

Part B	Problems 1–10 which only require answers.
Part C	Problems 11–17 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D).
Together they give a total of 55 points consisting of 22 E-, 19 C- and 14 A-points.

Level requirements for test grades

E: 14 points

D: 22 points of which 6 points on at least C-level

C: 29 points of which 11 points on at least C-level

B: 37 points of which 4 points on A-level

A: 43 points of which 7 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

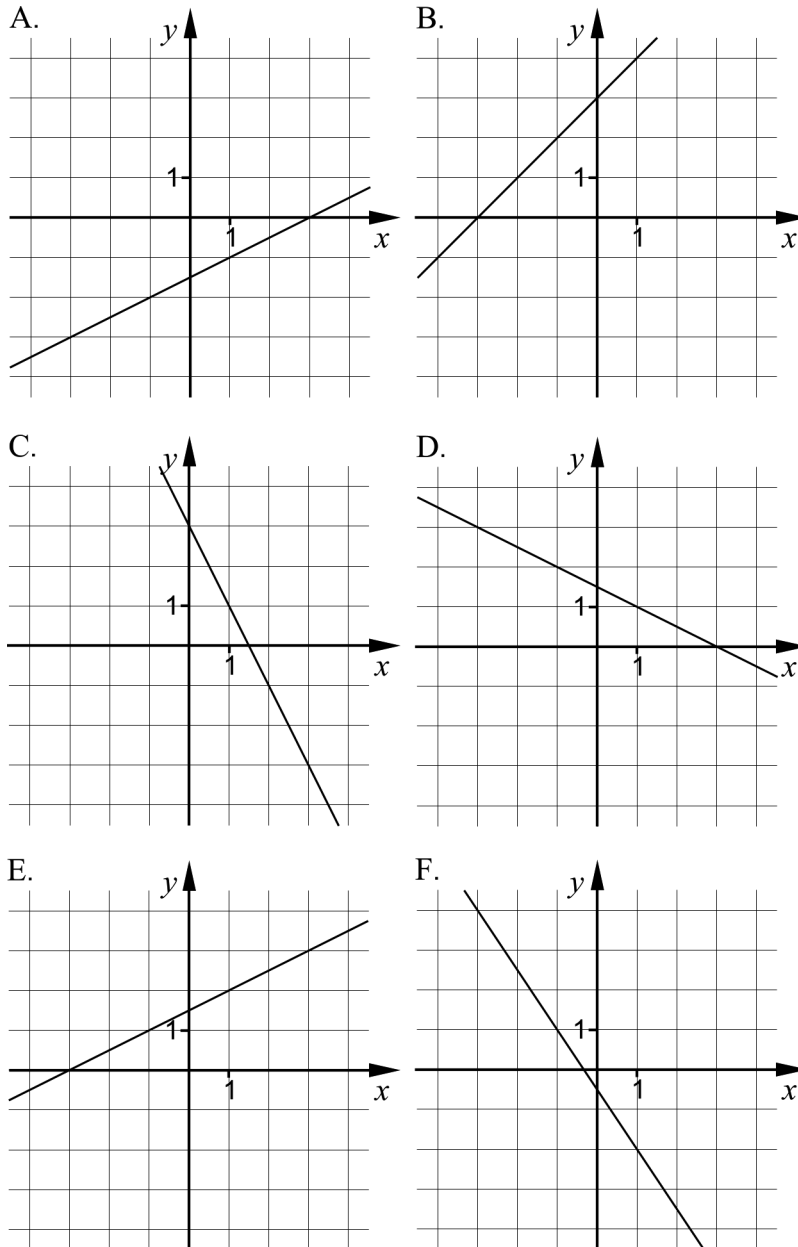
Name: _____

Date of birth: _____

Educational programme: _____

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required.* Write your answers in the test booklet.

1. The figures A–F show straight lines. The equations of the straight lines can be written in the form $y = kx + m$



- a) Two of the figures A–F show straight lines with the m -value 3. Which two?

_____ (1/0/0)

- b) One of the figures A–F shows a straight line with the k -value $-\frac{1}{2}$. Which one?

_____ (1/0/0)

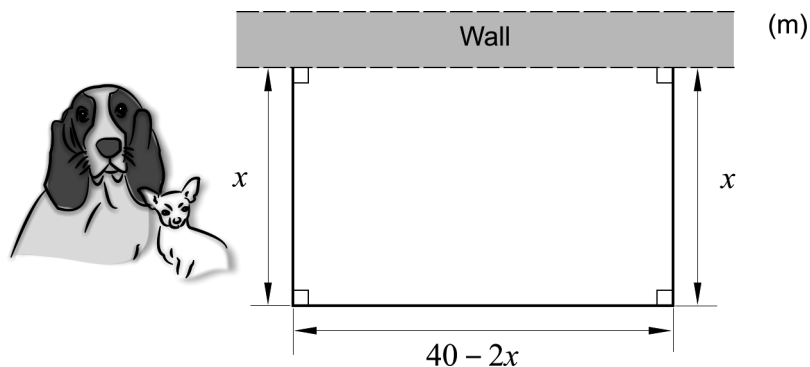
2. Simplify the expression $(x-5)^2 + 10x$ _____ (1/0/0)

3. Give examples of numbers greater than 1 that can be written in the empty boxes in order for the equality to be true.

$$(\square - x)(\square + x) = \square - x^2 \quad (1/0/0)$$

4. Give an example of an equation that has the solutions $x_1 = 4$ and $x_2 = -4$ _____ (1/0/0)

5. A rectangular dog kennel is to be built against a wall. The wall will be used for one of the sides, and for the remaining sides 40 m of fencing will be used. See figure.



The area of the dog kennel is given by the function A according to $A(x) = x(40 - 2x)$ where $A(x)$ is the area in m^2 and x is the width in metres. The maximum area of the dog kennel is 200 m^2 .

a) Determine the domain of the function A . _____ (1/0/0)

b) Determine the range of the function A . _____ (0/2/0)

6. Solve the equations. Give exact answers.

a) $x^7 = 2$ _____ (1/0/0)

b) $(2x - 10)(10 + 2x) = 0$ _____ (0/1/0)

c) $(x + 1)^{\frac{1}{4}} = 3$ _____ (0/1/0)

7. For the function f it holds that $f(x) = a^x - 1$

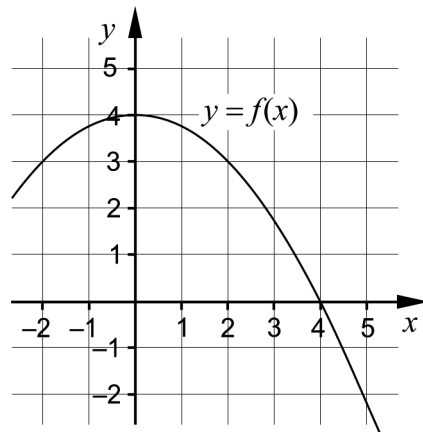
For what value of a does it hold that $f(3) = 7$? _____ (0/1/0)

8. Give an example of a linear system where the only solution is $\begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$

The linear system must consist of two different equations. Both equations must contain the variables x and y .

_____ (0/1/0)

9. The figure shows the graph of a quadratic function f .



- a) Find a function g , where $y = g(x)$, that satisfies the conditions

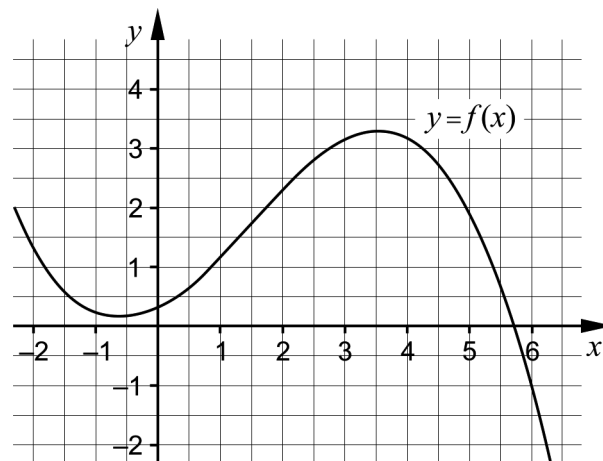
- the graph of g is a straight line
- $g(x) \leq f(x)$ for $0 \leq x \leq 2$

_____ (0/1/0)

- b) Find the equation of a straight line that intersects neither the graph of the function f nor the graph of the function g for any value of x .

_____ (0/0/1)

10. The figure shows the graph of the function f .



For one value of a it holds that $f(a + 4) = -1$

Determine $f(a)$.

_____ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

11. Solve the linear system $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 2y - 3x = -7 \end{cases}$ algebraically. (2/0/0)

12. Solve the equations algebraically.

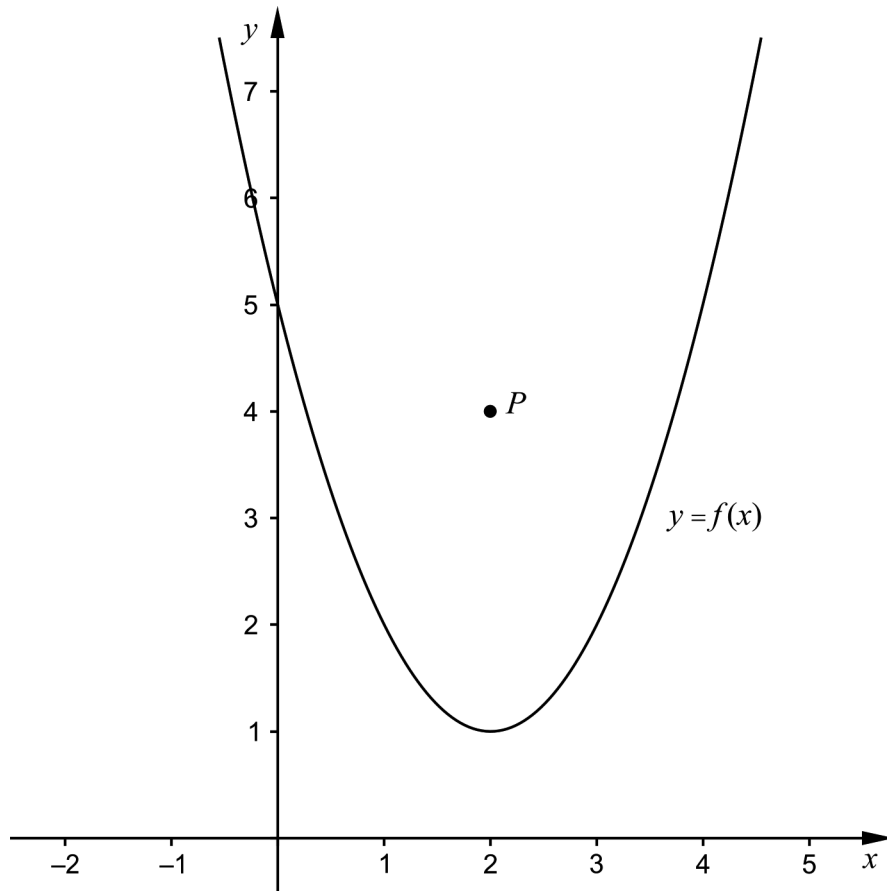
a) $x^2 + 12x + 20 = 0$ (2/0/0)

b) $\frac{x^2 - 6x}{2} = 0$ (0/2/0)

13. A straight line L_1 passes through the point (3, 4) and is parallel to the line L_2 with the equation $y = 5x - 300$. The line L_1 also passes through a point P with the x -coordinate 2.

Determine the y -coordinate of point P . (2/0/0)

14. The figure shows the graph of a quadratic function f where $f(x) = x^2 - 4x + 5$ and one point $P(2, 4)$.

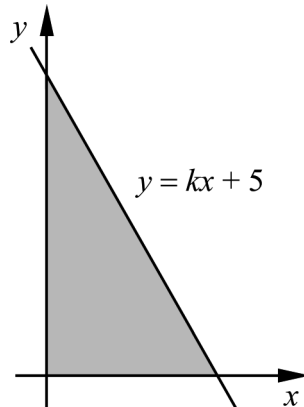


The minimum point of the graph is (2, 1). The point $A(3, 2)$ lies on the graph of f .

Determine the coordinates of a point B on the graph so that point A and point B have the same distance to point P .

(2/0/0)

15. The figure shows a triangle formed by the positive coordinate axes and the straight line $y = kx + 5$



The area of the triangle varies depending on the value of the gradient k .

- a) Determine k so that the area of the triangle is 6.25 area units. (0/2/0)
 - b) The area of the triangle can be described as a function of the gradient k . Determine the function. (0/0/3)
 - c) Determine the domain of the function in the b)-task. Justify your answer. (0/0/1)
16. Calculate $\frac{4.88^2 + (1.12 - 4.88)^2 - (4.88 + 1.12)^2}{4.88}$ (0/0/2)

17. For the exponential functions f and g it holds that $f(x) = A \cdot 2^x$ and $g(x) = A \cdot f(x+3)$, where A is a constant.

A new function h is formed so that $h(x) = g(x) - f(x)$. Show that h is an exponential function for all values of A except for $A = 0$ and $A = \frac{1}{8}$ (0/0/2)

Part D	Problems 18–23 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of three written parts (Part B, Part C and Part D).
Together they give a total of 55 points consisting of 22 E-, 19 C- and 14 A-points.

Level requirements for test grades

E: 14 points

D: 22 points of which 6 points on at least C-level

C: 29 points of which 11 points on at least C-level

B: 37 points of which 4 points on A-level

A: 43 points of which 7 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled “*Only answer is required*” you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: _____

Date of birth: _____

Educational programme: _____

Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

18. A straight line with gradient 3 passes through the point (2, 4). Investigate whether the line also passes through the point (200, 600). (2/0/0)
19. Clive is exercising with a barbell and chooses disc weights depending on what exercise he will do.



The disc weights are labelled in kilograms (kg) but Clive, who is from England, wants to know the weight of the barbell and the disc weights in the English unit of mass pounds (lb).

The total weight y pounds (lb) for the barbell and the disc weights slid onto it is given by the relation $y = 2.2x + 7.6$ where x is the total weight in kilograms (kg) for the disc weights slid onto the barbell.

- a) Use the relation to determine the weight of the barbell without any disc weights in pounds (lb). *Only answer is required* (1/0/0)

Clive can choose from the following disc weights: 1 kg, 2.5 kg and 5 kg.

- b) Give an example of how Clive can choose from the disc weights so that the total weight y is 34 pounds (lb). Justify your answer. (2/0/0)
- c) Explain what 2.2 in the relation $y = 2.2x + 7.6$ means in this context. (0/1/0)

20. Henry Graves' Supercomplication is considered to be the most expensive watch in the world. The watch was hand made by Patek Philippe and was completed in 1933.



In 1999 the watch was sold for SEK 81 million and at the latest selling in 2014 the watch was sold for SEK 158 million. Assume that the annual percentage increase has been the same during this period.

- a) One of the equations A–F can be used to find the annual percentage increase in the price of the watch. Which one?

A. $81 = 15a^{158}$

B. $81 = 15a + 158$

C. $81 = -15a^2 + 158$

D. $158 = 81a^{15}$

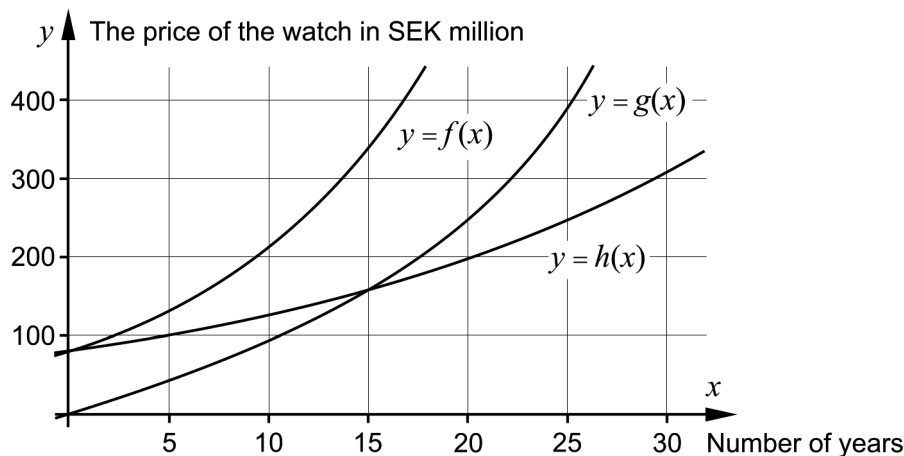
E. $158 = 15a + 81$

F. $158 = 15a^2 + 81a$

Only answer is required

(1/0/0)

Assume that the price of the watch continues to increase exponentially at the same rate. The figure shows the graphs of three functions f , g and h .



- b) One of the graphs in the figure represents the function that describes the price of the watch y (SEK million) as a function of x , where x is the number of years after 1999. State which one and justify your choice.
- c) Use the graph from the b)-task and determine how many years after 1999 the price of the watch will be SEK 300 million if the price continues to increase exponentially at the same rate.

(0/1/0)

Only answer is required

(0/1/0)

21. Mia, Julia and Lisa are discussing how many solutions there can be to a quadratic equation:

- A quadratic equation always has two different solutions, hasn't it? Mia wonders.
- No, says Julia, it might also have two solutions that are the same number, that is, one solution.
- I think there are quadratic equations to which there are no solutions, says Lisa.

From Mia, Julia and Lisa's statements, investigate how many solutions a quadratic equation can have. Justify your answer.

(1/2/0)

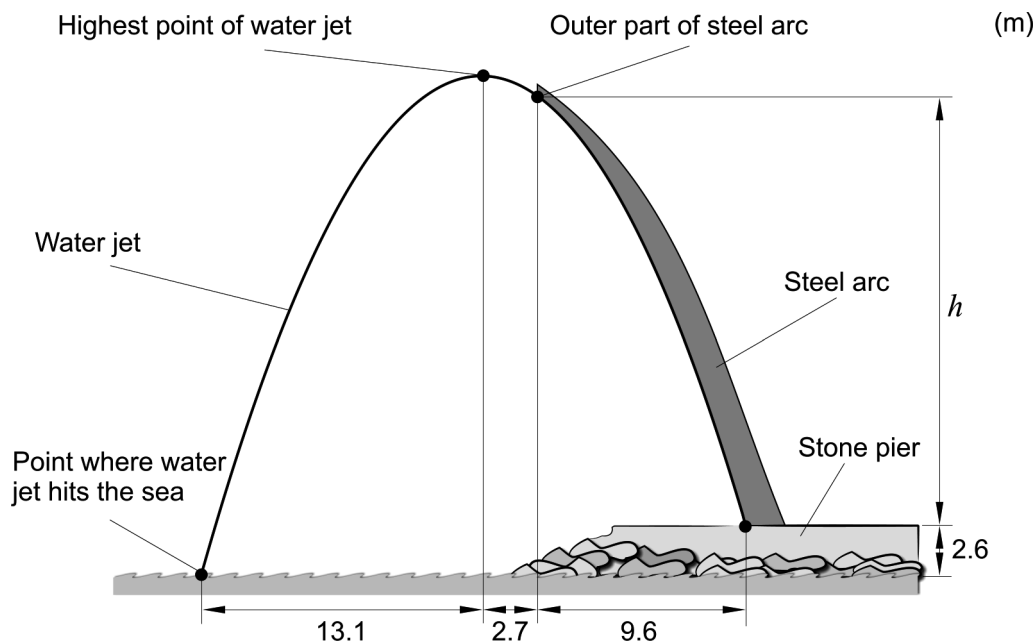
22. Solve the equation $50 \cdot 1.02^x = x + 160$ for $x > 0$

(0/3/0)

23. The sculpture *Gud fader på himmelsbågen* was intended as a peace monument and a celebration of the creation of the UN. On the arc of the sculpture stands God our father and fastens stars on the firmament. Today, the sculpture stands at Nacka strand in Stockholm.



In the outer part of the steel arc there is a nozzle sending out a water jet. The water jet and the steel arc together form a quadratic curve. The highest point of the water jet is 13.1 m sideways from where the water jet hits the sea and 2.7 m sideways from the farthest end of the steel arc. The stone pier that the sculpture stands on is 2.6 m above the water. See figure.



Determine the height above the stone pier for the farthest end of the steel arc, that is the distance h in the figure.

(0/0/4)

Innehållsförteckning

Inledning.....	3
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 2a	4
Allmänna riktlinjer för bedömning.....	4
Bedömningsmodeller.....	4
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga.....	5
2. Bedömningsanvisningar.....	7
Läsanvisning.....	7
Instruktioner för bedömning av delprov B.....	7
Instruktioner för bedömning av delprov C	8
Instruktioner för bedömning av delprov D.....	10
3. Exempel på bedömda elevlösningar	12
Uppgift 12a.....	12
Uppgift 12b	12
Uppgift 14	13
Uppgift 15ab.....	15
Uppgift 15c.....	16
Uppgift 17	17
Uppgift 18	17
Uppgift 19b	18
Uppgift 19c.....	19
Uppgift 20b	19
Uppgift 21	21
Uppgift 22	25
Uppgift 23	27
4. Instruktioner för sammanvägning till ett provbetyg.....	30
Sammanvägning till ett provbetyg i samband med provet i matematik 2a.....	30
Resultaten på provet i relation till kursbetyget	30
5. Kopieringsunderlag och webbmateriäl	31
Övrigt webbmateriäl.....	31
Sammanställning av elevresultat	32
Provsammanställning – Centralt innehåll	33
Centralt innehåll Matematik 2a.....	34

Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 2a. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmateriel (kapitel 5).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 2a

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. De delar i styrdokumentet som är knutna till karaktärsämnet kommer inte att behandlas i detta prov då provet är gemensamt för alla yrkesprogram.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en "problemlösningspoäng på E-nivå" respektive en "resonemangspoäng på A-nivå".

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknfel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ... +1 E_p

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...) +1 E_p

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet "med" inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _p
med korrekt bestämning av...	+1 E _p
Godtagbar verifiering av...	+1 E _p

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E _R	1 E _R och 1 C _R	1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{}, \sqrt[n]{}, f(x), x, y, \frac{\Delta y}{\Delta x}, (), \%, \{, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow,$ VL, HL
Termer	t.ex. x -led, y -led, koordinat, punkt, skärningspunkt, konstant, graf, kurva, funktionsvärde, intervall, definitions-/värdemängd, reell lösning, ekvationssystem, rät linje, lutning, riktningskoefficient, andragradsfunktion, parabel, nollställe, maximum, minimum, maximi-/minimipunkt, symmetri, symmetrilinje, exponentialfunktion, exponentiell ökning, startvärde, förändringsfaktor, procent, potensfunktion, implikationspil, ekvivalens, algebra, uttryck, ekvation, formel, rationell exponent, rätvinklig, liksidig, likbent
Hänvisningar	t.ex. till pq-formeln, kvadreringsregeln, konjugatregeln, räta linjens ekvation, vinkelsumma i en triangel, Pythagoras sats
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1. **Max 2/0/0**
 - a) Korrekt svar (B och C) +1 E_B
 - b) Korrekt svar (D) +1 E_B

2. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($x^2 + 25$) +1 E_P

3. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (t.ex. $(\boxed{2} - x)(\boxed{2} + x) = \boxed{2^2} - x^2$) +1 E_{PL}

4. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (t.ex. $x^2 = 16$) +1 E_{PL}

5. **Max 1/2/0**
 - a) Godtagbart angivet intervall, t.ex. ("x ska ligga mellan 0 och 20") +1 E_B
 - b) Godtagbart angivet intervall, t.ex. ("A är större än noll och mindre än eller lika med 200") +1 C_B
 med korrekt använda olikhetstecken i båda deluppgifterna ($0 < x < 20$;
 $0 < A \leq 200$) +1 C_K

6. **Max 1/2/0**
 - a) Korrekt svar ($x = 2^{\frac{1}{7}}$) +1 E_P
 - b) Korrekt svar ($x = \pm 5$) +1 C_P
 - c) Korrekt svar ($x = 80$) +1 C_P

7. **Max 0/1/0**
 Korrekt svar (2) +1 C_{PL}
8. **Max 0/1/0**
 Korrekt svar (t.ex. $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 6 \end{cases}$) +1 C_B
9. **Max 0/1/1**
 a) Korrekt svar (t.ex. $g(x) = -x + 4$) +1 C_B
 b) Korrekt svar där riktningskoefficienten är densamma som för den korrekt angivna linjen i a)-uppgiften (t.ex. $y = -x + 10$) +1 A_B
10. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (2,3) +1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

11. **Max 2/0/0**
 Godtagbar ansats, bestämmer en variabel med algebraisk metod +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 5, y = 4$) +1 E_P
12. **Max 2/2/0**
 a) Godtagbar ansats, sätter in värden korrekt i formeln för lösning av andragradsekvationer eller motsvarande för kvadratkomplettering +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = -10, x_2 = -2$) +1 E_P

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



- b) Godtagbar ansats, t.ex. korrekt omskrivning till $x(x - 6) = 0$ +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = 0, x_2 = 6$) +1 C_P

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



- 13.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. inser att riktningskoefficienten för linjen L_1 är 5 +1 E_B
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-1) +1 E_{PL}
- 14.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt i att punkten P ligger på symmetrilinjen +1 E_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar där en av följande punkter
 anges ($B(1, 2)$, $B(0, 5)$ eller $B(4, 5)$) +1 E_{PL}
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 15.** **Max 0/2/4**
- a) Godtagbar ansats, t.ex. beräknar triangelns bas, 2,5 l.e. +1 C_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($k = -2$) +1 C_{PL}
- b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer ett uttryck för linjens skärning med x -axeln +1 A_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex. $A = \frac{-25}{2k}$) +1 A_{PL}
- Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- c) Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang som leder till att $k < 0$ +1 A_R
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 16.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t.ex. utvecklar kvadraterna korrekt med hjälp av kvadreringsregeln +1 A_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,4) +1 A_P

17.

Max 0/0/2

Godtagbar ansats, bildar funktionen $h(x) = A^2 \cdot 2^{x+3} - A \cdot 2^x$

+1 A_R

med fortsatt godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang som leder till att h är en exponentialfunktion för alla värden på A utom för $A = 0$

och $A = \frac{1}{8}$

+1 A_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



Instruktioner för bedömning av delprov D

18.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, påbörjar ett enkelt resonemang genom att t.ex. bestämma linjens ekvation

+1 E_R

med i övrigt godtagbart enkelt resonemang som leder till korrekt slutsats att linjen inte går genom (200, 600)

+1 E_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



19.

Max 3/1/0

a) Korrekt svar (7,6)

+1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $34 = 2,2x + 7,6$

+1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex. "Två 5 kg-viktplattor och två 1 kg-viktplattor.")

+1 E_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



c) Godtagbart svar där insikt visas i att 1 kg motsvarar 2,2 lb

+1 C_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



20. **Max 1/2/0**

- a) Korrekt svar (D) +1 E_M
- b) Korrekt vald graf $y = h(x)$ med godtagbar motivering +1 C_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



- c) Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (ungefär 30 år) +1 C_M

21. **Max 1/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. kopplar andragradsekvationens lösningar till andragradsfunktionens nollställen +1 E_R

med godtagbart välgrundat resonemang som t.ex. behandlar minst två av fallen, 0, 1 eller 2 lösningar +1 C_R

med slutfört välgrundat resonemang som leder till slutsatsen att det endast finns 0, 1 eller 2 lösningar till en andragradsekvation +1 C_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



22. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. ritar upp $y = 50 \cdot 1,02^x$ och $y = x + 160$ i samma koordinatsystem +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($x = 79$) +1 C_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



23. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, anger, i ett definierat koordinatsystem, koordinaterna för minst tre punkter som krävs för bestämning av andragradsfunktionen +1 A_M

med godtagbar fortsättning, t.ex. bestämmer en godtagbart anpassad andragradsfunktion, t.ex. $y = -0,1280x^2 + 19,358$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (18,4 meter) +1 A_M

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 12a

Elevlösningsexempel 12a.1 (0 poäng)

$$\begin{aligned}
 x^2 + 12x + 20 &= 0 \\
 x &= 6 \pm \sqrt{6^2 - 20} \\
 x &= 6 \pm \sqrt{16} \\
 x &= 6 \pm 4 \\
 \text{Svar: } \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar teckenfel vid insättning i formeln för lösning av andragradsekvationer och uppfyller därmed inte kravet för godtagbar ansats. Lösningen ges noll poäng.

Uppgift 12b

Elevlösningsexempel 12b.1 (0 poäng)

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 6x}{2} &= 0 \\
 x^2 - 6x &= 0 \cdot 2 \\
 \frac{x^2 - 6x}{x} &= \frac{0}{x} \\
 x - 6 &= 0 \\
 \underline{\underline{x = 6}}
 \end{aligned}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en förkortning med x vilket leder till att en lösning försvinner. Lösningen uppfyller därmed inte kravet för godtagbar ansats och ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 12b.2 (1 C_P)

$$\frac{x^2 - 6x}{2} = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 0}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{-9}$$

$$x = 3 \pm -3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 6$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats eftersom insättningen i formeln för lösning av andragradsekvationer är korrekt. Även om svaret är korrekt är lösningen felaktig på raderna 4 och 5. Därmed uppfylls inte kraven för en godtagbar lösning. Lösningen ges den första procedurpoängen på C-nivå.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (1 E_{PL})

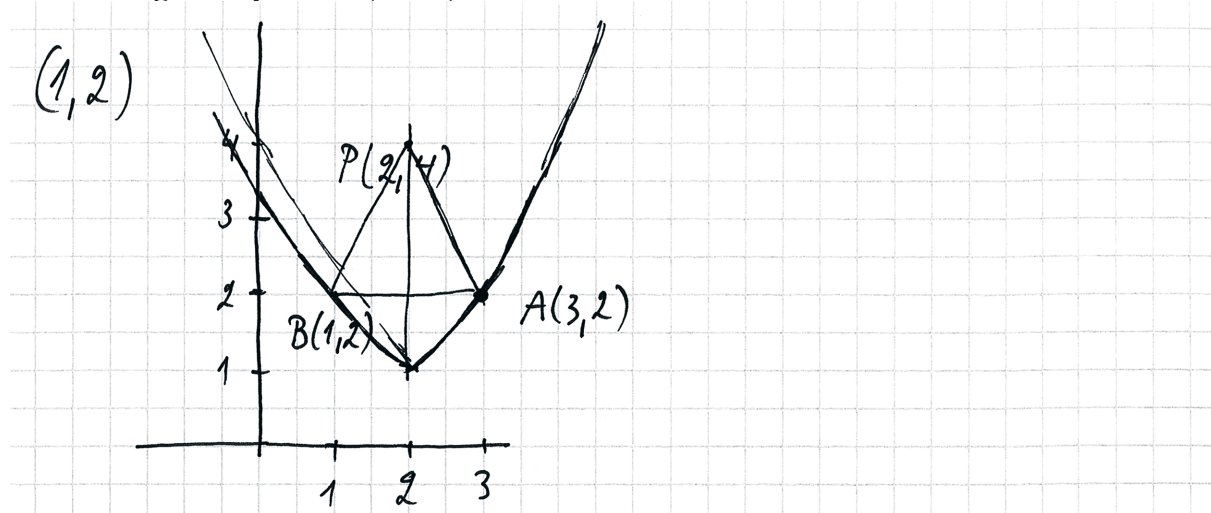
$$A(3, 2)$$

$$P(2, 4)$$

$$\sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

Avståndet till B ska vara $\sqrt{5}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats där avståndsformeln används för beräkning av avståndet mellan de två givna punkterna. Lösningen ges den första problemlösningspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (2 E_{PL})

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar grafisk lösning där andragradsfunktionens symmetri används för att hitta en korrekt punkt B. Lösningen anses uppfylla kraven för båda problemlösningspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 14.3 (2 E_{PL})

Punkten $(1, 2)$ har samma avstånd

Bevisas: Avståndsformeln.

Punkt $(1, 2)$ $\sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$

Punkt $(3, 2)$ $\sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5} = \sqrt{5}$ VSB

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar algebraisk lösning där avståndsformeln används. Lösningen anses uppfylla kraven för båda problemlösningspoängen på E-nivå.

Uppgift 15ab

Elevlösningsexempel 15ab.1 (2 C_{PL}, 2 A_{PL} och 1 A_K)

$$a.) \quad y = kx + 5$$

$$m = 5$$

$$m = h$$

$$\frac{b \cdot h}{2} = 6,25$$

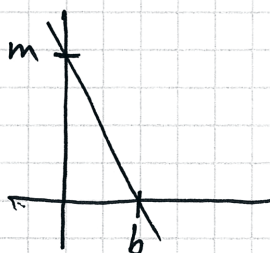
$$5b = 12,5$$

$$b = 2,5$$

$$b(x, 0) \quad b = x$$

$$0 = k \cdot 2,5 + 5$$

$$k = \frac{-5}{2,5} = -2$$



$$b.) \quad 0 = kx + 5$$

$$x = -\frac{5}{k}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{-\frac{5}{k} \cdot 5}{2} = \frac{-\frac{25}{k}}{2} = -\frac{12,5}{k}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning och korrekt svar på såväl a)- som b)-uppgiften. När det gäller kommunikation används b felaktigt på rad 7 då den både är benämningen på en punkt och x -koordinaten för samma punkt på x -axeln. Enheten a.e. saknas i svaret på b)-uppgiften. I övrigt är lösningen lätt att följa och förstå. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 15c

Elevlösningsexempel 15c.1 (1 A_R)

$$c.) \quad A = -\frac{25}{2k} \quad \text{Definitionsmängd: } k$$

k positiv ($k > 0$): går inte, arean blir neg.

k noll ($k = 0$): går inte, finns i nämnaren $-\frac{25}{2k}$

k negativ ($k < 0$): annars ingen triangel

$k < 0$ är def. m.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som utgår från areafunktionen och utreder alla värden på k . Resonemanget anses vara välgrundat och nyanserat och uppfyller därmed kraven för resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 15c.2 (1 A_R)

$k < 0$. Linjen måste ha negativ lutning för att det ska bli en triangel mellan de positiva axlarna.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som utgår från figuren och de givna förutsättningarna. Resonemanget anses vara välgrundat och nyanserat och uppfyller därmed kraven för resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (2 A_R)

$$f(x) = A \cdot 2^x$$

$$g(x) = A \cdot A \cdot 2^{(x+3)}$$

$$h(x) = A^2 \cdot 2^x \cdot 2^3 - A \cdot 2^x$$

$$h(x) = 2^x (A^2 \cdot 8 - A)$$

$$h(x) = A \cdot 2^x (8A - 1)$$

då $A = \frac{1}{8}$ blir parentesen 0 och då blir $h(x) = 0$
även om $A = 0$

på alla andra värden av A är det
en exponentialfunktion.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt bildad funktion h samt ett resonemang som berör alla värden på A . Påståendet "alla andra värden av A är det en exponentialfunktion" är inte styrkt men anses, tillsammans med resonemanget om när parenteserna i lösningen blir noll, nätt och jämnt uppfylla kraven för ett välgrundat och nyanserat resonemang. Lösningen ges två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (0 poäng)

$$k=3$$

$$y=kx+m$$

$$m=-2$$

Svar: Nej linjen går inte
genom punkten (200, 600) pga
 $600 - 2 = 598$.

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår inte hur $m = -2$ bestäms. Det är även oklart vad beräkningen på sista raden visar. Slutsatsen att linjen inte går genom punkten (200, 600) anses därmed inte vara motiverad. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 18.2 (1 E_R)

$$\begin{array}{cc} x_1, y_1 & x_2, y_2 \\ (2, 4) & (200, 600) \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{596}{198} = 3,01$$

Svar : ja

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats där riktningskoefficienten för en linje genom de två givna punkterna beräknas. Kraven för den andra resonemangspoängen uppnås inte eftersom slutsatsen som dras inte motiveras och dessutom är felaktig.

Elevlösningsexempel 18.3 (2 E_R)

$$\begin{array}{l|l} k=3 & y=3 \cdot 2 + m \\ y=kx+m & y=6+m \\ 600=3 \cdot 200+m & \begin{array}{r} 6 \quad -6 \\ -2=m \end{array} \\ 600=600+m & \\ -600 \quad -600 & \\ m=0 & \end{array}$$

Svar : Linjen går inte igenom punkten.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar bestämning av de två olika värdena på m utifrån den givna riktningskoefficienten och de två givna punkterna. Därmed anses kraven för ansatspoängen vara uppfyllda. Slutsatsen motiveras inte explicit men det framgår att m -värdena är olika. Lösningen anses därmed nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 19b**Elevlösningsexempel 19b.1 (2 E_M)**

$$\begin{array}{l} 2\text{st } 5\text{ kg och } 2\text{st } 1\text{ kg vikter} \\ 2 \cdot 2 \cdot 12 + 7,6 = 34 \end{array}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett exempel på hur viktplattorna kan väljas. Detta verifieras genom insättning i ekvationen. Lösningen är knapphändig redovisad men anses nätt och jämnt uppfylla kraven för båda modelleringspoängen på E-nivå.

Uppgift 19c

Elevlösningsexempel 19c.1 (0 poäng)

2,2 är de som är skillnaden
mellan kg & pund
Används för att omvända kg till
pund.

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår det inte att 1 kg motsvarar 2,2 lb. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 19c.2 (1 C_M)

Multiplitera 2,2 med vikten
för att uppnå (lb).

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår det inte att vikten mäts i kg. Trots detta anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för ett godtagbart svar.

Elevlösningsexempel 19c.3 (1 C_M)

$$1 \text{ kg} = 2,2 \text{ lb}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett kortfattat men godtagbart svar där det framgår att 1 kg motsvarar 2,2 lb.

Uppgift 20b

Elevlösningsexempel 20b.1 (0 poäng)

Svar: funktionen $y=h(x)$, funktionen
stämmer in på det man kan avläsa
från figuren och på det som beskrivs.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en korrekt vald graf $y=h(x)$. Motiveringen anses inte vara godtagbar då det inte framgår vilka avläsningar som gjorts i grafen. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 20b.2 (1 C_M)

$$y = h(x)$$

Motivering: Man kan se att priset är strax under 100 miljoner 1999 och säljs för 158 miljoner 15 år senare.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en korrekt vald graf $y = h(x)$.

Motiveringen är något otydlig eftersom $x = 0$ i diagrammet inte kopplas till år 1999. Kraven för modelleringspoäng på C-nivå anses nått och jämnt vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 20b.3 (1 C_M)

$y = h(x)$ eftersom priset var 81 milj så är det inte $y = g(x)$ och $y = f(x)$ är för brant så enligt den hade priset 2014 varit nästan 350 milj

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en korrekt vald graf $y = h(x)$.

Motiveringen består av förklaringar till varför de två andra graferna ska uteslutas. Lösningen anses uppfylla kraven för modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (0 poäng)

En andragradsekvation kan
ha mellan 0-2 lösningar eftersom

försök 1 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

försök 2 $\begin{cases} x_1 = 4 + \sqrt{0} = 4 \\ x_2 = 4 - \sqrt{0} = 4 \end{cases}$

försök 3 ERROR

Svar: Det finns tre olika lösningar för en
andragradsekvation

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen inleds med ett korrekt påstående som inte underbyggs med varken figurer eller ekvationer. Lösningen anses inte uppfylla kraven för resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (1 E_R)

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + 4x - 5$$

$$-\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)}$$

$$-2 \pm \sqrt{9}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -5$$

här finns 2 lösningar
på nollställena

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen förs ett enkelt resonemang som omfattar det fall där en andragradsekvation kan ha 2 lösningar. Vissa formella brister förekommer t.ex. på andra raden sätts inte ekvationen lika med noll och på de två följande raderna saknas $x =$. Sammantaget bedöms elevlösningen motsvara en godtagbar ansats och ges därmed resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21.3 (1 E_R och 1 C_R)

(1 alt) En vanlig andragradare kan se ut så här:

$$(x-5)^2 = 0$$

Julia

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{5^2 - 25}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{0}$$

$$x_1 = 5 \quad \text{Här har andragradaren}$$

$$x_2 = 5 \quad \text{bara ett svar det kallas dubbelrot}$$

(1 alt) En annan kan se ut så här:

$$x^2 - 8x + 17 = 0$$

Lisa

$$x = \frac{8}{2} \pm \sqrt{4^2 - 17}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{-1}$$

I detta fall saknar ekvationen reella lösningar

(1 alt)

$$x^2 - 10x - 75 = 0$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{25 + 75}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{100}$$

$$x = 5 \pm 10$$

$$x_1 = 5 + 10 = 15$$

$$x_2 = 5 - 10 = -5$$

I detta fall finns 2 olika svarsalternativ

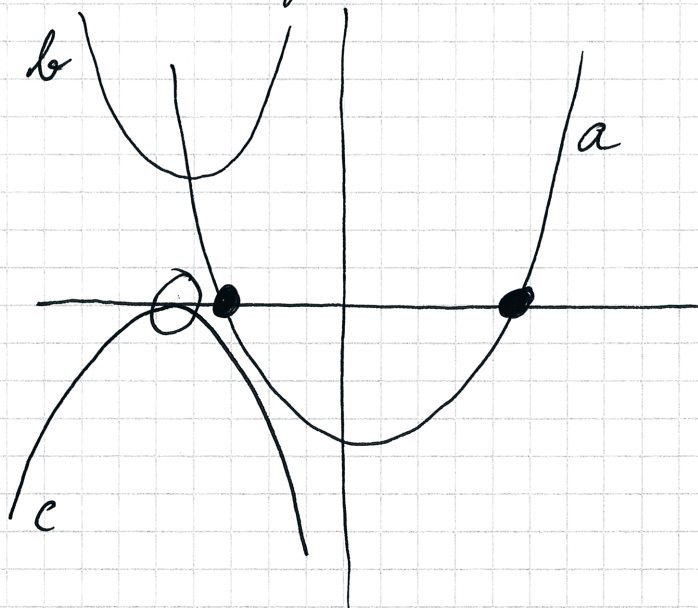
Mia tror det här

Lisa har ^{lite} rätt i sin sak det finns ekvationer som saknar lösningar men då säger man att de saknar reella lösningar. Julia har också rätt då kallas svaret dubbelrot. Mia har lite fel, så jag bevisade det med hjälp av några ekvationer

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen förs ett resonemang som omfattar alla tre fallen. Däremot utesluts inte att andragradsekvationer kan ha fler än två lösningar eftersom slutsatserna baseras på specialfall. Resonemanget leder alltså inte till att det endast finns 0, 1 eller 2 lösningar till en andragradsekvation. Sammantaget ges lösningen en resonemangs-poäng på E-nivå och en resonemangs-poäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 21.4 (1 E_R och 2 C_R)

Andragradsekvationen kan ha från noll till två lösningar:



- (a) har två lösningar som har markerats med två ifyllda cirklar, för att den grafen korsar x-axeln två gånger
- (b) har inga lösningar för den grafen korsar aldrig x-axeln
- (c) har en lösning som är markerad med en cirkel, för att den grafen korsar x-axeln en gång.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen förs ett generellt resonemang som omfattar alla tre fall och som genom en grafisk representation utesluter att det finns fler fall än 0, 1 eller 2 lösningar till en andragradsekvation. Trots att övergången mellan andragradsekvationer ($x^2 + px + q = 0$) och andragradsfunktioner ($f(x) = x^2 + px + q$) saknas i inledningen anses lösningen uppfylla kraven för välgrundat resonemang och ges en resonemangspoäng på E-nivå samt två resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 Cp)

$$50 \cdot 1,02^x = x + 160$$

$$x = 1$$

$$51 = 161 \quad \text{nej}$$

$$x = 5$$

$$55 = 165 \quad \text{nej}$$

$$x = 20$$

$$81,7 = 180 \quad \text{nej}$$

x större

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en påbörjad systematisk prövning. Eftersom de värden på x som väljs blir allt större anses prövningsstrategin vara godtagbar och kraven för ansatspoängen anses därmed vara uppfyllda. Lösningen ges den första procedurpoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 22.2 (2 Cp)

$$50 \cdot 1,02^x = x + 160$$

2nd CALC + stämning (5)

Intersection $x = 79,002112$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med godtagbart svar. När det gäller kommunikation saknar lösningen förklaringar. T.ex. framgår det inte av första raden att funktionerna $y = 50 \cdot 1,02^x$ och $y = x + 160$ ritas upp. Att grafräknare används framgår först av de andra raderna i lösningen där knapptryckningar på grafräknaren redovisas. Kraven för kommunikationspoäng på C-nivå anses därmed inte vara uppfyllda. Lösningen ges två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 22.3 (2 C_P och 1 C_K)

$$50 \cdot 1,02^x = x + 160$$

x	y_1	y_2	
0	50	160	
10	61	170	
50	135	210	
100	362	260	← byter plats
75	221	235	
80	244	240	← — " —
79	239	239	← samma!

Svar: $x = 79$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning som bygger på systematisk prövning. När det gäller kommunikation framgår det inte tydligt vad y_1 och y_2 syftar på eller vad "byter plats" betyder. I övrigt är lösningen möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 23

Elevlösningsexempel 23.1 (1 A_M)

Om vi antar att vattenytan utgör
 x-axeln och ^asymmetrilinjen av den
 bildade andragradskurvan utgör
 y-axeln så får vi att punkterna
 (13,1; 0) och (12,3; 2,6) ligger på
 grafen. _{2,7+9,6}

$$y = x^2 + px + q$$

$$\begin{cases} 0 = 13,1^2 + p13,1 + q \\ 2,6 = 12,3^2 + p12,3 + q \end{cases} \quad q = -13,1^2 - p13,1$$

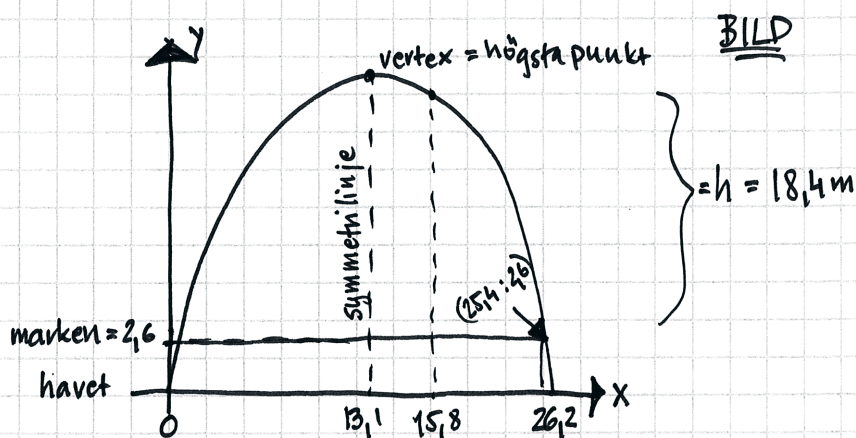
$$2,6 = 12,3^2 + p12,3 + (-13,1^2 - p13,1)$$

$$2,6 = -20,32 - 0,8p$$

$$p = -28,65$$

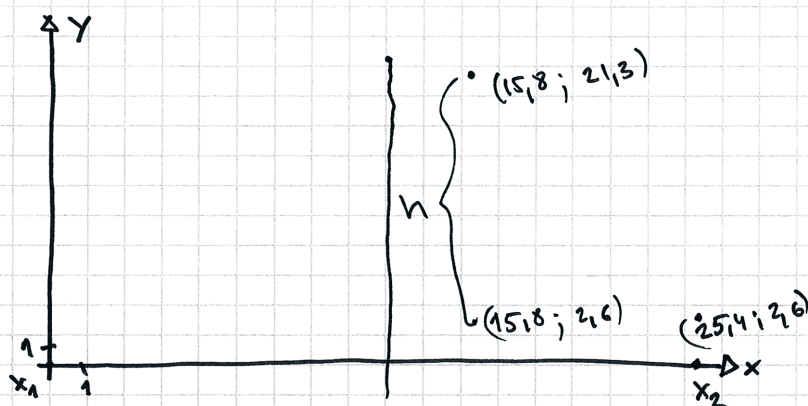
$$0 = 13,1^2 + (-28,65) \cdot 13,1 + q \quad \underline{q = 203,705}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges två punkter som krävs för bestämning av andragradsfunktionen i ett definierat koordinatsystem. Dessutom hänvisas det till andragradskurvans symmetri, vilket implicit leder till en tredje punkt som krävs för bestämning av andragradsfunktionen. Därmed anses kraven för ansatspoängen vara uppfyllda. Den fortsatta lösningen är inte godtagbar eftersom andragradsfunktionen ansätts felaktigt då koefficienten för x^2 -termen sätts till 1.

Elevlösningsexempel 23.2 (1 A_M)

Nollpunkterna = $(0, 0)$ och $(26,2, 0)$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges tre punkter med koordinater, vilket är tillräckligt för att ta fram ett funktionsuttryck för kurvan. Den fortsatta lösningen är inte godtagbar då det inte anges vilka punkter som använts i räknaren, inte hur räknaren använts, inte vilken funktion som erhållits eller hur svaret bestämts. Lösningen anses uppfylla kraven för den första modelleringspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 23.3 (3 A_M)

$$ax^2 + bx + c = y$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$-\frac{p}{2} = \text{symmetrilinje}$$

$$p = -26,2$$

$$c = 0 \text{ (grafen går genom origo)} \rightarrow q = 0$$

$$p = \frac{b}{a} \rightarrow b = ap$$

$$ax^2 + pax = 0$$

$$y = ax^2 + pax \quad a \neq 0$$

$$ax^2 + pax = y$$

$$25,4^2 a - 26,2 \cdot 25,4 a = 2,6 \quad x = 25,4 \quad y = 2,6$$

$$645,16a - 665,48a = 2,6$$

$$-20,32a = 2,6$$

$$a = -0,1278$$

$$-0,1278 \cdot -26,2 = b$$

$$3,348 \approx b$$

$$-0,1278x^2 + 3,348x = y \quad x = 15,8$$

$$-0,1278 \cdot (15,8)^2 + 3,348 \cdot (15,8) = y$$

$$20,994 = y$$

$$\Delta y = h$$

$$20,994 - 2,6 = h$$

$$18,39 = h$$

$$\text{Svar: } h = 18,4 \text{ m}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats och lösning. När det gäller kommunikation är lösningen rörig och inte helt lätt att följa och förstå. Kraven för kommunikationspoängen på A-nivå anses därmed inte vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen tre modelleringspoäng på A-nivå.