NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK
KURS E
VÅREN 1998

Tidsbunden del

Anvisningar

Provperiod	24 april - 3 juni 1998.
Provtid	Totalt 240 minuter.
Hjälpmedel	Del I: Formelsamling Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Lösningar till Del I skall lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 18 uppgifter. De flesta uppgifterna är av *långsvarstyp* där det inte räcker med bara ett kort svar utan där det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.

Betygsgränser

Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl Godkänd”. Provet ger maximalt 58 poäng.

DEL I

Denna del består av 11 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare.
Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Lös ekvationen $z^2 = 2z - 5$ (2p)

2. Lös differentialekvationen $y' + 3y = 0$, $y(0) = 5$ (2p)

3. Skriv $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$ på formen $a + b\mathrm{i}$ där a och b är reella tal. (2p)

4. Lös differentialekvationen $y'' - 12y' + 32y = 0$ (2p)

5. Lös ekvationen $z + \mathrm{i}z = \mathrm{i}$ (2p)

6. Ange en andragradsekvation som
a) saknar reella rötter *Endast svar fordras* (1p)
b) har två reella rötter *Endast svar fordras* (1p)

7. För det komplexa talet z gäller att $|z| = 3$
Markera i ett komplext talplan alla tänkbara lägen för z och $\bar{z}$ och beskriv de möjliga lägena i ord. (3p)

8. a) Med lösningar till ekvationer menas vanligen tal som uppfyller vissa villkor. Till exempel är talet 3 en lösning till tredjegradsekvationen $x^3 - 27 = 0$. Vad menas med lösningar till differentialekvationer? (1p)

b) Undersök om det finns någon lösning till differentialekvationen $3y' - 10y = 0$ som uppfyller de båda villkoren $y(0) = 1$ **och** $y'(0) = 1$? (2p)

9. Visa att $\dfrac{6e^{-i\pi/3}}{3e^{i\pi/3}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ (3p)

10. I sambandet $y = kx^2$ är y och x funktioner av tiden t och k en konstant, $k = \dfrac{1}{20}$

Bestäm x i det ögonblick då $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3$ och $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 8$ (3p)

11. a) Välj två komplexa tal z och w sådana att $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ och $\mathrm{Im}\, w \neq 0$. Visa att sambandet $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gäller för de komplexa tal du valt. (2p)

b) Visa att sambandet $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gäller för alla komplexa tal. (2p)

DEL II

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande).
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

12. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = 0$ då $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$. (3p)

13. I ett företag som tillverkar samlarbilder är man bekymrad över att försäljningen av deras produkt har varit konstant i några månader. Därför genomför man en annonskampanj som resulterar i att försäljningen ökar. Efter annonskampanjen är ändringstakten i antal sålda förpackningar vid varje tidpunkt proportionell mot roten ur det antal förpackningar som säljs just då.

Uttryck ändringstakten i antalet sålda förpackningar med en differentialekvation

a) före annonskampanjen *Endast svar fordras* (1p)

b) efter annonskampanjen *Endast svar fordras* (2p)

14. Sannolikheten för att en elektronisk komponent ska gå sönder mellan tidpunkterna *a* timmar och *b* timmar ges av integralen $\int_a^b f(x)dx$

Funktionen $f(x)$ är den så kallade frekvensfunktionen som i detta fall är

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}001e^{-0{,}001x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Beräkna sannolikheten för att en sådan komponent ska gå sönder i intervallet från 0 till 500 timmar. (2p)

15. Från en punkt P på kurvan $y = 3x^2 - 2\ln 2x + 2$ drar man linjer som är vinkelräta mot *x*-axeln respektive *y*-axeln. Dessa linjer avgränsar tillsammans med axlarna en rektangel.

a) Teckna ett uttryck för rektangelns omkrets som funktion av *x*-koordinaten för punkten P. (2p)

b) Bestäm omkretsens minsta värde med hjälp av derivata. (3p)

16. Under ett kemiskt försök minskar mängden av ett ämne. Vid olika tidpunkter analyseras hur många procent av ämnet som finns kvar. Följande resultat erhålls:

tid i min	48	76	124	204	238	289
procent kvar	82,7	74,3	61,1	44,4	38,7	31,1

Om den återstående mängden av ämnet betecknas y % och tiden i minuter betecknas t så kan försöket beskrivas med differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky$

Bestäm så noggrant du kan ett värde på proportionalitetskonstanten k (3p)

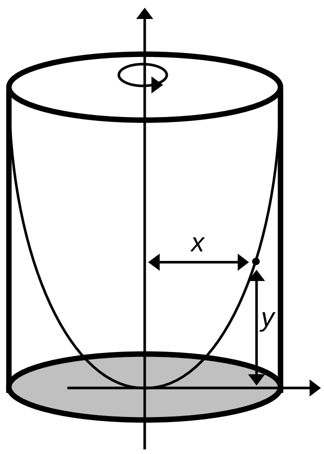
17. Betrakta differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{x^2 - 4}$, $y(0) = 1$

a) Redogör för en numerisk metod för bestämning av ett värde på $y(1)$ (2p)

b) Bestäm $y(1)$ numeriskt med minst fyra steg. *Endast svar fordras* (1p)

c) Förklara varför den numeriska metoden inte duger till att beräkna $y(3)$ (2p)

18. En cylindrisk behållare med radien 12 cm är fylld med vatten. Behållaren roteras och så länge rotationshastigheten ökar rinner vatten över behållarens kant. Vid en viss rotationshastighet blir vattennivån i behållarens mitt lika med noll, se figur. I detta läge gäller sambandet
$y' = 0{,}20x$, där y' är vattenytans lutning på avståndet x cm från rotationsaxeln.



a) Bestäm y som funktion av x (2p)

b) Beräkna hur mycket vatten som runnit ut sedan rotationen startade. (4p)

c) Rotationshastigheten ökas så att ett cirkelområde med radien 3,0 cm blir torrlagt i mitten av cylindern. I sambandet $y' = kx$, $x \geq 3$ får k då ett nytt värde. Det vatten som finns kvar i cylindern kommer fortfarande att nå upp till kanten.
Teckna ett uttryck för volymen av det vatten som nu finns kvar. (3p)
(Du behöver inte beräkna volymen.)

Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i det nationella E-kursprovet i Matematik vt -98 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål.

MaEvt98		**Kunskapsområde i målbeskrivningen**					**Betygskriterium**											
Upp-gift nr	**Po-äng**	**Algebra**		**Diff.- & integral-kalkyl**			**Godkänd**						**Väl Godkänd**					
		1	**2**	**1**	**2**	**3**	**a**	**c**	**d**	**f**	**g**	**h**	**a**	**b**	**d**	**e**	**g**	**h**
1	2		2				x	x										
2	2					2	x	x										
3	2		2				x	x										
4	2					2	x	x										
5	2		2				x	x										
6a	1		1				x		x									
6b	1		1				x		x									
7	3	3					x				x							
8a	1					1							x				x	
8b	2					2	x		x				x			x		
9	3		3										x		x	x	x	
10	3			3									x		x			
11a	2		2										x					
11b	2		2										x				x	
12	3					3	x	x										
13a	1				1		x		x									
13b	2				2		x		x									
14	2			2			x		x									
15a	2			2									x		x		x	
15b	3			3									x		x		x	
16	3				2	1	x						x			x		
17a	2					2	x		x									
17b	1					1	x											
17c	2					2							x		x		x	
18a	2			2									x		x	x		
18b	4			4									x		x	x		
18c	3			3									x		x	x		
$\sum$	**58p**	18p		19p	21p		ca 28p						ca 30p					

Förslag till kravgränser

Provet ger maximalt 58 poäng. Förslag till undre gräns för Godkänd är 16 poäng respektive 33 poäng för Väl Godkänd.

Bedömningsanvisningar - tidsbunden del (MaE vt 1998)

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet.

DEL I

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
1.	$(z = 1 \pm 2i)$	**Max 2p**
	Redovisad godtagbar lösning	+ 1-2p
2.	$(y = 5e^{-3x})$	**Max 2p**
	Redovisad godtagbar lösning	+ 1-2p
3.	$(0{,}6 + 0{,}8i)$	**Max 2p**
	Ansats till lösning genom förlängning med nämnarens konjugat	+ 1p
	med korrekt förenkling	+ 1p
4.	$(y = Ae^{8x} + Be^{4x})$	**Max 2p**
	Redovisad godtagbar lösning	+ 1-2p
5.	$(z = 0{,}5 + 0{,}5i)$	**Max 2p**
	Redovisad godtagbar metod	+ 1p
	med korrekt svar	+ 1p
6.		**Max 2p**
a)	Godtagbart svar	+ 1p
b)	Godtagbart svar	+ 1p

Uppg.		**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
7.			**Max 3p**
		Godtagbart talplan med korrekta markeringar	+ 1-2p
		Godtagbar beskrivning	+ 1p
8.			**Max 3p**
	a)	Eleven anger t.ex. att lösningar till differentialekvationer är funktioner, eller ger motsvarande förklaringar	+ 1p
	b)	(Nej) Redovisad godtagbar metod, t.ex. att eleven löser differentialekvationen	+ 1p
		med korrekt slutsats	+ 1p
9.			**Max 3p**
		Redovisad godtagbar lösning	+ 1-3p

Exempel på två olika korrekta lösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag får bedömas på likvärdigt sätt.

$$\frac{6e^{-\frac{i\pi}{3}}}{3e^{\frac{i\pi}{3}}} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}-\frac{i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

+1p +1p +1p

$$\frac{6e^{-\frac{i\pi}{3}}}{3e^{\frac{i\pi}{3}}} = 2\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2\frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = -1 - i\sqrt{3}$$

+1p +1p +1p

Exemplen visar hur en poäng sätts för korrekt omvandling mellan ”potens-form” och vanlig polär form, en poäng för omvandling till formen $a + ib$ och en poäng för algebraisk förenkling eller förenkling av potensuttryck.

10.	$\left(\frac{15}{4}\right)$		**Max 3p**
	Godtagbar derivering med avseende på t		+ 1-2p
	med korrekt svar		+ 1p

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
11.			**Max 4p**
	a)	Korrekt ansats utgående från elevens val av *z* och *w*	+ 1p
		med korrekt visad likhet	+ 1p
	b)	Korrekt genomfört bevis	+ 1-2p

DEL II

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
12.		$(y = \sin 3x)$	**Max 3p**
		Redovisad godtagbar allmän lösning	+1-2p
		Korrekt konstantbestämning	+1p
13.			**Max 3p**
	a)	$(y' = 0)$	
		Korrekt tecknad differentialekvation	+1p
	b)	$(y' = k \cdot \sqrt{y})$	
		Korrekt tecknad differentialekvation	+2p
14.		(0,39)	**Max 2p**
		Redovisat godtagbar lösning	+1-2p
15.			**Max 5p**
	a)	$(\mathrm{O}(x) = 6x^2 + 2x - 4\ln 2x + 4)$	
		Korrekt tecknad omkrets	+1-2p
	b)	$\left(\frac{13}{2}\ \text{l.e.}\right)$	
		Korrekt *x*-värde som visats ge minimum	+1-2p
		Korrekt minsta omkrets	+1p

Uppg.	**Bedömningsanvisningar**	**Poäng**
16.	$(k = -0{,}0040)$	**Max 3p**
	Redovisad godtagbar metod för bestämning av *k*	+1-3p
	T.ex. korrekt allmän lösning till differentialekvationen + 1p Korrekt bestämning av *k* ur tabell eller graf +1-2p För full poäng skall flera av punkterna ha använts vid bestämning av *k*	
17.		**Max 5p**
a)	Godtagbar redovisning av lämplig metod	+1-2p
b)	(0,90 med Eulers metod och 4 steg, 0,856 är bästa närmevärde**)**	
	Godtagbart svar	+1p
c)	Godtagbar motivering som bygger på att den numeriska metoden inte kan överbrygga diskontinuiteten i $x = 2$	+1-2p
	En motivering där eleven t.ex. skriver att ”det blir 0 i nämnaren för $x = 2$” eller motsvarande bör ge 1 poäng. En motivering som tyder på förståelse för att man med den numeriska metoden inte kan följa lösningskurvan över ”brottet” i $x = 2$ bör ge 2 poäng.	
18.		**Max 9p**
a)	$(y = 0{,}1x^2)$	
	Bestämt *y* med en korrekt primitiv funktion $(y = 0{,}1x^2 + A)$	+1p
	och visat att integrationskonstanten är 0	+1p
b)	(3,3 l)	
	Redovisad korrekt integral (t.ex. $\int_0^{14{,}4} \pi \frac{y}{0{,}1}\,dy$ eller $\int_0^{12} 2\pi x(14{,}4 - 0{,}1x^2)\,dx$)	+1-2p
	med godtagbar beräkning av volymen	+1-2p
c)	$\left(\text{t.ex. } V = \int_3^{12} 2\pi x \cdot \left(\frac{8}{75}x^2 - \frac{24}{25}\right)dx \text{ eller } V = \pi \cdot 12^2 \cdot 14{,}4 - \int_0^{14{,}4} \pi \cdot 9{,}375(y + 0{,}96)\,dy\right)$	
	Godtagbart tecknad funktion för vattenytans höjd $(y = 0{,}107x^2 - 0{,}96)$	+1-2p
	med korrekt tecknat uttryck för vattenvolymen	+1p