangelns area har ett lokalt maximum för $x = 2$. (3p)

12. Om funktionerna f och g vet man att

- $f(0) = 4$ och $f'(x) = 3 - 6\mathrm{e}^{-2x}$
- $g'(x) = f'(x)$
- kurvorna $y = g(x)$ och $y = f(x)$ innesluter tillsammans med linjerna $x = -1$ och $x = 4$ ett område med arean 10 areaenheter

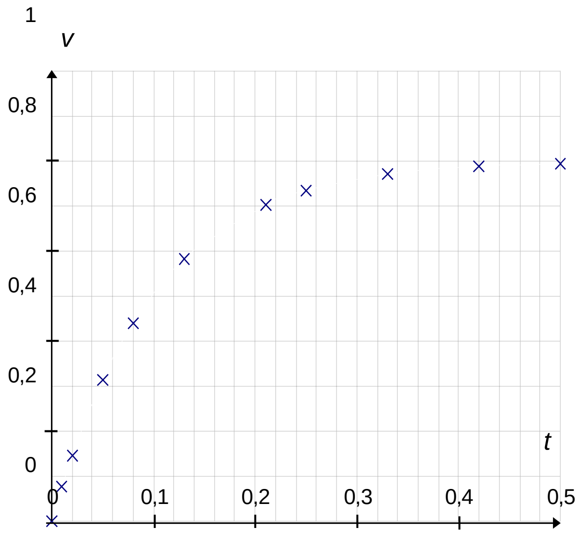
Bestäm $g(x)$. (5p)

13.

En hönsfjäder släpps från höjden 4,0 m. Fjäderns fallrörelse registreras och analyseras med hjälp av ett datorsystem. Resulterande mätdata gav följande diagram.

Hastigheten v i m/s som funktion av tiden t i sekunder.

Accelerationen $\frac{dv}{dt}$ i m/s^2 som funktion av hastigheten ~~v i m~~/s.



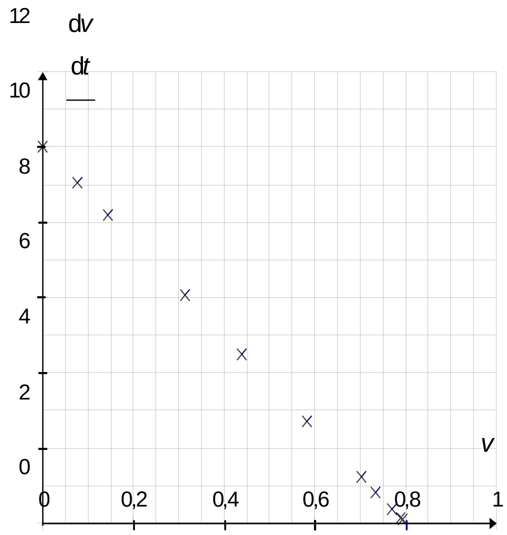


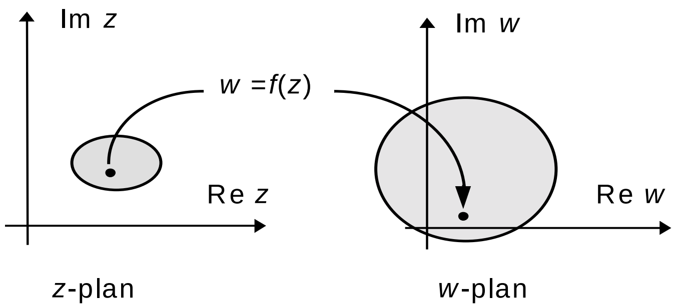
Diagram 2

a) Beskriv i ord fjäderns rörelse. (1p)

b) Ange en differentialekvation som beskriver hur $\frac{dv}{dt}$ beror av v och lös den. (4p)

c) Uppskatta med hjälp av diagram 1 hur långt fjädern faller under de första 0,50 sekunderna. Jämför med det värde du får ur din matematiska modell. (3p)

14. Ett område i matematiken kallas komplex analys. Där studerar man funktioner $w = f(z)$ som avbildar en talmängd i det komplexa talplanet (z-planet) på ett annat komplext talplan (w-planet).



De tre komplexa talen 0, 2 och 2 + 2i utgör hörn i en rätvinklig triangel i z-planet. Triangeln avbildas på w-planet med hjälp av funktionen $w = f(z)$, där $f(z) = z^2$.

a) Markera i w-planet bilderna av triangelns hörn. (2p)

b) Undersök hur triangelns hypotenusa avbildas på w-planet. (2p)

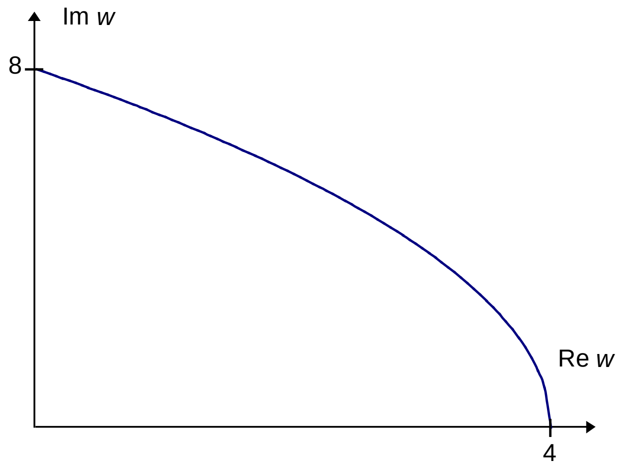
c) Bestäm bilderna av triangelns övriga sidor. (3p)

Bedömningsanvisningar - tidsbunden del

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
1.	$\left(\sqrt{12}\left(\cos 30^{\circ} + \ \mathrm{i} \sin 30^{\circ}\right)\right)$	**Max: 2 p**
	Korrekt metod	+1 p
	Korrekta beräkningar	+1 p
2.	$\left(\frac{24}{25} + \frac{7\mathrm{i}}{25}\right)$	**Max: 2 p**
	Korrekt metod	+1 p
	Korrekta beräkningar	+1 p
3.	$\left(y = C\mathrm{e}^{8x} + D\mathrm{e}^{4x}\right)$	**Max: 2 p**
	Korrekt löst karakteristisk ekvation	+1 p
	Korrekt allmän lösning	+1 p
4.	(Korrekt markerat talet 4 + 2i)	**Max: 2 p**
	Korrekt metod	+1 p
	Korrekt vektor och/eller punkt	+1 p
5.	$\left(y = 7{,}5\ \mathrm{e}^{2x/3}\right)$	**Max: 3 p**
	Korrekt allmän lösning	+1 p
	Korrekt metod för konstantbestämning	+1 p
	Korrekt partikulärlösning	+1 p
6.	(Efter 32 sekunder)	**Max: 3 p**
	Korrekt metod	+1-2 p
	Korrekta beräkningar	+1 p
7.	$\left(0,\ \ -3+\mathrm{i}\sqrt{2},\ \ -3-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$	**Max: 3 p**
	Bestämt $z_1 = 0$	+1 p
	Bestämt återstående rötter korrekt	+1-2 p

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
8.	(Kl 7.00)	**Max: 4 p**
	Korrekt differentialekvation	+1 p
	Korrekt bestämning av ingående konstanter	+1-2 p
	Korrekt bestämning av tiden	+1 p
9.		**Max: 2 p**
	Korrekt metod	+1 p
	Korrekt val av konstanterna	+1 p
10.	$\left(a=-1,\ b=-2,\ \text{begynnelsevillkor t.ex.}\ y(0)=5\ \text{och}\ y'(0)=1\right)$	**Max: 4 p**
	Bestämt *a* och *b* korrekt	+1-2 p
	Bestämt begynnelsevillkoren korrekt	+1-2 p
11.		**Max: 3 p**
	Korrekt tecknat rektangelarean som funktion av *x*	+1 p
	Korrekt derivering	+1 p
	Verifiering av maximivärde på något sätt	+1 p
12.	$\left(g(x)=3x+3\mathrm{e}^{-2x}+B,\ \text{där}\ B=-1\ \text{eller}\ B=3\right)$	**Max: 5 p**
	Bestämt $f(x)$ korrekt	+1 p
	Bestämt en av de möjliga funktionerna *g* korrekt	+1-2 p
	Bestämt den andra funktionen *g* korrekt	+1-2 p
13.	$\left(\text{a)-; b)}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=k\cdot v+m,\ k=-12{,}5\ ,\ m=10,\ v=0{,}8(1-\mathrm{e}^{-12{,}5t});\ \text{c) -}\right)$	**Max: 8 p**
a)	Korrekt beskrivning	+1 p
b)	Korrekt differentialekvation med *k* och *m* bestämda	+1-2 p
	Korrekt partikulärlösning	+1-2 p
c)	Rimlig uppskattning av fallsträckan med hjälp av diagrammet	+1 p
	Beräknat fallsträckan och jämfört med uppskattat värde	+1-2 p

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
14.		**Max: 7 p**
a)	Korrekt markerade punkter	+1-2 p
b)	Undersökt bilden av en eller flera punkter på hypotenusan (förutom ändpunkterna) eller ansats till generell metod	+1 p
	Fullföljt generell metod	+1 p
c)	Inser genom val av punkter att bilden av kateten utefter reella *z*-axeln avbildas på reella *w*-axeln	+1 p
	Inser genom val av punkter eller genom generell metod att bilden av den andra kateten är en kurva (parabel)	+1-2 p



Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift nr 13a)

Elev 1

Fjäderns rörelse inleder starkt a = 9,811 dvs gravitationskraften.
v ökar precis i början jättemycket pga G = 9,82 — 0 p

Elev 2

Fjäderns rörelse: Hastigheten ökar hela tiden, men mot slutet börjar den bli konstant. Accelerationen minskar hela tiden och drar sig nästan mot noll. — 1 p