Delprov D	Uppgift 20-28. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 20 C- och 18 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 40 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 48 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Beräkna $\binom{21}{12}$ *Endast svar krävs* (1/0/0)

21. I en aritmetisk talföljd med elementen a_n, $n = 1, 2, 3, ...$ är $a_4 = 260$
och $a_{10} = 740$
Bestäm a_1 (2/0/0)

22. En skidtränare har 7 skidåkare att välja bland till ett stafettlag. Stafettlaget ska bestå av 4 skidåkare där var och en ska åka en delsträcka. Hon är oense med sin tränarkollega om antalet sätt att ta ut laget. De beräknar det med två olika metoder:

Tränaren: Antal sätt $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Tränarkollegan: Antal sätt $= \binom{7}{4} = 35$

Båda kan ha rätt. Beskriv hur de kan ha tänkt. (1/0/0)

23. I ett lotteri med 100 lotter finns 10 vinstlotter.
Hur stor är sannolikheten att du får exakt två vinstlotter om du köper 5 lotter? (0/3/0)

24. På hur många olika sätt kan tio personer delas in i två lika stora grupper? (0/1/1)

25. I en geometrisk talföljd med elementen a_k, $k = 1,2,3,$ ... är de första elementen $e^{10}, e^9, e^8, e^7, \ldots$

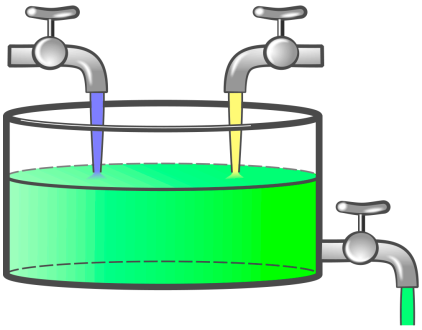
a) Bestäm en sluten (explicit) formel för a_k *Endast svar krävs* (1/0/0)

b) Sätt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Bestäm en sluten formel för s_n

Endast svar krävs (0/1/0)

c) Visa att $s_n < 35000$ för alla positiva heltal n. (0/0/1)

26. En tank innehåller från början en blandning av 30 liter blå och 20 liter gul färg som blandats väl. För att åstadkomma olika nyanser av grönt tillförs blå färg med hastigheten 2 liter per minut och gul färg med hastigheten 3 liter per minut under kraftig omröring. Samtidigt tappas det ur färgblandning med hastigheten 5 liter per minut.



Olle vill ta reda på hur färgsammansättningen i tanken förändras med tiden. Han antar att det finns y liter blå färg i tanken efter t minuter och ställer upp följande differentialekvation: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2 - 0{,}1y$

a) Visa algebraiskt att $y = 20 + C \cdot e^{-0{,}1t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

b) Efter hur lång tid finns det lika mycket blå som gul färg i tanken? (0/3/0)

c) Ge en förklaring till hur Olle kan ha tänkt när han ställde upp differentialekvationen. (0/0/2)

27. Visa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=\frac{n-1}{n} \quad \text{för } n \geq 2$$ (0/1/3)

28. De två talföljderna som beskrivs av a_n och b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ definieras rekursivt på följande sätt:

$a_1 = 500$, $\quad a_n = a_{n-1} + 2000$ för $n \geq 2$

$b_1 = 50\,000$, $\quad b_n = \dfrac{b_{n-1}}{1{,}001}$ för $n \geq 2$

Bestäm det största värdet på n för vilket $a_n < b_n$ (0/0/2)