Part B	Problems 1–11 which only require answers.
Part C	Problems 12–17 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for Part B and Part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 points consisting of 24 E-, 24 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades
E: 17 points
D: 26 points of which 8 points on at least C-level
C: 34 points of which 14 points on at least C-level
B: 44 points of which 6 points on A-level
A: 53 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required* " you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ____

Date of birth: ______________________________________

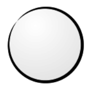
Educational programme: ______________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

1. Find *all* antiderivatives of $f(x) = x^2 + 8$

$F(x) =$ ______________________ (1/0/0)

2. Ayse throws a ball straight up into the air. The height of the ball is given by



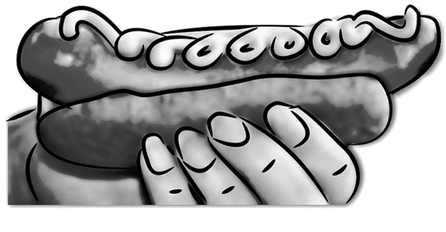
$s(t) = 1.5 + 12t - 5t^2$

where $s(t)$ is the height above the ground in metres and t is the time in seconds after the throw.

Determine the velocity of the ball at the time $t = 1$ second.

___________________ m/s (1/0/0)

3. Mattias sells hot dogs at a football game. The hot dogs cost SEK 20 each. Mattias' revenue in SEK is a function of the number of hot dogs sold.



Which of the alternatives A–E is correct?

The function is …

A. a quadratic function.

B. a discrete function.

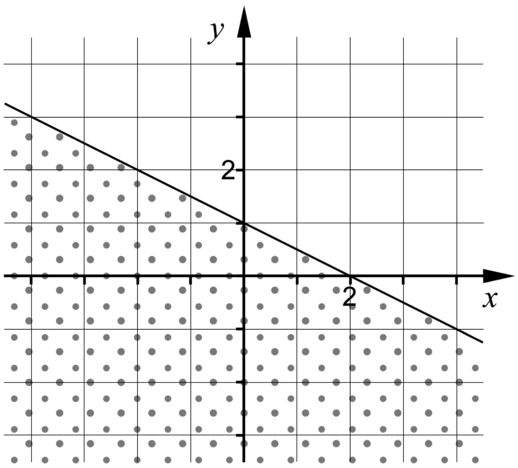
C. an exponential function.

D. a constant function.

E. a continuous function.

______________________ (1/0/0)

4. One of the alternatives A–F corresponds to the dotted area.
Which one? _______________________ (1/0/0)



A. $y+0.5x \geq 1$

B. $y+0.5x \leq 1$

C. $y+0.5x = 1$

D. $y-0.5x \geq 1$

E. $y-0.5x \leq 1$

F. $y-0.5x = 1$

5. Determine $f'(x)$.

a) $f(x)=5x^5+x^2-2$ $f'(x)=$ _______________________ (1/0/0)

b) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-e}{3}$ $f'(x)=$ _______________________ (0/1/0)

c) $f(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $f'(x)=$ _______________________ (0/1/0)

6. In the expression $\dfrac{x-A}{2B-x^2}$, A and B are constants.

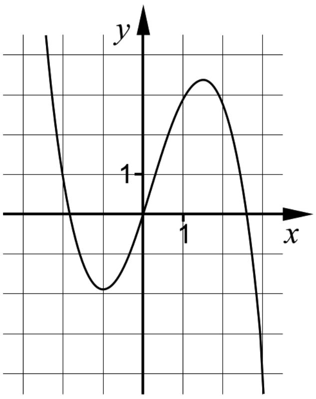
Determine A and B so that the following two conditions are satisfied:

- The expression has the value 0 when $x=-5$
- The expression is not defined for $x=10$ and $x=-10$

$A=$ _______________________ (0/1/0)

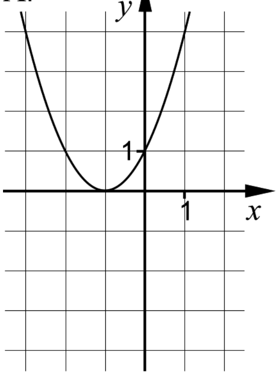
$B=$ _______________________ (0/1/0)

7. The figure shows the graph of the function f.

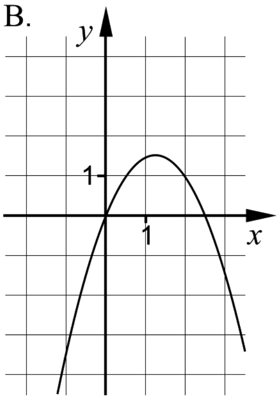


One of the alternatives A–F shows the graph of the function's derivative f'. Which one? ______________________ (0/1/0)

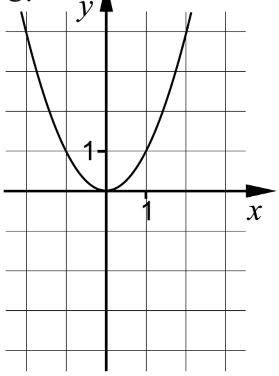
A.



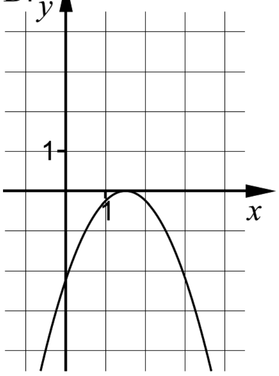
B.



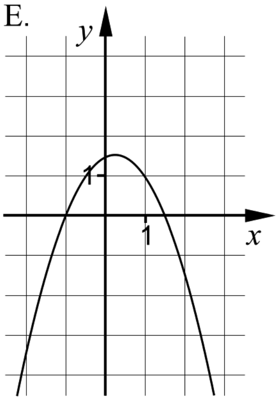
C.



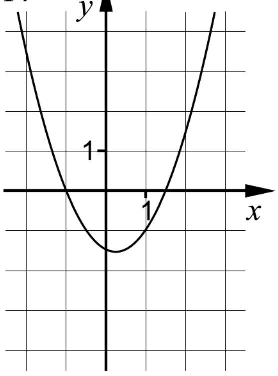
D.



E.



F.



8. Simplify the expressions as far as possible.

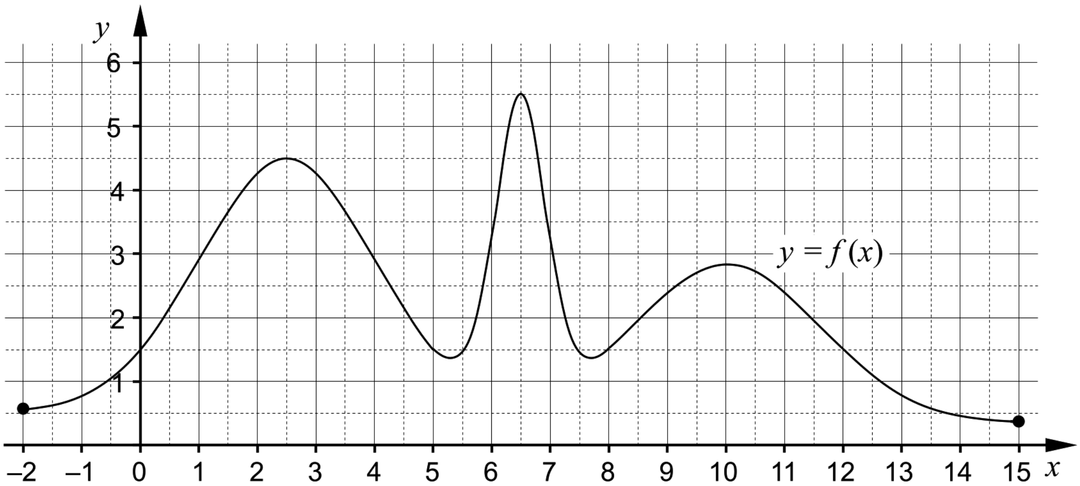
a) $\dfrac{2x-10}{2x^2-20x+50}$ ______________________ (0/1/0)

b) $-x^4-(-2x)^4$ ______________________ (0/1/0)

c) $\dfrac{-A+(A+5)^{10}-5}{A+5}$ ______________________ (0/0/1)

9. The first four numbers in a geometric progression are
$1,\ a_2,\ a_3,\ 64$
Determine a_2 ______________________ (0/1/0)

10. The figure shows the graph of the function f on the interval $-2 \le x \le 15$



For what value of p does $\displaystyle\int_p^{p+2} f(x)\,\mathrm{d}x$ assume its largest value?

______________________ (0/0/1)

11. The function g is a cubic function. The table shows the sign of the derivative for some different values of x.

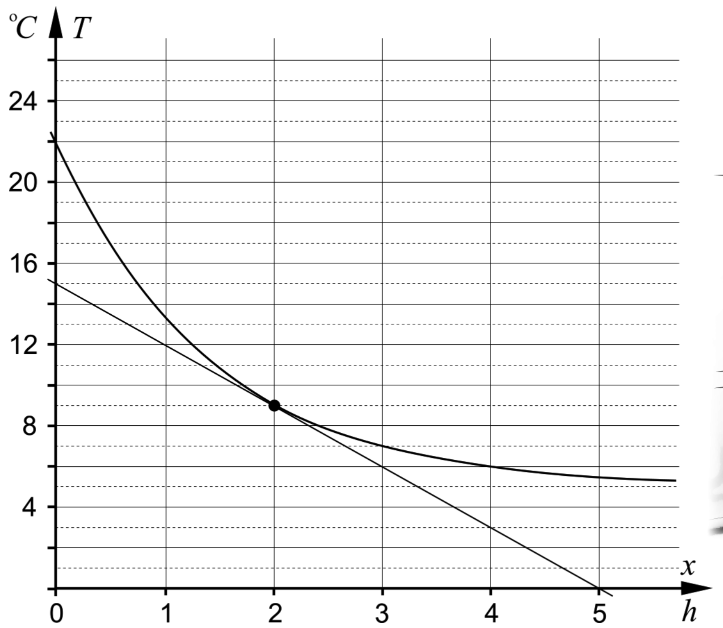
x	0	3	5	6	10
$g'(x)$	–	0	+	0	–

For what value of x does it hold that $g''(x)=0$? ______________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

12. Evaluate $\int_{1}^{2} 6x^2 \mathrm{d}x$ algebraically. (2/0/0)

13. A bottle of water is placed in a fridge at 12:00. The temperature of the water is described by the exponential function $T(x) = 17\mathrm{e}^{-0.7x} + 5$
where $T(x)$ is the temperature of the water in $°C$ and x is the time in hours after 12:00. The figure shows the graph of the function T and the tangent at the point where $x = 2$



a) Read from the figure and calculate the average temperature change of the water per hour during the first 4 hours. (2/0/0)

b) Use the figure to calculate the gradient of the tangent. Interpret the meaning of this gradient in this context. (0/2/0)

c) Is it possible for the temperature of the water to reach $3°C$?
Start with the exponential function $T(x) = 17\mathrm{e}^{-0.7x} + 5$ and justify your answer. (1/1/0)

14. It holds for the function *f* that $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
Use the derivative to determine the coordinates for any existing maximum, minimum and saddle points for the graph of the function.

Also, determine the character of each point, that is, whether it is a maximum, minimum or saddle point. (3/1/0)

15. Maja investigates the cubic equation $(2x-1)(x^2+4) = 0$ and claims:

"The equation has three real solutions."

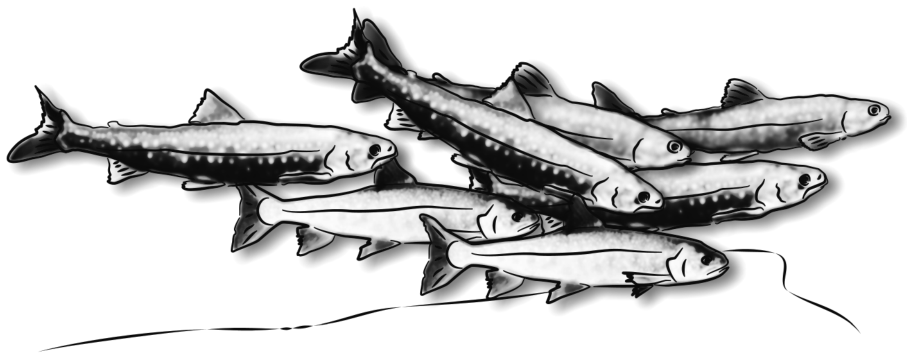
Investigate whether she is right. (2/0/0)

16. It holds for a function *f* that $f(x) = kx + m$

Investigate what must be true for *k* and *m* if $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

Justify your conclusions. (0/2/1)

17. Fish of a species that has not existed there before are planted into a lake. The population of fish can be described by the relation
$N(t) = \dfrac{15\,000}{3 + 2\mathrm{e}^{-0.5 \cdot t}}$ where *N* is the number of fish and *t* is the time in years after the fish have been planted.



a) Determine how many fish were initially planted into the lake. (0/1/0)

b) Due to different environmental factors, the number of fish cannot keep growing indefinitely. Use the relation and determine the upper limit for the number of fish. (0/0/2)

Part D	Problems 18–25 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of an oral part (Part A) and three written parts (Part B, Part C and Part D). Together they give a total of 67 consisting of 24 E-, 24 C- and 19 A-points.

Level requirements for test grades
E: 17 points
D: 26 points of which 8 points on at least C-level
C: 34 points of which 14 points on at least C-level
B: 44 points of which 6 points on A-level
A: 53 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures and show how you use your digital resources.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

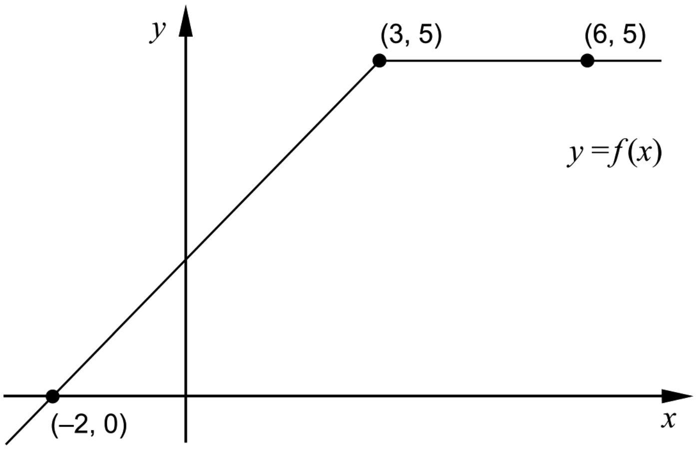
Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

18. A geometric sum is given by $3+3\cdot 1.2+3\cdot 1.2^2+3\cdot 1.2^3+...$
Determine the smallest number of terms in order for the sum to *exceed* 6 000 000 (2/0/0)

19. The figure shows the graph of a function *f*. The graph passes through the three marked points.



Evaluate $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$. (2/0/0)

20. The price of a certain UHD TV today is SEK 33 700 but the price rapidly decreases. The value of the TV can be described by the model
$V(t)=33\,700\,e^{-0.034\cdot t}$
where $V(t)$ is the value of the TV in SEK and t is the time in months after the purchase.

a) Determine after how many months the value of the TV is SEK 20 000 (2/0/0)

b) Determine at what time the decrease in value (in SEK/month) is half the size of the decrease in value at the purchase. (0/2/0)

21. The following conditions are valid for the two variables x and y:

$$\begin{cases} 2y - x \le 900 \\ y + 2x \ge 1000 \\ x \le 350 \end{cases}$$

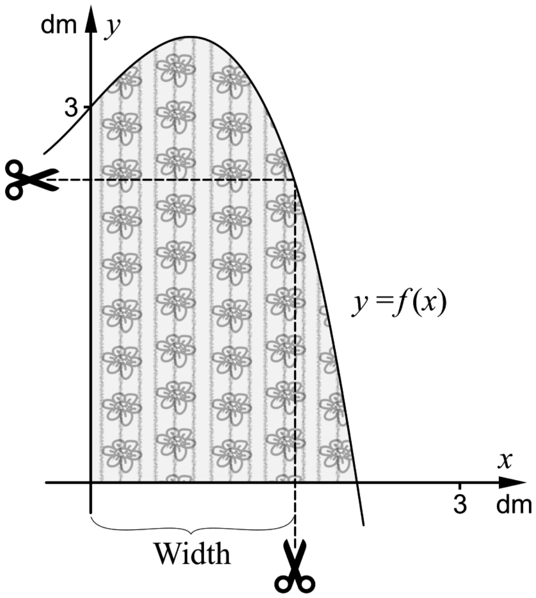
Determine the largest and the smallest value that the function $V = 500x - 200y$ can assume. (0/4/0)

22. Albin's weight can be described by the function
$V(t) = 0.10\,t^3 - 1.23\,t^2 + 6.51\,t + 3.72$
where the weight V kg is a function of the time t years after his birth. The function is valid for the first six years of his life.

The velocity at which Albin's weight increases varies. Determine what values the velocity can assume during Albin's first six years in life. (0/0/2)

23. It holds for the polynomial function f that $f'(x) > 0$ for all x. Determine the number of real solutions to the equation $f(x) = 0$ (0/0/2)

24. Sam and Sofia have been given spare pieces of fabric from a furniture factory. The pieces have a rounded side that can be described by the curve $y = -0.5x^3 + x + 3$



They have planned to cut both rectangular and quadratic napkins and want each piece of fabric to suffice for one napkin. They have planned to use the straight edges as sides of the napkins. See figure.

Sam and Sofia want the napkins to have as large area as possible.

a) Determine the width of the *rectangular* napkins so that the area is as large as possible. Answer in dm accurate to two decimal places. (0/2/0)

b) Determine the side of the *quadratic* napkins so that the area is as large as possible. Answer in dm accurate to two decimal places. (0/0/3)

25. It holds for the function *f* that $f(x) = x^3 + kx^2 + 2.9kx$
where the constant $k > 0$
The graph of the function has a saddle point for a certain value of *k*.

Determine this value of *k*. (0/0/3)

To the student – information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates or your teacher and use your textbook for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting the problem and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present only a few of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is
Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution
Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question *"How?"* and an explanation answers the question *"Why?"*. You describe something when you for instance tell how you have done a calculation. You explain something when you for instance justify why you could use a certain formula.

How well you use mathematical terminology
In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like "exponent", "function" and "graph".
An example of a mathematical expression is that x^2 is read "x to the power 2" or "x squared". Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read "pi" and "f of x".

Problem 1

Name: ____________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

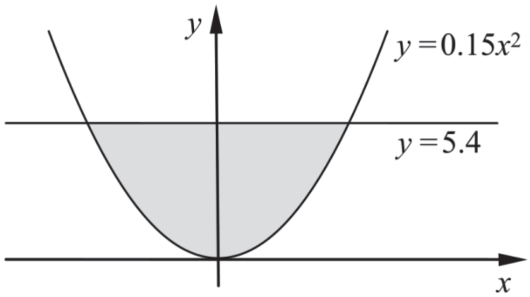
1. The graph of $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ has three extreme points. Use the derivative to determine the coordinates and characters of these.

Problem 2

Name: ____________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

2. The curve $y = 0.15x^2$ and the line $y = 5.4$ enclose a region which is marked grey in the figure. Calculate the area of the region.



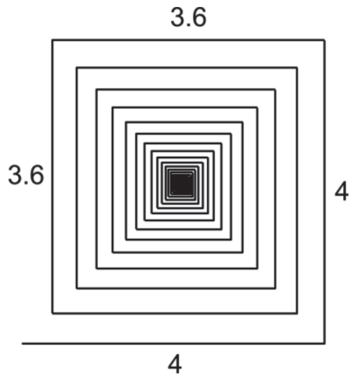
Problem 3

Name: ____________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

3. The figure shows a “square helix” consisting of 60 line segments that, in pairs, are of equal length. The lengths of the line segments gradually decrease by 10%. See figure.



In the first pair, the length of each line segment is 4 length units.
In the second pair, the length of each line segment is 3.6 length units.
In the third pair, the length of each line segment is 3.24 length units.

a) Calculate the length of the final line segment.

b) Calculate the total length of the helix.

Problem 4

Name: ____________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration
- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

4. It holds for the function f that $f(x) = x^2 + x - 20$
The curve has a tangent at the point where the curve intersects the positive x-axis.
Calculate where this tangent intersects the y-axis.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehållsförteckning

Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 3b. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 5).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3b

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av…	+1 E_P
Godtagbar verifiering av…	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. …	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. …	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. …
1 E_R	1 E_R och 1 C_R	1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL
Termer	t.ex. polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm, geometrisk summa, olikhet
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, formeln för geometrisk summa
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar $\left(F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 8x + C \right)$	+1 E_P
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (2 m/s)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (B: diskret funktion)	+1 E_B
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (B: $y + 0,5x \leq 1$)	+1 E_B
5.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 25x^4 + 2x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar $\left(f'(x) = \dfrac{4e^{4x}}{3} \right)$	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($f'(x) = x^{-1,5}$)	+1 C_P

6.		**Max 0/2/0**
	Korrekt svar ($A=-5$)	+1 C_B
	Korrekt svar ($B=50$)	+1 C_B
7.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (E)	+1 C_B
8.		**Max 0/2/1**
a)	Korrekt svar $\left(\dfrac{1}{x-5}\right)$	+1 C_P
b)	Korrekt svar ($-17x^4$)	+1 C_P
c)	Korrekt svar ($(A+5)^9-1$)	+1 A_P
9.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (4)	+1 C_B
10.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (1,5)	+1 A_B
11.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar ($x=4,5$)	+1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

12. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14) +1 E_P

13. **Max 3/3/0**

a) Godtagbar ansats, tecknar en ändringskvot, t.ex. $\frac{6-22}{4}$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-4\,°C/h$) +1 E_B

b) Godtagbar ansats, beräknar riktningskoefficienten korrekt och påbörjar en tolkning där det framgår att det handlar om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt +1 C_B

med i övrigt godtagbar tolkning, inklusive korrekt enhet och tidpunkt, där det även framgår att temperaturen minskar +1 C_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

c)

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang som leder till slutsatsen att temperaturen inte kan bli $3\,°C$. Resonemanget inkluderar ett *påstående* om att ekvationen $3 = 17e^{-0,7x} + 5$ inte går att lösa *eller* den lägsta temperaturen är $5\,°C$. 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang som leder till slutsatsen att temperaturen inte kan bli $3\,°C$. Resonemanget inkluderar en *motivering* till varför ekvationen $3 = 17e^{-0,7x} + 5$ inte går att lösa *eller* den lägsta temperaturen är $5\,°C$. 1 E_R och 1 C_R	

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

14. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställen, $x_1 = 1, \; x_2 = 3$ +1 E_P

med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater, $(1,\,4)$ och $(3,\,0)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär
(maximipunkt $(1,\,4)$ och minimipunkt $(3,\,0)$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

15. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats till enkelt resonemang, t.ex. påbörjar algebraisk lösning av ekvationen $(2x-1)(x^2+4)=0$ och finner den reella lösningen $x = 0{,}5$ +1 E_R

med godtagbart slutfört resonemang, drar slutsatsen att påståendet inte stämmer eftersom ekvationen $x^2+4=0$ inte ger reella lösningar +1 E_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

16. **Max 0/2/1**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer korrekt primitiv funktion,
$F(x) = \frac{kx^2}{2} + mx$ + 1 C_P

Godtagbar välgrundad slutsats om värdet på *m* + 1 C_R

Godtagbar välgrundad och nyanserad slutsats om värdet på *k* + 1 A_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

17. **Max 0/1/2**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar (3000) +1 C_M

b) Godtagbar lösning med korrekt svar (5000) +1 A_M

med insikt om att ett gränsvärde söks och med formellt korrekt bestämning av detta gränsvärde +1 A_B

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

Instruktioner för bedömning av delprov D

18. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $3\left(\dfrac{1,2^n - 1}{1,2 - 1}\right) = 6\,000\,000$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (71) +1 E_{PL}

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, tecknar ett uttryck som motsvarar en del av eller hela integralens värde, t.ex. $3 \cdot 5$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (27,5) +1 E_{PL}

Kommentar: Även svaret 27,5 a.e. anses godtagbart i denna uppgift.

20. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp ekvationen $33\,700\,\mathrm{e}^{-0,034 \cdot t} = 20\,000$ +1 E_{M}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (15 månader) +1 E_{M}

b) Godtagbar ansats, t.ex. deriverar $V(t)$ och beräknar $V'(0)$ +1 C_{M}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 månader) +1 C_{M}

Kommentar: En lösning i b)-uppgiften som utan kommentar eller förklaring utgår från ekvationen $33\,700\,\mathrm{e}^{-0,034 \cdot t} = \dfrac{33700}{2}$ ges noll poäng.

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

21. **Max 0/4/0**

Godtagbar ansats, t.ex. identifierar vilket område som ska undersökas +1 C_{PL}

med godtagbar bestämning av de relevanta skärningspunkterna (350, 625), (220, 560) och (350, 300) +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex. ”Minsta värdet är –2000 och största värdet är 115000.”) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_{K}

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

22. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionens derivata ska undersökas, t.ex. genom att använda att $V''(t) = 0$ och teckna ekvationen $0,6t - 2,46 = 0$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning, där $V'(4,1)$, $V'(0)$ och $V'(6)$ undersöks, med godtagbart svar ("Mellan 1,5 kg/år och 6,5 kg/år.") +1 A_M

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

23. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat generellt och nyanserat resonemang genom att konstatera att positiv derivata innebär att funktionen är (strängt) växande +1 A_R

med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (En reell lösning) +1 A_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

24. **Max 0/2/3**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar areafunktionen $A(x) = x(-0,5x^3 + x + 3)$ +1 C_M

med godtagbar grafisk/numerisk bestämning av sidlängden inklusive verifiering av maximum (1,43 dm) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $-0,5x^3 + x + 3 = x$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,82 dm) +1 A_M

Lösningen (till deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

25. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. sätter diskriminanten lika med noll i ekvationen $f'(x)=0$ *eller* tecknar ekvationssystemet $\begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)=0 \end{cases}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($k=8,7$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 13b

Elevlösningsexempel 13b.1 (0 poäng)

$k = \frac{6-0}{3-5} = -3$ vilket betyder att under andra timmen minskar temperaturen med 3°C i timmen

Bedömningskommentar till exemplet: Tolkningen motsvarar en ändringskvot och inte en derivata. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 13b.2 (1 C_B)

riktningskoeff $k = \frac{-15}{5} = -3$°C Då det gått 2 timmar minskar temperaturen med 3°C

Bedömningskommentar till exemplet: Det framgår att det rör sig om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt vilket ger en begreppspoäng på C-nivå. Däremot är inte tolkningen korrekt eftersom temperaturändringen anges med fel enhet.

Elevlösningsexempel 13b.3 (1 C_B och 1 C_M)

tangentens $k = \frac{12-3}{1-4} = -\frac{9}{3} = -3$

När två timmar gått så minskar temperaturen med −3°C per timme!

Bedömningskommentar till exemplet: Det framgår att det rör sig om en temperaturförändring vid en viss tidpunkt vilket ger en begreppspoäng på C-nivå. Tolkningen är dock inte helt korrekt eftersom ordet ”minskar” används samtidigt med det negativa uttrycket ”-3 $°C$ per timme”. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för en begreppspoäng på C-nivå samt nätt och jämnt kraven för en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 13b.4 (1 C_B och 1 C_M)

(1,12) och (4,3) Då klockan är 14 ändras

$k = \frac{3-12}{4-1} = \frac{-9}{3} = -3$ den med $-3°/h$

Bedömningskommentar till exemplet: Det framgår att det rör sig om en minskning eftersom ändringen anges som negativ, ” $-3° / h$ ”. Enheten är inte angiven i Celsius och det framgår inte tydligt att det rör sig om en temperaturförändring eftersom ordet ”den” används istället för temperaturen. Sammantaget bedöms elevlösningen uppfylla kraven för en begreppspoäng på C-nivå samt nätt och jämnt kraven för en modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 13c

Elevlösningsexempel 13c.1 (0 poäng)

$17e^{-0,7x}+5=3$

$17e^{-0,7x}=-2$

$e^{-0,7x}=-2/17$

$-0,7x=\ln -2/17$

$x=\ln -2/17/-0,7$

Ja, när x är detta är temperaturen 3°

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en felaktig slutsats och ges därmed noll poäng.

Elevlösningsexempel 13c.2 (1 E_R)

$T(x)=17e^{-0,7x}+5$

Nej, tempen kan inte bli 3 grader för den lägsta är 5°. Det syns i formeln.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på påståendet att det ”syns i formeln” att ”den lägsta är $5\,°C$ ”. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13c.3 (1 E_R och 1 C_R)

$3 = 17e^{-0,7x} + 5$

$-2 = 17e^{-0,7x}$

negativ alltid positiv

Svaret är nej!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på en välgrundad motivering. Elevlösningen ges båda resonemangspoängen.

Elevlösningsexempel 13c.4 (1 E_R och 1 C_R)

$T(x) = 17e^{-0,7x} + 5$

När x-et går mot stora tal kommer T

att bli 5° så T kan inte va 3°

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder till en godtagbar slutsats och baseras på en välgrundad motivering (även om den inte är helt formellt korrekt). Elevlösningen ges båda resonemangspoängen.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (2 E_P och 1 C_K)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$0 = 3x^2 - 12x + 9$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm 1$

$x_1 = 3$ och $x_2 = 1$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 \Rightarrow$ Maximipunkt

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 \Rightarrow$ Minimipunkt

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$ och $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$

Koordinaterna är (3,0) och (1,4)

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt när det gäller derivatans nollställen och extrempunkternas koordinater. Eftersom slutsatserna av verifieringen är felaktiga uppfylls inte kraven för den tredje procedurpoängen på E-nivå. När det gäller kommunikation bedöms uppgiften vara behandlad i sin helhet och i huvudsak korrekt. Kraven för kommunikation på C-nivå anses vara uppfyllda trots att ett sammanfattat svar saknas. Sammantaget ges elevlösningen de två första procedurpoängen på E-nivå samt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{2^2} - 3$

$x_1 = 2 + 1 = 3$

$x_2 = 2 - 1 = 1$

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$

$f(1)\ \ 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$

SVAR: (1,4) är en maxpkt & (3,0) är en minpkt

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att det felaktiga skrivsättet ” $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ ” används, att rottecknet inte omfattar hela uttrycket och att de beräkningar som ligger bakom teckenschemat inte redovisas. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (0 poäng)

Nej, hon har inte rätt eftersom $(2x-1)(x^2+4) = 0$ bara har en lösning som är reell

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt slutsats utan motivering. Det framgår inte att den reella lösningen är $x = 0,5$ därmed anses inte kraven för en godtagbar ansats vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 15.2 (1 E_R)

$(2x-1)(x^2+4) = 0$

$2x - 1 = 0 \quad\quad x^2 + 4 = 0$

$x = 0,5 \quad\quad x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Maja har rätt!!!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats där den reella lösningen $x = 0,5$ är funnen. Lösningen av ekvationen $x^2 + 4 = 0$ är felaktig. Elevlösningen uppfyller kraven för den första resonemangspoängen.

Elevlösningsexempel 15.3 (2 E_R)

$(2x-1)(x^2+4)$

$x=0,5 \quad (2\cdot 0,5-1)(0,25+4)=0$

Det hade funnits fler lösningar om ekvationen var $(2x-1)(x^2-4)$ men det var den inte

Svar: Nej, det finns bara en reell lösning, $x=0.5$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar insikt om vad som ska gälla för att ekvationen ska ha tre reella lösningar. Trots att det saknas en tydlig förklaring till varför $x^2+4=0$ inte ger reella lösningar anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för två resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (1 C_P och 1 C_R)

$f(x)=kx+m$

$$\int_{-2}^{2}(kx+m)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2}+mx\right]_{-2}^{2} = \frac{k\cdot 2^2}{2}+m\cdot 2-\left(\frac{k\cdot(-2)^2}{2}-2m\right)=$$

$= 2k+2m-2k+2m = 4m = 4 \quad , \; m=1$

$k=2 \quad \int_{-2}^{2}(2x+1)\,dx = \left[\frac{2x^2}{2}+x\right]_{-2}^{2} = 4+2-(4-2)=4$

$k=-5 \quad \int_{-2}^{2}(-5x+1)\,dx = \left[-5\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{2} = -5\cdot 2+2-(-5\cdot 2-2)=4$

$k=0 \quad \int_{-2}^{2}1\,dx = \left[x\right]_{-2}^{2} = 2-(-2=4$

Alltså $m=1$ och k kan vara allt möjligt!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför $m=1$ men ingen välgrundad motivering till varför k kan anta alla värden, eftersom endast specialfall undersöks. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (1 C_P och 1 C_R)

$f(x) = kx + m$

$$\int_{-2}^{2} (kx+m)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2} + mx\right]_{-2}^{2} = 2k + 2m - (2k - 2m) = 4m = 4$$

SVAR: $m = 1$ och k kan vara vad som helst!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför $m = 1$ men ingen motivering till varför k kan anta alla värden. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.3 (1 C_P, 1 C_R och 1 A_R)

$f(x) = kx + m$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (kx+m)\,dx = \left[0{,}5kx^2 + mx\right]_{-2}^{2} =$$

$$= F(2) - F(-2) = (0{,}5k \cdot 4 + 2m) - (0{,}5k \cdot 4 - 2m) =$$

$$= 2k + 2m - 2k + 2m = 2m + 2m = 4m$$

$4m = 4$

$m = 1$

Eftersom k kan förenklas bort i integralen, kan k anta alla värden och m måste vara 1.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar korrekta välgrundade slutsatser om k och m.

Uppgift 17b

Elevlösningsexempel 17b.1 (1 A_M)

$N(t) = \dfrac{15000}{3+2e^{-0,5t}}$

Om t blir stort kommer $2e^{-0,5t}$ att bli noll. Då blir fiskantalet $\dfrac{15000}{3+0} = \boxed{5000}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar att den övre gränsen är 5000 fiskar, vilket uppfyller kraven för modelleringspoängen på A-nivå. Lösningen är dock inte formellt korrekt vid gränsvärdesbestämningen, eftersom det inte framgår att $e^{-0,5t}$ *går mot* noll då *t går mot* oändligheten. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för begreppspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 17b.2 (1 A_M och 1 A_B)

$N(t) = \dfrac{15000}{3+2e^{-0,5t}}$

Då $t \to \infty$ kommer nämnaren att $\to 3$

$\dfrac{15000}{3} = 5000$ SVAR 5000 fiskar

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen framgår att ett gränsvärde söks och bestämningen av detta är formellt korrekt även om lösningen är kortfattad. Elevlösningen ges både modelleringspoängen samt nätt och jämnt begreppspoängen på A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (2 E_M)

a) $V(t) = 33700e^{-0{,}034t}$

$20000 = 33700e^{-0{,}034t}$

$\frac{20000}{33700} = e^{-0{,}034t}$

$\ln\left(\frac{20000}{33700}\right) = -0{,}034t$

$t = \frac{\ln\left(\frac{20000}{33700}\right)}{-0{,}034}$

$t \approx 15$

SVAR: 15 mån efter inköpet

b) $\frac{33700}{2} = 33700e^{-0{,}034t}$

$0{,}5 = e^{-0{,}034t}$

$\ln 0{,}5 = -0{,}034t$

$t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}034}$

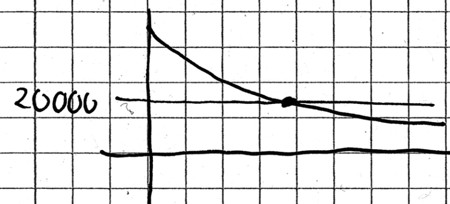
$t = 20$

SVAR: 20 mån efter inköpet

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt löst a)-uppgift vilket ger två modelleringspoäng på E-nivå. I b)-uppgiften ges ingen kommentar om varför den tecknade ekvationen kan ge ett korrekt svar, vilket ger noll poäng. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 20.2 (2 E_M och 2 C_M)

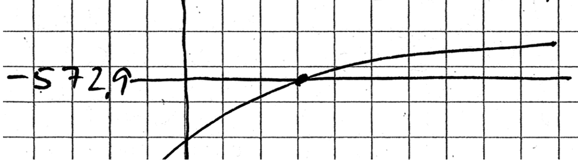
a) $3370 0e^{-0{,}034t} = 20000$



Intersect $t = 15{,}3$ mån

b) $V'(t) = -1145{,}8e^{-0{,}034t}$

$V'(0) = -1145{,}8$ $\quad V'(0)/2 = -572{,}9$



Intersect $t = 20{,}4$ mån

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en knapphändig men godtagbar lösning till de båda deluppgifterna där digitala hjälpmedel använts. Trots lösningens knapphändighet anses den nätt och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på E-nivå och två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

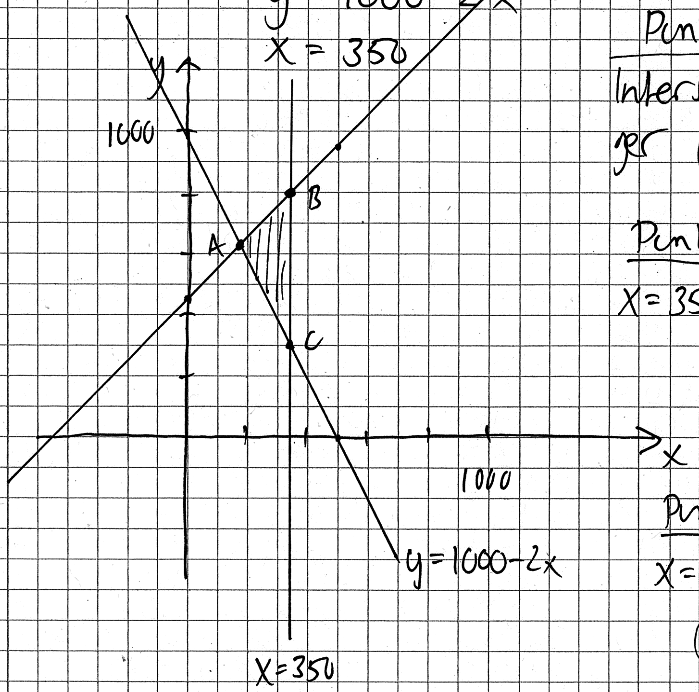
$$\begin{cases} 2y - x \leq 900 \\ y + 2x \geq 1000 \\ x \leq 350 \end{cases}$$

$V = 500x - 200y$

Linjerna $y = x + 450$

$y = 1000 - 2x$

$x = 350$



Punkten A

Intersect på räknaren

ger $(183{,}33\ldots,\ 633{,}33\ldots)$

Punkten B

$x = 350 \quad y = x + 450$

$(350,\ 800)$

Punkten C

$x = 350 \quad y = 1000 - 2x$

$(350,\ 300)$

Största och minsta värde

$V = 500x - 200y$

$(183{,}33\ldots,\ 633{,}33)$ $\quad V = 500 \cdot 183{,}3\ldots + 200 \cdot 633{,}33 = -35001$

$(350,\ 800)$ $\quad V = 500 \cdot 350 - 200 \cdot 800 = 15000$

$(350,\ 300)$ $\quad V = 500 \cdot 350 - 200 \cdot 300 = 115000$

SVAR: Största värdet: 115000

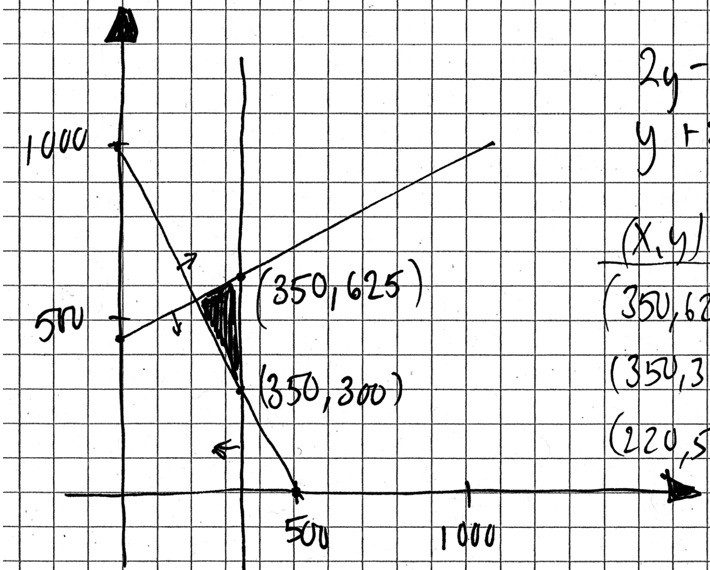
Minsta värdet: −35001

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt förutom i inledningen ($y = x + 450$). Detta fel får till följd att minsta värdet blir felaktigt. Felet anses inte förenkla komplexiteten i den fortsatta lösningen och därmed ges elevlösningen den andra och tredje problemlösningspoängen, men inte den första (följdfel, se sid. 4). När det gäller kommunikation anses uppgiften, trots felet i inledningen, vara löst i sin helhet. Lösningen anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (3 C_{PL} och 1 C_K)

$$\begin{cases} 2y - x \le 900 \\ y + 2x \ge 1000 \\ x \le 350 \end{cases}$$

$V = 500x - 200y$



$2y - x = 900$
$y + 2x = 1000$

intersect ger att linjerna skär i (220,560)

(x,y)	$V = 500x - 200y$
(350,625)	= 50000
(350,300)	= 115000 — störst!
(220,560)	= −2000 — Minst!

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. Därmed uppfylls kraven för tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad samt möjlig att följa och förstå, trots att redovisningen av två av skärningspunkterna saknas och att lösningen är allmänt kortfattad. Elevlösningen anses nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (1 A_M)

$V(t) = 0{,}10t^3 - 1{,}23t^2 + 6{,}51t + 3{,}72$

$V'(t) = 0{,}30t^2 - 2{,}46t + 6{,}51$

t	$V'(t)$
0	$= 0{,}30 \cdot 0^2 - 2{,}46 \cdot 0 + 6{,}51 \approx 6{,}51$
1	$= 0{,}30 \cdot 1^2 - 2{,}46 \cdot 1 + 6{,}51 \approx 4{,}35$
2	$= 0{,}30 \cdot 2^2 - 2{,}46 \cdot 2 + 6{,}51 \approx 2{,}79$
3	$= 0{,}30 \cdot 3^2 - 2{,}46 \cdot 3 + 6{,}51 \approx 1{,}83$
4	$= 0{,}30 \cdot 4^2 - 2{,}46 \cdot 4 + 6{,}51 \approx 1{,}47$
5	$= 0{,}30 \cdot 5^2 - 2{,}46 \cdot 5 + 6{,}51 \approx 1{,}71$
6	$= 0{,}30 \cdot 6^2 - 2{,}46 \cdot 6 + 6{,}51 \approx 2{,}55$

Viktens ändringshastighet kan vara

$1{,}47 \leq V'(t) \leq 6{,}51$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar insikt om att derivatans största och minsta värde ska undersökas. Lösningen visar hur ett närliggande värde till derivatans nollställe, $x = 4$, erhålls med hjälp av heltalsprövning. Denna prövning styrker dock inte att det endast finns ett nollställe till derivatan i det aktuella intervallet och inte heller att ett nollställe verkligen hittats. Därmed finns ingen grund för slutsatsen $1,47 \leq V'(t) \leq 6,51$*. Sammantaget ges elevlösningen första modelleringspoängen på A-nivå.

* Däremot, om prövningen varit mer systematisk kring $x = 4$, minimum då $x = 4,1$ styrkts genom diskussion om symmetriegenskaper hos andragradsfunktionen V' och lösningen i övrigt varit godtagbar skulle två modelleringspoäng på A-nivå kunna erhållas.

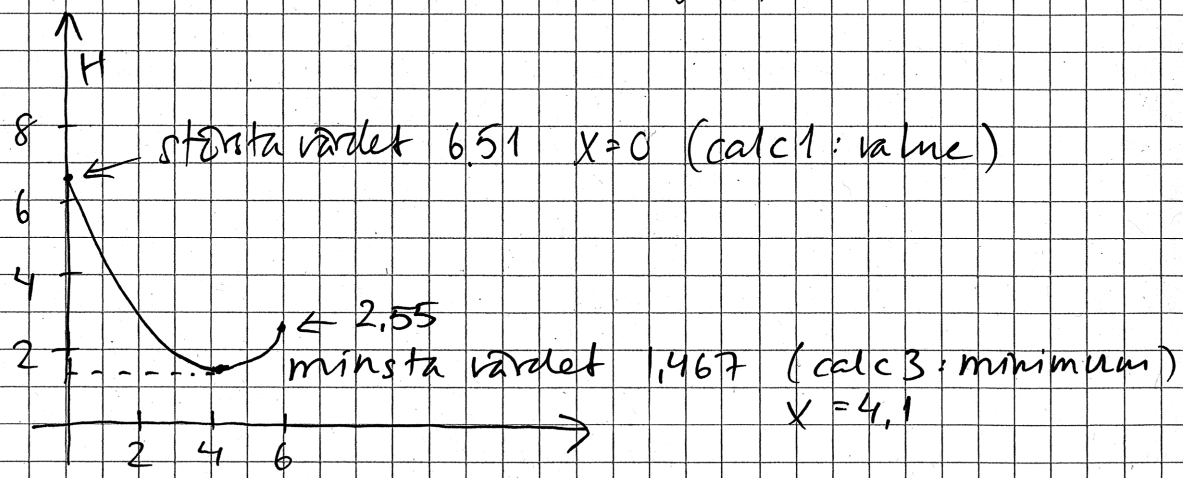
Elevlösningsexempel 22.2 (2 A_M)

$U(t) = 0{,}10t^3 - 1{,}23t^2 + 6{,}51t + 3{,}72$

Hastigheten på vikten är

$H(t) = 0{,}30t^2 - 2{,}46t + 6{,}51$

På räknaren ritar jag grafen $H(t)$



Hastigheten på vikten varierar mellan 1,467 kg/år och 6,51 kg/år

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas hur ändringshastigheten undersöks på grafräknaren. Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka tre värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknaren. Funktionsvärdet 2,55 är inte nödvändigt att bestämma då figuren tydligt visar det största och minsta värdet inom det aktuella intervallet. Elevlösningen ges två modellringspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösningsexempel 23.1 (0 poäng)

Om $f(x) = 2x + 4$ är $f'(x) = 2$ dvs > 0 för alla x

$2x + 4 = 0$

$x = -2$

alltså finns bara en reell lösning då $f'(x) > 0$

Bedömningskommentar till exemplet: Eftersom slutsatsen baseras på ett specialfall och inte en generell behandling ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 23.2 (1 A_R)

Om grafen aldrig har negativ
lutning $(= f'(x) > 0)$ så kan den
bara skära x-axeln $(f(x) = 0)$ max en
gång, eftersom efter den skurit
x-axeln så kommer värdet bara
att öka (grafen går uppåt).

Bedömningskommentar till exemplet: Av elevlösningen framgår att positiv derivata innebär att funktionen är växande. Däremot påstås att grafen skär x-axeln ”max en gång”, vilket är felaktigt, och det framgår inte tydligt att ekvationen $f(x) = 0$ har en reell lösning. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den första resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 23.3 (2 A_R)

$f'(x) > 0$ för alla x

$\downarrow$

Om $f'(x) > 0$ så är $f(x)$ bara växande.
$\Rightarrow$ Alltså inga max- eller minpunkter.
Ingen terrasspunkt heller. Då finns det
en reell lösning för $f(x) = 0$ och det är där
funktionen skär x-axeln.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen ges ett resonemang som leder fram till den korrekta slutsatsen att ekvationen har en reell lösning. Informationen ”Alltså inga max- eller minpunker. Ingen terrasspunkt heller.” är inte nödvändig för att resonemanget ska anses vara fullständigt men tydliggör resonemanget. Lösningen bedöms uppfylla kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C_M och 2 A_M)

a) $A = x \cdot y = x(-0{,}5x^3 + x + 3)$ där x är bredden

$A = -0.5x^4 + x^2 + 3x$

$A' = -2x^3 + 2x + 3$ $\quad A' = 0$

$0 = -2x^3 + 2x + 3$ Miniräknarens Equation

$x = 1{,}431.. \approx 1{,}43$

b) $A = x^2$ $\quad 2{,}179 > x > 0$

$x = y$

$x = -0{,}5x^3 + x + 3$

$0 = -0.5x^3 + 3$

$x \approx 1{,}817$

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) är godtagbar förutom att verifiering av maximum saknas och därmed ges den första modelleringspoängen på C-nivå men inte den andra. Lösningen till deluppgift b) är korrekt vilket ger två modelleringspoäng på A-nivå. Eftersom verifieringen saknas i deluppgift a) anses inte uppgiften vara löst i sin helhet och därmed bedöms inte kommunikation. Sammantaget ges elevlösningen en modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M, 2 A_M och 1 A_K)

a) Arean för servetterna blir xy

$y = -0.5x^3 + x + 3$

ins y i xy ger det

$x(-0{,}5x^3 + x + 3) = A$

$A = -0{,}5x^4 + x^2 + 3x$

Extrempunkterna är då $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x - 2x^3 + 3$

$0 = 2x - 2x^3 + 3$

Equation ger mig $x = 1{,}431$

Jag ritar upp $f'(x)$ på räknaren och ser att derivatan är negativ då $x = 1{,}43$, dvs. max!

SVAR: Bredden är 1,43 dm

b) Om servetterna ska vara kvadratiska innebär det att $y = x$ vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x \\ y = -0.5x^3 + x + 3 \end{cases}$$

$x = -0{,}5x^3 + x + 3$

$0 = -0{,}5x^3 + 3$

$x = \sqrt[3]{6}$

SVAR: Bredden är $\sqrt[3]{6}$ dm

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen till deluppgift a) och b) är korrekta och ges därmed två modelleringspoäng på C-nivå och två modelleringspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation anses lösningen vara lätt att följa och förstå förutom att variabeln *x* inte är definierad och att det inte tydligt framgår hur verifiering av maximum utförts på räknaren. I deluppgift b) anges svaret i exakt form vilket bedöms som godtagbart. Sammantaget anses elevlösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoängen på A-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (2 A_{PL})

$f(x) = x^3 + kx^2 + 2{,}9kx$

$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2{,}9k$

$f''(x) = 6x + 2k$

$(2)\quad 6x + 2k = 0$

$k = -3x$

sätt in i (1)

$$\begin{cases} 3x^2 + 2kx + 2{,}9k = 0 & (1) \\ 6x + 2k = 0 & (2) \end{cases}$$

$3x^2 + 2 \cdot -3x \cdot x + 2{,}9 \cdot -3x = 0$

$3x^2 - 6x^2 - 8{,}7x = 0$

$-3x^2 - 8{,}7x = 0$

$x^2 + 2{,}9x = 0$

$x = -\frac{2{,}9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}9}{2}\right)^2} = -\frac{2{,}9}{2} \pm \frac{2{,}9}{2}$

$x_1 = 0 \rightarrow k_1 = -3 \cdot 0 = 0$

$x_2 = -2{,}9 \rightarrow k_2 = -3 \cdot -2{,}9 = 8{,}7$

$k > 0$ bortse från ena roten

SVAR: $k = 8{,}7$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ett korrekt ekvationssystem som mynnar ut i ett korrekt svar. Därmed ges två problemlösningspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation är elevlösningen inte helt lätt att följa och förstå i inledningen eftersom det inte framgår varför andraderivatan sätts till noll. Parenteser runt negativa tal saknas. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2{,}9kx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 2{,}9k$$

$$3x^2 + 2kx + 2{,}9k = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}kx + \frac{2{,}9k}{3} = 0$$

$$x = -\frac{k}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^2 - \frac{2{,}9k}{3}}$$

Vid en terasspunkt har $f'(x)$ bara ett nollställe. Eftersom det bara ska finnas ett nollställe är

$$\sqrt{\left(-\frac{k}{3}\right)^2 - \frac{2{,}9k}{3}} = 0$$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{2{,}9k}{3}$$

$$k = 3 \cdot 2{,}9 = 8{,}7$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas ekvationen $f'(x) = 0$ och diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen av andragradsekvationen är felaktig då endast en lösning presenteras utan att det förklaras varför. Därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation anses uppgiften vara löst i sin helhet (trots den felaktiga ekvationslösningen) och är i övrigt lätt att följa och förstå eftersom det framgår varför diskriminanten sätts lika med noll. Lösningen är välstrukturerad och innehåller korrekt använda symboler. Kraven för kommunikationspoängen på A-nivå anses därmed vara uppfyllda.