

Delprov B	Uppgift 1–10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11–16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 54 poäng varav 22 E-, 19 C- och 13 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 13 poäng

D: 21 poäng varav 6 poäng på minst C-nivå

C: 28 poäng varav 10 poäng på minst C-nivå

B: 36 poäng varav 4 poäng på A-nivå

A: 42 poäng varav 6 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

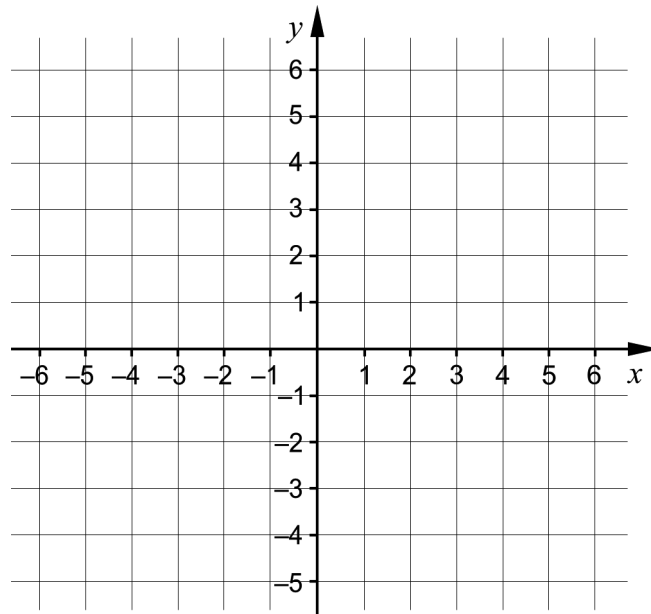
Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Ekvationer för räta linjer kan skrivas på formen $y = kx + m$. En rät linje går genom punkten $(2, 5)$ och har $m = 1$

a) Rita linjen i koordinatsystemet.

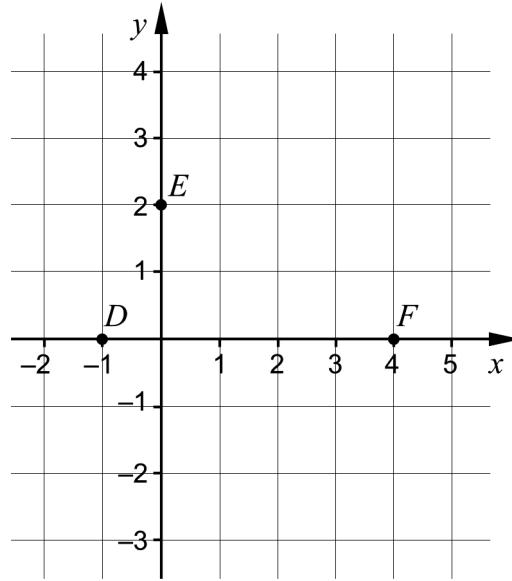
(1/0/0)



b) Ange linjens ekvation på formen $y = kx + m$.

_____ (1/0/0)

2. Grafen till andragsgradsfunktionen f , där $y = f(x)$, går igenom punkterna $D(-1, 0)$, $E(0, 2)$ och $F(4, 0)$.

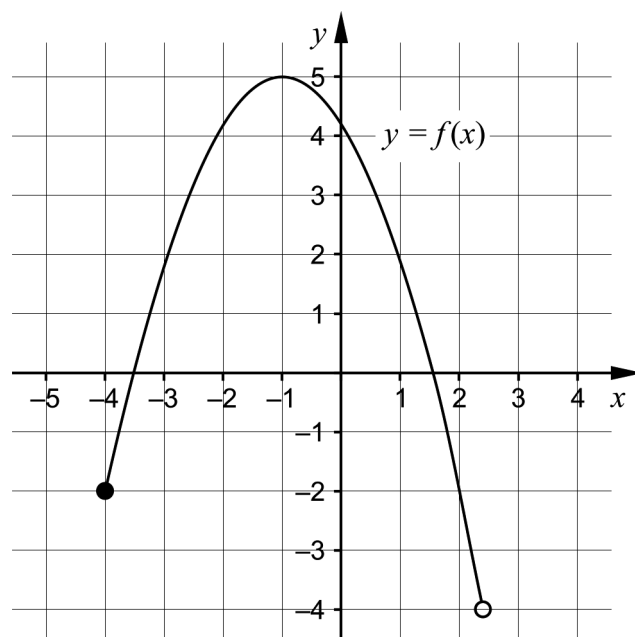


- a) Funktionen f kan skrivas på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$
Bestäm konstanten c . _____ (1/0/0)
- b) Funktionen f har en maximipunkt.
Bestäm maximipunktens x -koordinat. _____ (1/0/0)

3. Lös ekvationerna

- a) $x^2 - 16 = 0$ _____ (1/0/0)
- b) $\left(\frac{4x-5}{3}\right)\left(\frac{4x-5}{3}\right) = 0$ _____ (0/1/0)
- c) $(x+1)^{\frac{1}{4}} = 2$ _____ (0/1/0)

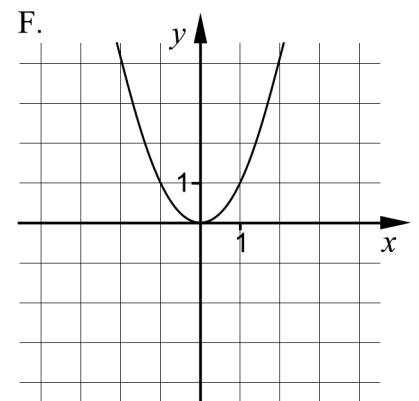
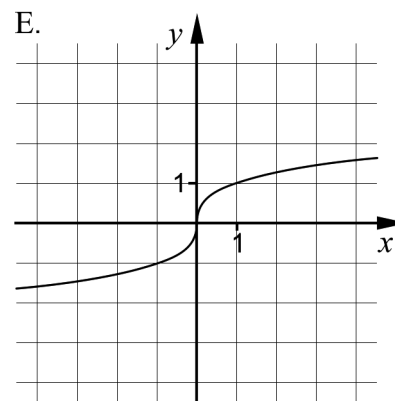
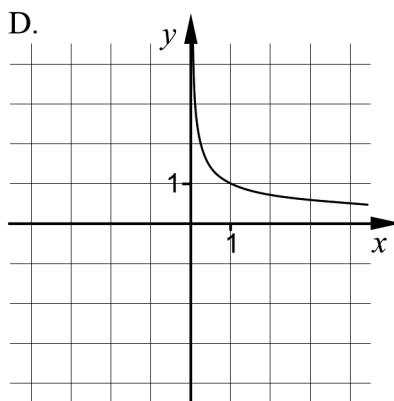
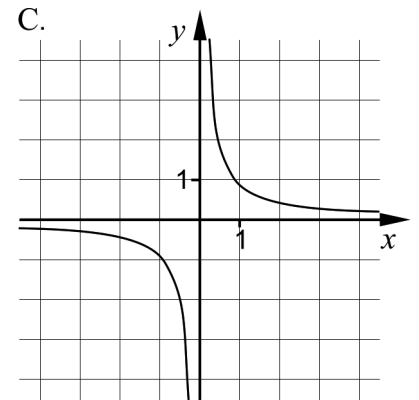
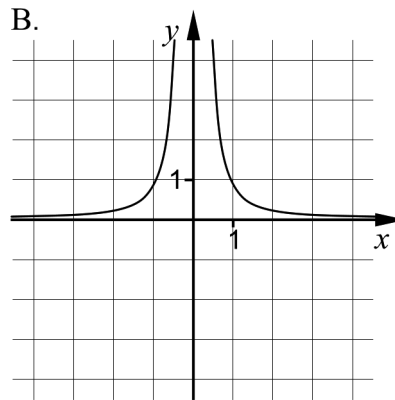
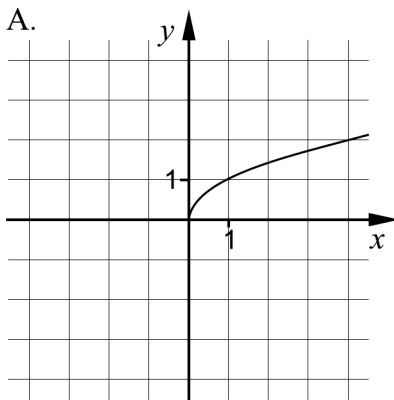
4. Figuren visar grafen till en andragsgradsfunktion f .
Punkterna $(-4, -2)$, $(-1, 5)$ och $(2, -2)$ ligger på funktionens graf.



Bestäm funktionens värdemängd.

_____ (0/2/0)

5. Figurerna A–F visar grafer till sex olika potensfunktioner.



Vilken av figurerna visar grafen till $y = \frac{1}{x^{0,5}}$?

_____ (0/1/0)

6. Exempel A–F visar representationer av algebraiska uttryck, ekvationer och funktioner.

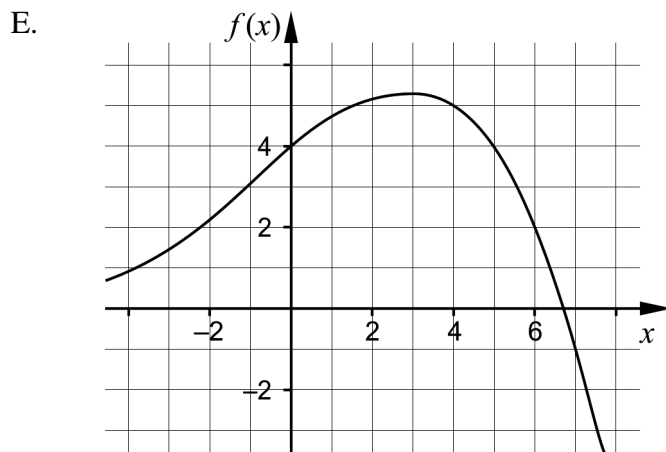
A. $(2x+3)(x-y)$

B.

x	$p(x)$
-1	4
0	7
10	37
100	307

C. $2x+3=12$

D. $3,19a$



F. $10000 \cdot 1,03^x$

Ange, genom att sätta kryss i tabellen, för vart och ett av exemplen A–F vilket begrepp det hör ihop med.

Exempel	A	B	C	D	E	F
Begrepp						
Algebraiskt uttryck						
Ekvation						
Funktion						

(0/1/1)

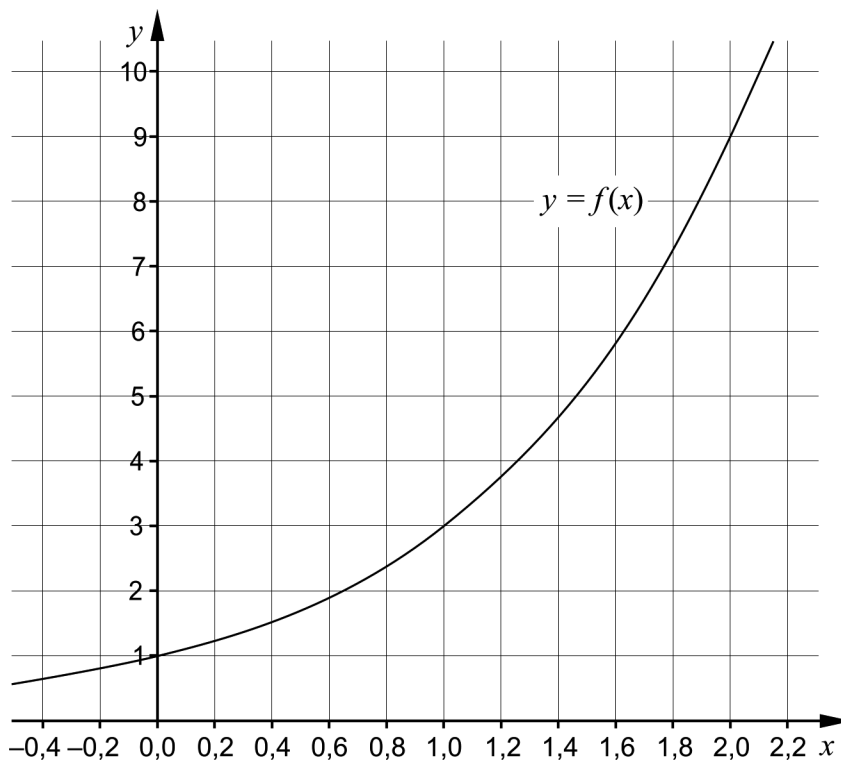
7. Förenkla så långt som möjligt.

a) $(x-3)(x+3)$ _____ (1/0/0)

b) $2(x-3)^2 + (x-5)(x+5) - 3x^2$ _____ (0/1/0)

c) $\left(8^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}\right)^x$ _____ (0/0/1)

8. I koordinatsystemet är grafen till funktionen f ritad där $f(x) = 3^x$.



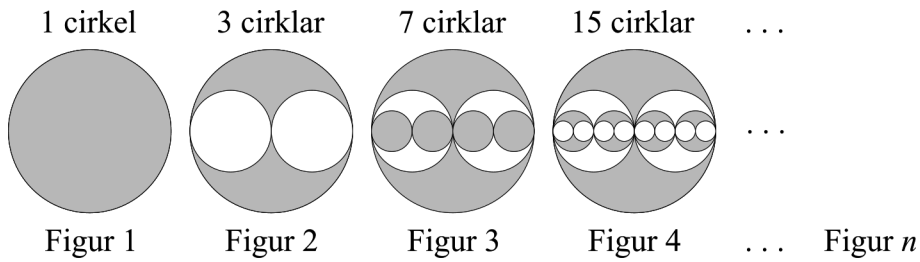
Lös ekvationerna med hjälp av grafen.

a) $3^x - 2 = 0$ _____ (1/0/0)

b) $3^{x+1} = 8$ _____ (0/1/0)

c) $3^x \cdot 3^{-2x} = 0,1$ _____ (0/0/1)

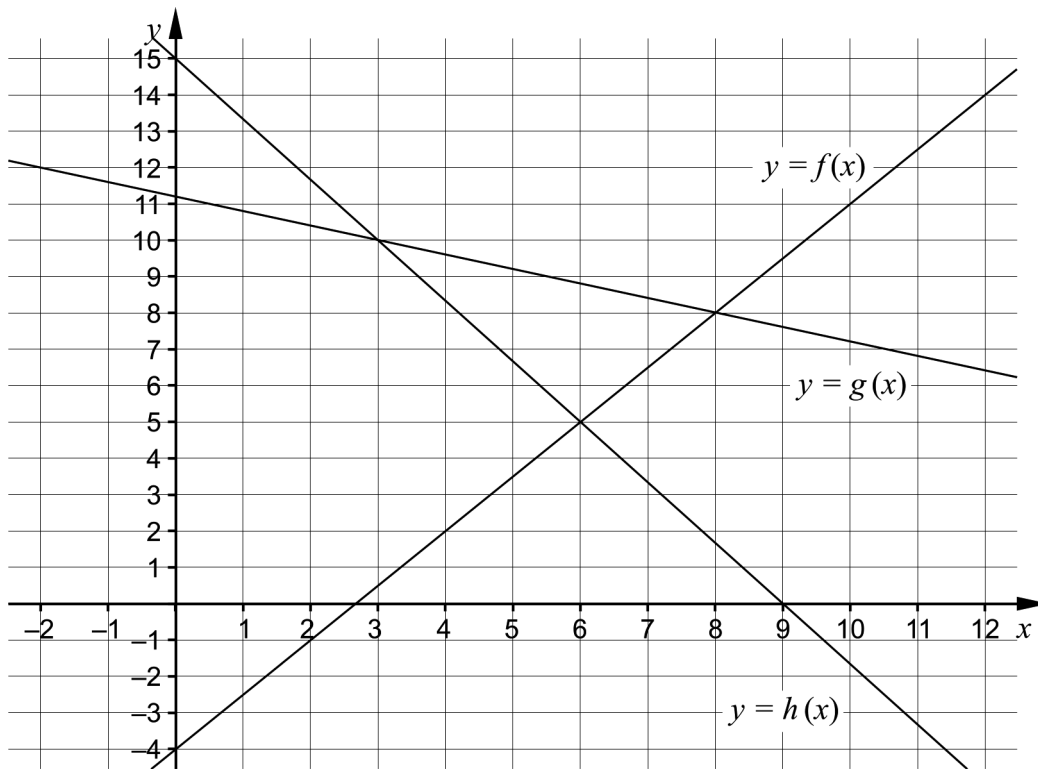
9. Bilden visar fyra figurer som består av cirklar. Figurerna bildas enligt ett mönster. Fler figurer kan bildas enligt samma mönster.



Bestäm ett uttryck för antalet cirklar i Figur n .

_____ (0/0/1)

10. Figuren visar graferna till funktionerna f , g och h .



För vilka värden på x gäller att $h(x) \leq f(x) < g(x)$?

_____ (0/0/2)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Lös andragradsekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ med algebraisk metod. (2/0/0)

12. Punkterna $(3, 15)$ och $(6, 42)$ ligger på en rät linje. Avgör om denna linje är parallell med linjen $y = 8x - 13$. Motivera ditt svar. (2/0/0)

13. Nedan finns två utsagor.

Utsaga 1: Alla sidor i en fyrhörning $ABCD$ är lika långa.

Utsaga 2: Fyrhörningen $ABCD$ är en kvadrat.

Förklara varför det inte är korrekt att använda ekvivalenssymbolen \Leftrightarrow mellan utsaga 1 och utsaga 2. (1/0/0)

14. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} \frac{2x}{5} + y = 4 \\ \frac{3y}{2} = 10 + x \end{cases}$$
 med algebraisk metod. (0/2/0)

15. En andragradskurva har ekvationen $y = ax^2 + bx + c$ och en rät linje har ekvationen $y = -bx + c$, där a , b och c är konstanter skilda från noll. Andragradskurvan och linjen skär varandra i två punkter.

a) Visa att den ena skärningspunkten ligger på y -axeln. (0/1/0)

b) Bestäm y -koordinaten för den andra skärningspunkten uttryckt i konstanterna a , b och c . (0/0/1)

16. För en andragradsfunktion f gäller att $f(x) = ax^2 - a^2x + 2$ där a är en positiv konstant.

Bestäm vad som ska gälla för a för att andragradsfunktionen ska ha två nollställen. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 17–25. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 54 poäng varav 22 E-, 19 C- och 13 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 13 poäng

D: 21 poäng varav 6 poäng på minst C-nivå

C: 28 poäng varav 10 poäng på minst C-nivå

B: 36 poäng varav 4 poäng på A-nivå

A: 42 poäng varav 6 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Ställ upp en ekvation för en rät linje som går genom punkten $(-1, 2)$.
Endast svar krävs (1/0/0)

18. Linus morföräldrar sätter in 4500 kr på Linus bankkonto den 1 januari.
Bankkontot har en fast årlig ränta.

- a) Linus vill veta svaret på frågan: "Efter hur många år finns det 6000 kr på kontot?"

Nedan visas sex ekvationer A–F, där x är antalet år efter insättningen.
Endast en av ekvationerna har en lösning som ger korrekt svar på frågan. Vilken?

A. $4500 \cdot 0,01^x = 6000$

B. $4500 \cdot x^{0,02} = 6000$

C. $4500 \cdot 1,03^x = 6000$

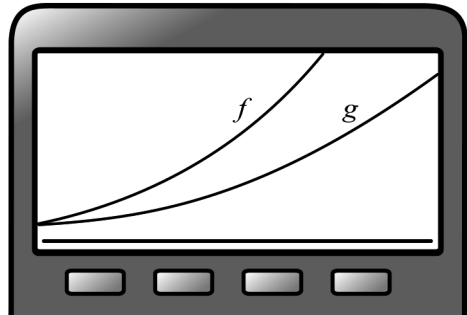
D. $4500 \cdot x^{1,04} = 6000$

E. $4500 + 1,05x = 6000$

F. $4500(1 + 0,06x) = 6000$ *Endast svar krävs* (1/0/0)

- b) Ange hur stor den fasta årliga räntan är på Linus bankkonto.
Endast svar krävs (1/0/0)

19. Maria ritat grafen till en andragradsfunktion och grafen till en exponentialfunktion på sin grafräknare. Båda graferna går genom punkten $(0, 2)$. För andragradsfunktionen är punkten $(0, 2)$ en minimipunkt. Bilden visar fönstret på grafräknaren.



Maria visar sin grafräknare för Josef och frågar:

– Kan du se vilken av graferna som visar en andragradsfunktion och vilken som visar en exponentialfunktion?






– Nej, det syns ju inte. Men jag vet vad jag ska göra för att det ska synas! säger Josef.

Vad ska Josef göra med fönstret på grafräknaren för att kunna avgöra vilken av graferna som visar en andragradsfunktion respektive en exponentialfunktion? Motivera ditt svar. (2/0/0)

20. Bestäm ett värde på x som ger $y = 6$ då $y = 7,5^x$. Svara med två decimaler. (2/0/0)

21. Cecilia har ett företag. Istället för julklappar till sina kunder tänker hon köpa gåvokort från en välgörenhetsorganisation.

På organisationens hemsida finns en lista över gåvokort att välja mellan.

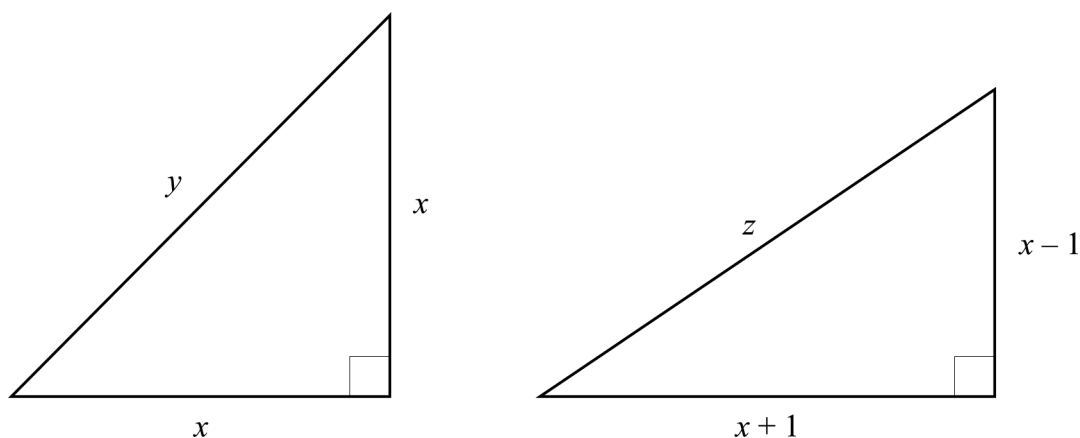
Gåvokort	Innehåll	Antal
	Vatten- och hygienpaket 120 kr	<input type="text"/>
	Vätskeersättning 140 kr	<input type="text"/>
	Förpackning med vattenreningstabletter 150 kr	<input type="text"/>
	Poliovaccinpaket 240 kr	<input type="text"/>
	Cykel 750 kr	<input type="text"/>

Cecilia vill köpa 90 gåvokort för 15 000 kronor. Hon har valt två olika sorter av gåvokort och ställer upp ett ekvationssystem för att bestämma hur många av varje sort hon ska beställa:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 240x + 140y = 15\,000 \end{cases}$$

- a) Ange vilka två olika sorter av gåvokort Cecilia har valt att beställa. (1/0/0)
Endast svar krävs
- b) Bestäm hur många gåvokort Cecilia beställer av respektive sort. (2/0/0)

22. Figuren visar två rätvinkliga trianglar.



Visa att $z > y$ för alla värden på x då $x > 1$ (0/2/0)

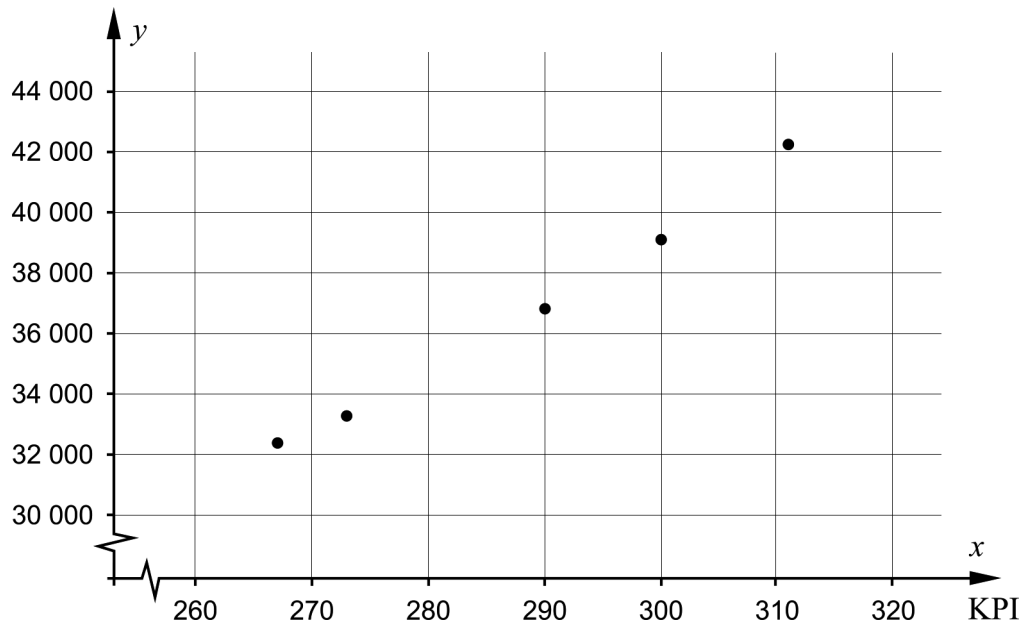
23. Summan av två tal är 51. Bestäm de två talen om talens produkt är 152,96 (0/3/0)

24. Tabellen och diagrammet visar sambandet mellan maximalt studiemedel per termin vid heltidsstudier och konsumentprisindex (KPI) för några år mellan år 2001 och år 2011. Maximalt studiemedel betecknas med y kr och KPI med x .

År	KPI x	Maximalt studiemedel y kr
2001	267	32 379
2002	273	33 260
2007	290	36 820
2009	300	39 100
2011	311	42 230

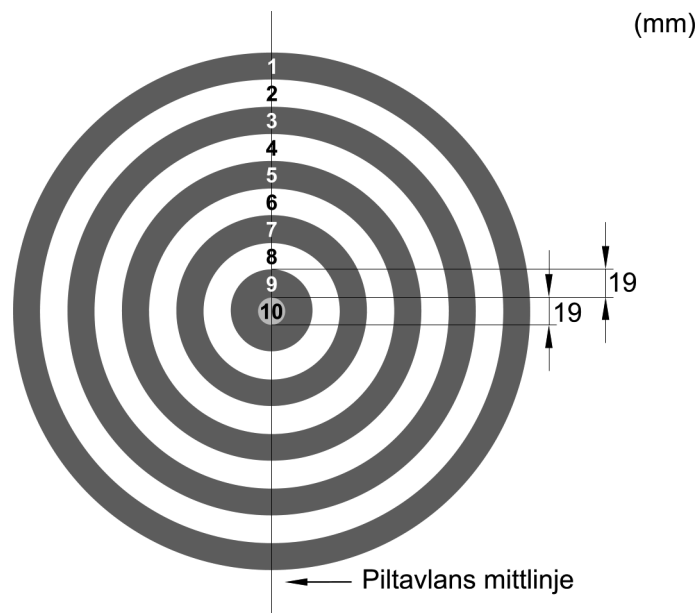
KPI (Konsumentprisindex) bygger på prisutvecklingen för alla slags varor och tjänster. KPI styr storleken på pensioner, studiemedel, underhållsbidrag med mera.

Maximalt studiemedel i kr

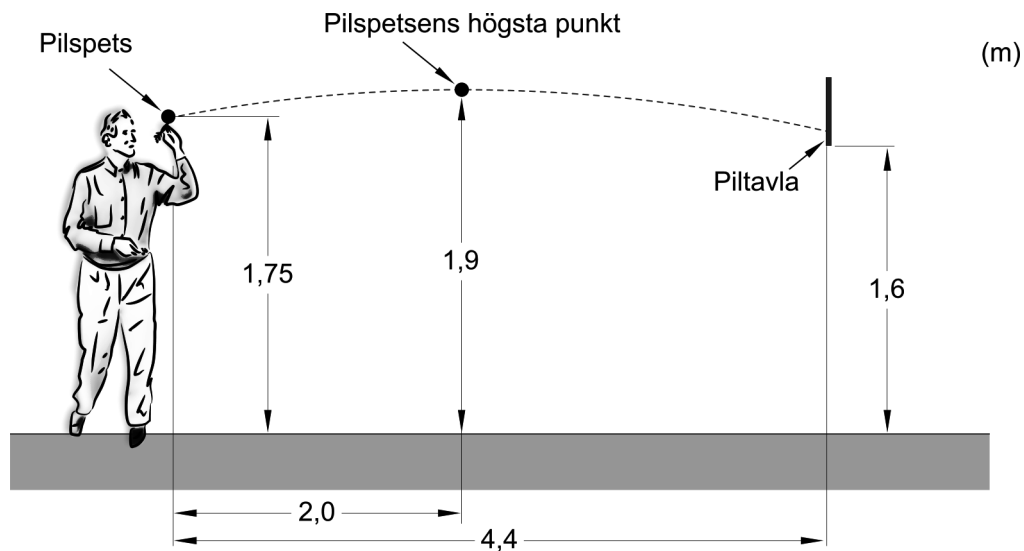


- a) Dra en rät linje som så bra som möjligt visar sambandet mellan maximalt studiemedel och KPI samt bestäm linjens ekvation. (0/2/0)
- b) Använd sambandet i a)-uppgiften och bestäm hur mycket studiemedlet borde öka i kr när KPI ökar med ett. (0/1/0)

25. Arne kastar pil mot en piltavla som är indelad i tio ringformade fält. Vart och ett av fälten har bredden 19 mm och är markerat med ett tal. Talen är placerade på tavlans mittlinje. Se bild.



Arne kastar pilen och då den lämnar hans hand är det horisontella avståndet mellan piltavlan och pilspetsen 4,4 m. Pilspetsen är då 1,75 m över marken. 2,0 m längre bort i horisontell led når den sin högsta höjd på 1,9 m. Under sin färd genom luften följer pilspetsen formen av en andragradskurva och träffar piltavlans mittlinje. Piltavlans underkant sitter på höjden 1,6 m. Se figur.



Avgör vilket fält pilspetsen träffar vid Arnes pilkast.

(0/0/4)

Innehållsförteckning

Inledning	4
Läsanvisning.....	4
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 2a	5
Uppgifter av kortsvarstyp	5
Uppgifter av långsvarstyp	5
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	6
Sammanställning av elevresultat	7
Sammanställning till ett provbetyg	7
2. Bedömningsanvisningar	8
Läsanvisning.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov B.....	8
Instruktioner för bedömning av delprov C.....	10
Instruktioner för bedömning av delprov D	11
3. Exempel på bedömda elevlösningar	14
Uppgift 11	14
Uppgift 12	14
Uppgift 13	15
Uppgift 15a	16
Uppgift 16	17
Uppgift 19	18
Uppgift 21b	19
Uppgift 22	20
Uppgift 23	21
Uppgift 25	22
4. Instruktioner för sammanställning till ett provbetyg	25
Sammanställningen till ett provbetyg i samband med provet i matematik 2a	25
Resultaten på provet i relation till kursbetyget	25
5. Instruktioner för inrapportering av provresultat	26
6. Kopieringsunderlag och webbmaterial	28
Webbmaterial.....	28
Formulär för sammanställning av elevresultat	29
Provsammanställning – centralt innehåll	30
Centralt innehåll matematik 2a – förkortningar	31

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 2a. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 2a

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. De delar i styrdokumentet som är knutna till karaktärsämnet kommer inte att behandlas i detta prov då provet är gemensamt för alla yrkesprogram.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges de poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_p
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _p
med korrekt bestämning av...	+1 E _p
Godtagbar verifiering av...	+1 E _p

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E _R	1 E _R och 1 C _R	1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{\quad}, \sqrt[n]{\quad}, f(x), x, y,$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}, (\quad), \%, \{, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \text{VL}, \text{HL}$
Termer	t.ex. x -led, y -led, koordinat, punkt, skärningspunkt, konstant, graf, kurva, funktionsvärde, intervall, definitions-/värdemängd, reell lösning, ekvationssystem, rät linje, lutning, riktningskoefficient, andragradsfunktion, parabel, nollställe, maximum, minimum, maximi-/minimipunkt, symmetri, symmetrilinje, exponentialfunktion, exponentiell ökning, startvärde, förändringsfaktor, procent, potensfunktion, implikationspil, ekvivalens, algebra, uttryck, ekvation, formel, rationell exponent, rätvinklig, liksidig, likbent
Hänvisningar	t.ex. till pq-formeln, kvadreringsregeln, konjugatregeln, räta linjens ekvation, vinkelsumma i en triangel, Pythagoras sats
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i "Formulär för sammanställning av elevresultat" som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		Max 2/0/0
a)	Godtagbart ritad rät linje	+1 E _P
b)	Korrekt svar ($y = 2x + 1$)	+1 E _P
2.		Max 2/0/0
a)	Korrekt svar (2)	+1 E _B
b)	Korrekt svar (1,5)	+1 E _B
3.		Max 1/2/0
a)	Korrekt svar ($x = \pm 4$)	+1 E _P
b)	Korrekt svar ($x = 1,25$)	+1 C _P
c)	Korrekt svar ($x = 15$)	+1 C _P
4.		Max 0/2/0
	Godtagbart angivet intervall, t.ex. ” y är större än -4 och mindre än eller lika med 5 ”	+1 C _B
	med korrekt använda olikhetstecken ($-4 < y \leq 5$)	+1 C _K
5.		Max 0/1/0
	Korrekt svar (D)	+1 C _B

6. **Max 0/1/1**
- Godtagbar ansats, korrekt angivna exempel för minst ett av begreppen t.ex.
 Algebraiskt uttryck: A, D, F *eller* Ekvation: C *eller* Funktion: B, E +1 C_B
 med varje alternativ korrekt angivet +1 A_B

Exempel	A	B	C	D	E	F
Begrepp						
Algebraiskt uttryck	X			X		X
Ekvation			X			
Funktion		X			X	





7. **Max 1/1/1**
- a) Korrekt svar ($x^2 - 9$) +1 E_P
- b) Korrekt svar ($-12x - 7$) +1 C_P
- c) Korrekt svar (2^x) +1 A_P


8. **Max 1/1/1**
- a) Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (0,63) +1 E_{PL}
- b) Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (0,9) +1 C_{PL}
- c) Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (2,1) +1 A_{PL}
- Kommentar:* Svar som avviker $\pm 0,02$ från de ovan angivna svaren anses vara korrekta.

9. **Max 0/0/1**
- Korrekt svar (t.ex. $2^n - 1$) +1 A_{PL}


10. **Max 0/0/2**
- Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning, t.ex. ”då x är 6 eller mer och mindre än 8” *eller* t.ex. $6 < x < 8$ +1 A_B
- med korrekt använda olikhetstecken ($6 \leq x < 8$) +1 A_K




Instruktioner för bedömning av delprov C

- 11.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, sätter in värden korrekt i formeln för lösning av andragradsekvationer eller motsvarande för kvadratkomplettering +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = 5, x_2 = -1$) +1 E_P
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 12.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. beräknar k -värdet korrekt för linjen genom de givna punkterna, $k = 9$ +1 E_P
 med godtagbart enkelt resonemang med korrekt slutsats +1 E_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 13.** **Max 1/0/0**
- Godtagbart enkelt resonemang där det förklaras varför \Leftrightarrow mellan utsaga 1 och utsaga 2 inte är korrekt +1 E_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 14.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer en variabel med algebraisk metod +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = -2,5; y = 5$) +1 C_P
- 15.** **Max 0/1/1**
- a) Godtagbart välgrundat resonemang med godtagbar slutsats +1 C_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar ($\frac{2b^2}{a} + c$) +1 A_P

- 16.** **Max 0/0/2**
- Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang som innefattar att
 diskriminanten $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{2}{a}$ ska vara större än noll +1 A_R
- med fortsatt resonemang som leder till att $a > 2$ för att funktionen ska ha
 två nollställen +1 A_R
- Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”* 

Instruktioner för bedömning av delprov D

- 17.** **Max 1/0/0**
- Korrekt svar (t.ex. $y = x + 3$) +1 E_{PL}
- 18.** **Max 2/0/0**
- a) Korrekt svar (C) +1 E_M
- b) Korrekt svar (3 %) +1 E_M
- 19.** **Max 2/0/0**
- Godtagbart enkelt resonemang om hur Josef ska ändra inställningarna +1 E_R
- Godtagbart enkelt resonemang där det framgår hur Josef kan se skillnad
 mellan funktionernas grafer +1 E_R
- Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”* 
- 20.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $6 = 7,5^x$ +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0,89) +1 E_{PL}

- 21.** **Max 3/0/0**
- a) Korrekt svar (poliovaccinpaket och vätskeersättning) +1 E_M
- b) Godtagbar ansats, bestämmer minst en av variablerna x eller y korrekt +1 E_M
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (24 gåvokort med poliovaccinpaket och 66 gåvokort med vätskeersättning) +1 E_M
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 22.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat resonemang genom att teckna en ekvation för z^2 och en ekvation för y^2
 eller
 genom att teckna en ekvation för z och en ekvation för y +1 C_R
 med i övrigt fortsatt välgrundat resonemang där det visas att $z > y$ +1 C_R
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 23.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ett korrekt ekvationssystem +1 C_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3,2 och 47,8) +1 C_{PL}
 Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 "Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga" +1 C_K
- Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"* 
- 24.** **Max 0/3/0**
- a) Godtagbar ansats, t.ex. ritar en godtagbart anpassad linje och bestämmer dess lutning till ett värde i intervallet $200 \leq k \leq 245$ +1 C_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t.ex. $y = 222x - 27311$) +1 C_M
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar (k -värdet i a)-uppgiften med enhet kr) +1 C_M

25.

Max 0/0/4

Godtagbar ansats, bestämmer koordinaterna för minst tre punkter som krävs för lösning av uppgiften i ett definierat koordinatsystem

eller

bestämmer koordinaterna för två punkter som krävs för lösning av uppgiften i ett definierat koordinatsystem samt visar insikt i att symmetri gäller

+1 A_M

med godtagbar fortsättning, bestämmer en godtagbart anpassad andragsgradsfunktion, t.ex. $y = -0,0375x^2 + 0,15x + 1,75$

+1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t.ex. ”Arnes pil hamnar i fält 5”)

+1 A_M

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga”

+1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”



3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 11

Elevlösningsexempel 11.1 (0 poäng)

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

$$x = -2 \pm 3$$

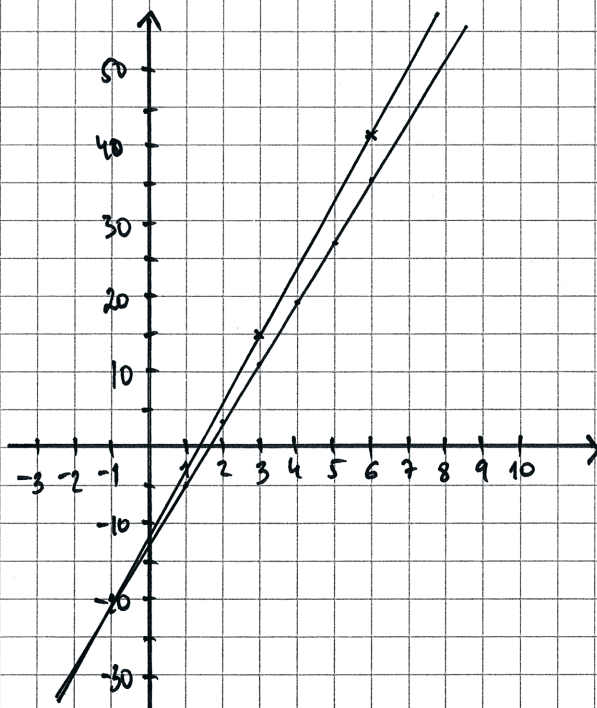
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -5$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar teckenfel vid insättning i formeln för lösning av andragradsekvationer och uppfyller därmed inte kravet för godtagbar ansats. Lösningen ges noll poäng.

Uppgift 12

Elevlösningsexempel 12.1 (1 EP)



Svar: linjen är inte parallell med linje $y = 8x - 13$.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en grafisk lösning som anses vara tillräckligt noggrann för att kunna dra slutsatsen att linjerna inte är parallella. Kraven för resonemangspoäng på E-nivå anses inte vara uppfyllda eftersom motivering till varför linjerna inte är parallella saknas.

Elevlösningsexempel 12.2 (1 EP)

$$\text{Punkter} = (3, 15), (6, 42)$$

$$k = \frac{27}{3}$$

$$k = 9$$

Svar: linjerna är ej parallella

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbart beräknad riktningskoefficient för linjen genom de givna punkterna. Kraven för resonemangspoäng på E-nivå anses inte vara uppfyllda eftersom det inte framgår hur slutsatsen dras.

Elevlösningsexempel 12.3 (1 EP och 1 ER)

$$(3, 15) - (6, 42) \quad k = 9 \quad y = 8x - 13$$

$$(6, 42) - (3, 15) \quad k = 8$$

$$3, 27 \quad \frac{27}{3} = 9 \quad \underline{9 \neq 8} \quad \text{Nej!}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbart beräknad riktningskoefficient för linjen genom de givna punkterna. Även om motiveringen är knapphändig anses kraven för resonemangspoäng på E-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 13**Elevlösningsexempel 13.1 (0 poäng)**

Anledningen till att det endast gör att sätta ut en implikationssymbol men inte en för ekvivalens är för att utsagorna endast fungerar åt ett håll. För att en ekvivalenssymbol ska kunna sättas ut så måste påståendena fungera åt båda hållen.

$$\text{ex. } x+3=7 (\Rightarrow) x=4 \text{ är en ekvivalens}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt förklaring av begreppet ekvivalens men eftersom förklaringen inte knyts till uppgiften ges lösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 13.2 (1 ER)

Svar: Även om alla sidor är lika långa så behöver det inte vara en kvadrat, det finns andra geometriska former

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar förklaring till varför en ekvivalenspil inte är korrekt att använda. "andra geometriska former" är något otydligt men trots detta anses lösningen uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 15a

Elevlösningsexempel 15a.1 (1 CR)

På y-axeln är $x=0$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y(0) = c$$

$$y = -bx + c$$

$$y(0) = c$$

Dvs. båda kurvorna går genom $(0, c)$
V.S.V.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar med ett välgrundat resonemang att den ena skärningspunkten har koordinaterna $(0, c)$ och att den därmed ligger på y-axeln. Lösningen anses uppfylla kraven för resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 15a.2 (1 CR)

Båda funktionerna har konstanttermen c , vilket visar att båda skär y-axeln då $y = c$ V.S.V.

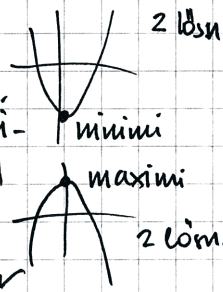
Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett välgrundat resonemang som baseras på att båda ekvationerna "har konstanttermen c ". Lösningen anses uppfylla kraven för resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (0 poäng)

$$f(x) = ax^2 - a^2x + 2$$

Om vi vill att andragradsfunktionen ska ha två nollställen så behöver vi för parabeln att antingen ha en positiv maximipunkt eller en negativ minimipunkt. Dessutom vet vi att diskriminanten blir större än noll i ekvationen så har vi två reella rötter = 2 lösningar



Elevlösningsexempel 16.2 (0 poäng)

$$f(x) = ax^2 - a^2x + 2$$

$$0 = ax^2 - a^2x + 2 \quad (\text{pq-formeln})$$

$$x = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - 2}$$

ska vara > 0 då blir det två nollställen på x-axeln

Bedömningskommentar till exemplen: Elevlösningsexempel 1 och 2 visar förståelse för att diskriminanten ska vara > 0 men eftersom diskriminanten saknas (elevlösningsexempel 1) respektive är felaktig (elevlösningsexempel 2) anses inte kraven för den första resonemangs-poängen på A-nivå vara uppfyllda. Lösningarna ges noll poäng.

Uppgift 19

Elevlösningsexempel 19.1 (0 poäng)

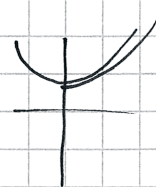
Svar: Han kan via fönstret (WINDOW) göra en större xmin-värde, för då kommer man kunna se att ena linjen går i en kurva uppåt, medans andra kurvan börjar vid en punkt. Den som kurvar uppåt är en andragsradsfunktion och den andra är en exponentialfunktion.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en förklaring till hur fönstret ska ändras men det är inte helt klart vad som menas med "en större xmin-värde". Kraven för den första resonemangspoängen på E-nivå anses därmed inte vara uppfyllda. Vidare är det oklart vilken sida om y-axeln som andragsradsfunktionen "kurvar uppåt". Därmed anses inte kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå vara uppfyllda. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 19.2 (2 ER)

Om mer av x-axeln åt vänster syns ser man när andragsradsfunktionen ökar i y-värde igen

dvs. andragsradsfunktionen kommer att stiga i värde igen eftersom min-
punkt syns



Svar: Flytta fönstret åt vänster.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en förklaring där det framgår att fönsterinställningen ska ändras så att "mer av x-axeln åt vänster syns". Därmed anses kraven för den första resonemangspoängen på E-nivå vara uppfyllda. Förklaringen till hur funktionerna ser ut till vänster om y-axeln är otydlig. Förklaringen tydliggörs av de skissade kurvorna trots att grafen till exponentialfunktionen startar på y-axeln. Sammantaget anses kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå vara nått och jämnt uppfyllda.

Uppgift 21b

Elevlösningsexempel 21b.1 (0 poäng)

$$\begin{cases} ① & x + y = 90 \\ ② & 240x + 140y = 15000 \end{cases}$$

uträknat mha miniräknare

Man har valt att köpa 24 poliovaccinpaket
och 66 vätskeerättningspaket.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en miniräknarlösning där det inte framgår hur miniräknaren har använts. Detta anses inte vara tillräckligt för en godtagbar ansats. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 21b.2 (1 EM)

$$x + y = 90 \Rightarrow y = 90 - x$$

$$240x + 140y = 15000$$

$$240x - 140x + 12600 = 15000$$

$$100x = 2400$$

$$x = 24$$

$$90 - 24 = 66 = y$$

$$24 \cdot 240 + 66 \cdot 140$$

$$5760 + 9240 = 15000$$

$$\text{SVAR: } x = 24$$

$$y = 66$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett godtagbart löst ekvationssystem. Eftersom variablerna varken är definierade i början av lösningen eller i svaret anses inte kraven för den andra modelleringspoängen vara uppfyllda. Elevlösningen ges den första modelleringspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21b.3 (2 EM)

$\begin{array}{r} 240 \\ \cdot 30 \\ \hline 7200 \end{array}$	$\begin{array}{r} 140 \\ \cdot 60 \\ \hline 8400 \end{array}$	Svar: 24 st poli ovallinpaket 240kr och 66 st vätskeersättning 140kr
15600		
$\begin{array}{r} 240 \\ \cdot 20 \\ \hline 4800 \end{array}$	$\begin{array}{r} 140 \\ \cdot 70 \\ \hline 9800 \end{array}$	
14600		
$\begin{array}{r} 240 \\ \cdot 24 \\ \hline 5760 \end{array}$	$\begin{array}{r} 140 \\ \cdot 66 \\ \hline 9240 \end{array}$	$y = 66$ $x = 24$ $x + y = 90$ $240x + 140y = 15000$
$\begin{array}{r} 9240 \\ + 5760 \\ \hline 15000 \end{array}$		

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en lösning som bygger på prövning av tre specialfall vilket anses motsvara en systematisk prövning. Lösningen ges två modelleringspoäng på E-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 CR)

$y^2 = x^2 + x^2$ $y^2 = 2x^2$ $z^2 = (x+1)^2 + (x-1)^2$ $z^2 = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)$ $z^2 = 2x^2 + 2$	Svar: så länge $x > 1$ så är $z > y$
---	---

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar korrekt tecknade ekvationer för z^2 och y^2 . Trots att hänvisning till Pythagoras sats saknas anses kraven för den första resonemangspoängen vara uppfyllda. Slutsatsen i svaret dras inte utifrån uttryck för z och y och motivering saknas till varför $z^2 > y^2$ medför att $z > y$. Därmed anses inte kraven för den andra resonemangspoängen vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 22.2 (2 CR)

$$y = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2}$$

$$z = \sqrt{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 + 2} > \sqrt{2x^2}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar korrekt tecknade ekvationer för z och y . Trots att hänvisning till Pythagoras sats saknas anses kraven för den första resonemangspoängen vara uppfyllda. På sista raden dras ingen tydlig slutsats men lösningen anses trots detta nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på C-nivå. Sammantaget ges lösningen båda resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 23**Elevlösningsexempel 23.1 (1 CPL)**

$$x + y = 51$$

$$x \cdot y = 152,96$$

$$x^2 + y^2 = 7749,96$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett korrekt tecknat ekvationssystem och uppfyller därmed kraven för första problemlösningspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 23.2 (2 CPL)

$$x(51-x) = 152,96$$

$$0 = x^2 - 51x + 152,96$$

Geogebra: $\{ x=3,2, \quad x=47,8 \}$.

Svar: 3,2 och 47,8

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning där digitala hjälpmedel har använts. När det gäller kommunikation är variabeln odefinierad och det är ottydligt hur det digitala hjälpmedlet har använts. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (2 AM och 1 AK)

Angivna punkter om vi sätter där pilen startar som $(0, 0)$, där pilen når sin högsta punkt är $(2, 0,15)$ och pilen landar är $(4,4; y)$.

Eftersom att maxipunkten är där $x=2$ och nollställena är lika långt ifrån varandra och ett nollställe är $x=0$, måste det andra vara $x=4$
 $2-2=0$ $2+2=4$

$ax^2+bx+c=0$, tre angivna koordinater: $(0,0)$, $(2;0,15)$ och $(4,0)$.

Använder miniräknaven, QuadReg och får en andragradare med $a = -0,0375$, $b = 0,15$, $c = 0$.

Ritar min andragradare i räknaren $x=4,4$ medför att $y = -0,066$ som innebär att pilen tappat $0,066$ m i höjd under färden. Pilen befinner sig

$1,75 - 0,066 = 1,684$ m över marken. $1,684 - 1,6 = 0,084$ m = 84 mm upp på tavlan. $\frac{84}{19} = 4,42$

Alltså befinner sig pilen på fält 4.

Svar: Fältet där man får 4 poäng.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med ett felaktigt svar. I och med att svaret blir fel anses inte kraven för den tredje modelleringspoängen vara uppfyllda. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och behandlar uppgiften i sin helhet. Trots att den tredje modelleringspoängen inte ges anses elevlösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen de två första modelleringspoängen på A-nivå samt kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 25.2 (3 AM och 1 AK)

Punkt 1 (0; 1,75)

sym. $\left\{ \begin{array}{l} 2 \quad (2; 1,9) \\ 3 \quad (4; 1,75) \end{array} \right.$

kvadreg

$$y = -0,0375x^2 + 0,15x + 1,75$$

när $x = 4,4$ $y = 1,684$

vilket ger 84 mm upp på tavlan

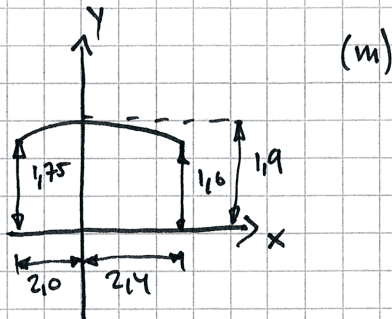
$$\frac{84}{19} \approx 4,42$$

det betyder att han träffade

circel nr 5

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en räknarlösning med godtagbart svar. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå samt innehåller alla väsentliga delar även om förklaringar och motiveringar är knapphändiga. Sammantaget ges lösningen de tre modelleringspoängen på A-nivå samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 25.3 (3 AM och 1 AK)



①

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$b = -(0 \cdot 2) = 0$$

$$c = 1,9$$

$$a = ?$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + 1,9$$

$x = 2,4$ m ger:

$$y = -0,0375 \cdot 2,4^2 + 1,9 = 1,684 \text{ m}$$

② (ej skalenlig)

sätt $x = -2,0$

och vet att då är $y = 1,75$

$$y = ax^2 + c$$

$$1,75 = a \cdot (-2,0)^2 + 1,9$$

$$\frac{-0,15}{4} = \frac{a \cdot 4}{4}$$

$$a = -0,0375 \Rightarrow y = -0,0375x^2 + 1,9$$

Fortsättning på nästa sida.

tavlans ^{nederkant} siffer 1,6 m från marken.

$$1,684 - 1,6_m = 0,084 \text{ m} = 84 \text{ mm}$$

Pilen träffar 84 mm från tavlaens nederkant.

$$\frac{84}{19} \approx 4,4$$

Pilen träffar 4,4 fält från tavlaens nederkant, alltså i det 5:e

Svar: Pilen träffar i 5 poängs fältet.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen sätts y-axeln som symmetrilinje vilket gör att de två punkterna $(-2; 1,75)$ och $(0; 1,9)$ är tillräckliga för bestämning av andrags-funktionen och därmed anses det även att det visats insikt i att symmetri måste gälla. När det gäller kommunikation innehåller lösningen alla väsentliga delar. Trots att det inte är tydligt hur konstanten b beräknas anses lösningen i övrigt vara lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen de tre modelleringspoängen på A-nivå samt kommunikationspoängen på A-nivå.