Part B	Problems 1–11 which only require answers.
Part C	Problems 12–18 which require complete solutions.
Test time	120 minutes for part B and part C together.
Resources	Formula sheet and ruler.

The test consists of an oral part (part A) and three written parts (part B, part C and part D). Together they give a total of 65 points consisting of 23 E-, 22 C- and 20 A-points.

Level requirements for test grades
E: 17 points
D: 26 points of which 8 points on at least C-level
C: 33 points of which 14 points on at least C-level
B: 43 points of which 6 points on A-level
A: 51 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required* " you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

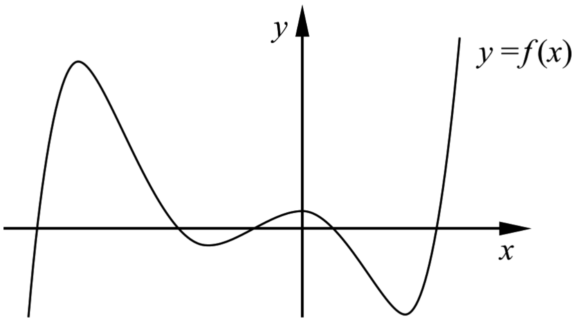
Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part B: Digital resources are not allowed. *Only answer is required*. Write your answers in the test booklet.

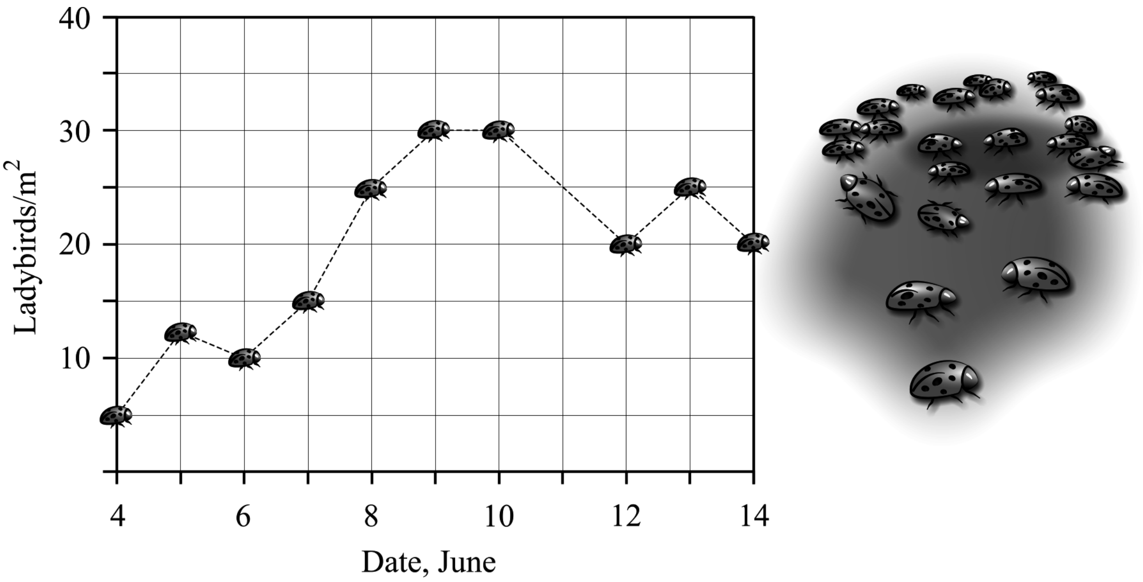
1. In the figure, the main features of the graph of the function f are shown.



How many real solutions does the equation $f(x) = 0$ have?

______________________ (1/0/0)

2. The diagram shows the number of ladybirds per square metre in a meadow during some days in June. Measurements were made at 12:00 on the days in question.



One of the alternatives A–E gives the period of time when the average rate of change in the number of ladybirds was at a maxium. Which one?

A. 4–14 June

B. 7–8 June

C. 6–10 June

D. 7–14 June

E. 9–10 June

______________________ (1/0/0)

3. For the function *f* it holds that $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$

a) Determine $f'(x)$. $f'(x) =$ ______________________ (1/0/0)

b) Determine $f'(1)$. $f'(1) =$ ______________________ (1/0/0)

c) One of the alternatives A–D is correct. Which one?

A. The graph of the function has a saddle point.

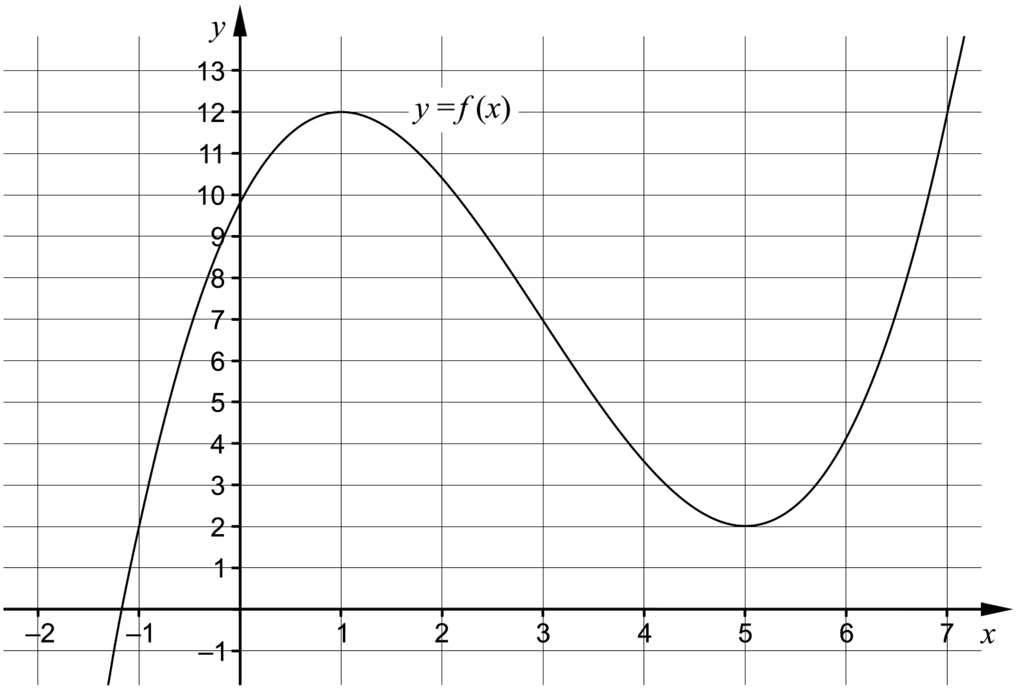
B. The graph of the function has a maximum.

C. The graph of the function has a minimum.

D. The graph of the function has an inflection point.

______________________ (1/0/0)

4. The figure shows the graph of the cubic function *f*.



Use the graph and state the values of *x* for which

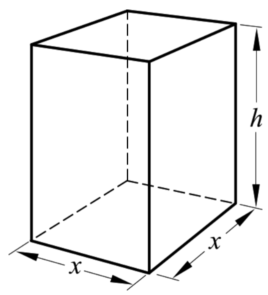
a) $f'(x) = 0$ ______________________ (1/0/0)

b) $f'(x) < 0$ ______________________ (0/1/0)

c) $f''(x) > 0$ ______________________ (0/0/1)

5. Determine $f'(x)$ if $f(x) = x\sqrt{x}$ $f'(x) =$ ______________________ (0/1/0)

6. The figure shows a rectangular box with a square base. The volume V of the rectangular box as a function of the side length x of the base is described by $V(x) = x^3 + 5x^2$



Determine the height h expressed in x.
Give your answer in simplified form. $h =$ ______________________ (0/1/0)

7. Determine the constant a so that the equation $4x^3 - ax = 0$ has the solutions $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ and $x_3 = -2$ ______________________ (0/1/0)

8. For which values of x is the expression $\dfrac{x^2 + 4x}{x - 3x^2}$ not defined? ______________________ (0/1/0)

9. The two first terms in a geometric sum are 2 and $-2k$.

What is the 300th term in the sum? ______________________ (0/1/0)

10. Guillaume l'Hospital was a French mathematician who lived in the late 17th century. He investigated limits, and found a mathematical rule that made it easier to calculate certain types of limits.

l'Hospital's rule:

The limit $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ is under certain conditions equal to $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Use l'Hospital's rule to determine the limit

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^9 - 1}$ ______________________ (0/1/0)

11. For a seventh degree polynomial function f it holds that:

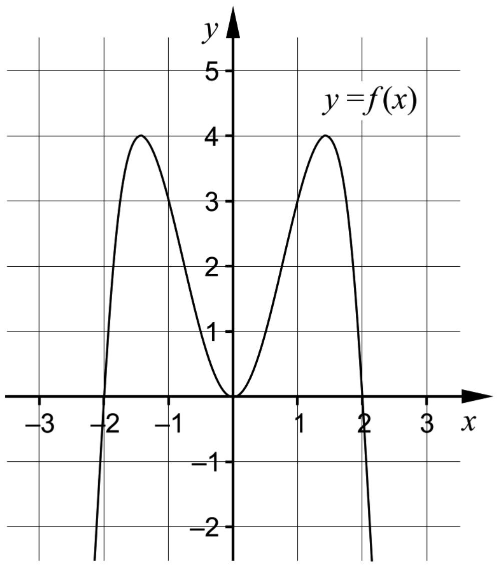
- The equation $f'(x) = 0$ has six distinct real solutions.
- The graph of f has no saddle point.
- One of the extremal points has a negative y-coordinate and the other extremal points have positive y-coordinates.

How many real solutions does the equation $f(x) = 0$ have?

______________________ (0/0/1)

Part C: Digital resources are not allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

12. For the function f it holds that $f(x) = 4x^2 - x^4 + A$ where A is a constant. The figure shows the graph of the function f when $A = 0$



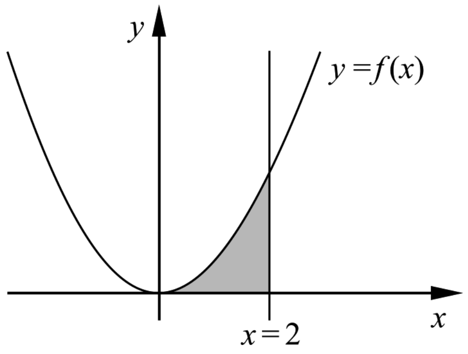
Sabina says:
– *The function always has three extreme points, regardless of the value of the constant A.*
Is Sabina right? Justify your answer. (1/0/0)

13. For the function f it holds that $f(x) = 3x^3 - 36x$
Use derivatives and determine the coordinates of any maximum, minimum and saddle points on the graph of the function.

Further, determine the type of extremum for each point, that is, if it is a maximum, a minimum or a saddle point. (3/1/0)

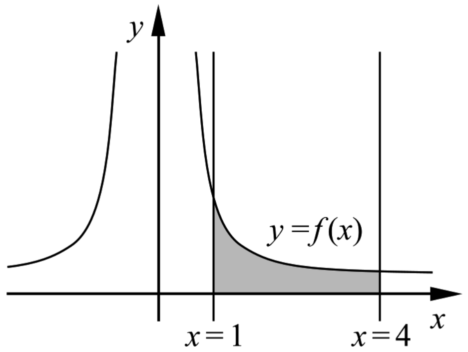
14. Calculate the area of the marked region algebraically if

a) the region is bounded by the x-axis, the graph of $f(x) = 9x^2$ and the line $x = 2$



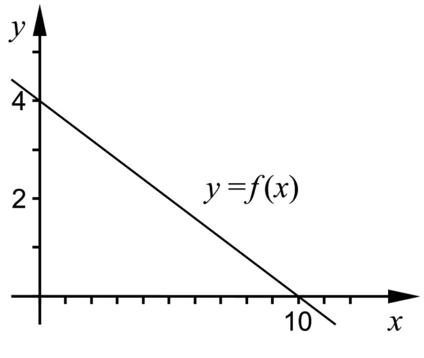
(2/0/0)

b) the region is bounded by the x-axis, the graph of $f(x) = \frac{3}{x^2}$ and the lines $x = 1$ and $x = 4$



(0/2/0)

15. The figure below shows the graph of a function f. The graph is a straight line.



The function f has an antiderivative F for which it holds that $F(0) = 5$
Determine $F(10)$. (0/2/0)

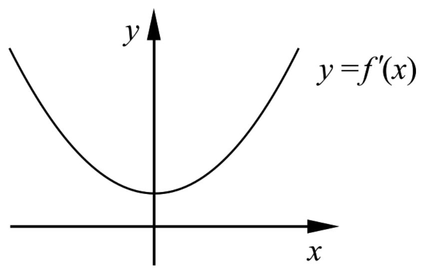
16. Simplify as far as possible.

a) $$\frac{(x-5)(x-5)}{5-x}+\frac{(5-x)(5-x)}{5-x}$$ (0/2/0)

b) $$\frac{(x-3)^7-(x-3)^6}{x-4}$$ (0/0/1)

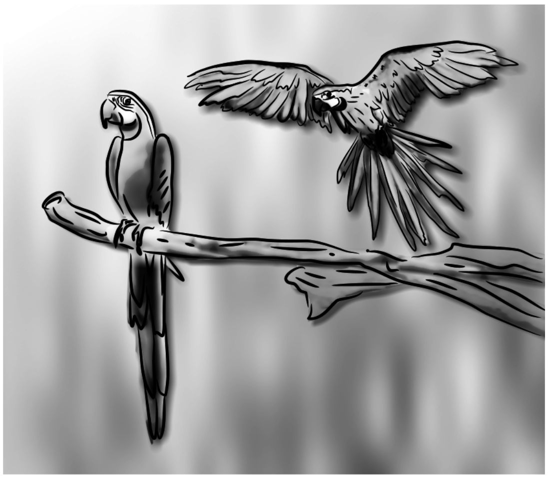
c) $$\frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}-e^{2x}\cdot e^{-2x}}$$ (0/0/1)

17. The derivative of the function f is $f'(x)=3x^2+1$, see figure.



Investigate how many real solutions the equation $f(x)=0$ has. (0/0/2)

18. At the start of the year 2015 there were 300 parrots of a certain species in a certain region. The parrots are endangered and therefore nature conservation workers are introducing more parrots of the same species into the area. An equal number of parrots are introduced at the start of each year, beginning in the year 2016.



According to a simplified model, the number of parrots P in the region can be described by the function

$P(x) = 300 \cdot 0.95^x - 20A(0.95^x - 1)$

where A is the number of parrots introduced each year and x is the time in years from the start of the year 2015.

Determine how many parrots should be introduced each year to make the number of parrots in the region eventually approach 500. (0/0/2)

Part D	Problems 19–27 which require complete solutions.
Test time	120 minutes.
Resources	Digital resources, formula sheet and ruler.

The test consists of an oral part (part A) and three written parts (part B, part C and part D). Together they give a total of 65 points consisting of 23 E-, 22 C- and 20 A-points.

Level requirements for test grades
E: 17 points
D: 26 points of which 8 points on at least C-level
C: 33 points of which 14 points on at least C-level
B: 43 points of which 6 points on A-level
A: 51 points of which 11 points on A-level

The number of points you can get for a complete solution is stated after each problem. You can also see what knowledge levels (E, C and A) you can show in each problem. For example (3/2/1) means that a correct solution gives 3 E-, 2 C- and 1 A-point.

For problems labelled "*Only answer is required*" you only have to give a short answer. For other problems you are required to present your solutions, explain and justify your train of thought and, where necessary, draw figures.

Write your name, date of birth and educational programme on all the sheets you hand in.

Name: ______________________________

Date of birth: ______________________________

Educational programme: ______________________________

Part D: Digital resources are allowed. Write down your solutions on separate sheets of paper.

19. Manufacturers of LED light bulbs claim that the lifespan of the light bulbs varies between 625 and 1000 days. To check whether this is correct, a test using 75 light bulbs is carried out. In the test, the number of light bulbs failing is investigated.

The number of light bulbs failing can, according to a simple model, be described by

$$L(t) = e^{0.00412 \cdot t} - 1$$

where $L(t)$ is the number of failed light bulbs and t is the time in days from the start of the test.

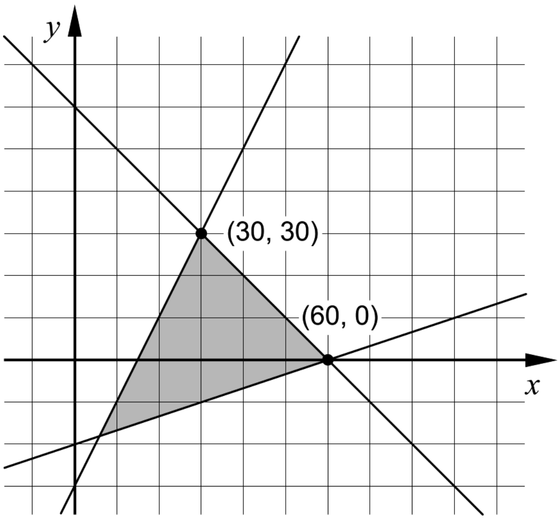
a) Will all lamps still be working after 625 days according to the model? Justify your answer. (1/0/0)

b) Using the model, determine how many days it will take before all of the light bulbs have failed. (2/0/0)

20. The graph of the function $f(x) = 5x^2 + 10$ has a tangent at the point where $x = 2$
The equation of the tangent may be written as $y = ax - 10$
Determine a. (2/0/0)

21. The figure shows a region marked in grey that can be described by the inequalities

$$\begin{cases} y \le 60 - x \\ y \ge \dfrac{x}{3} - 20 \\ y \le 2x - 30 \end{cases}$$



Determine the greatest value attained by $P = 5x - 8y + 30$ in the region marked in grey. (2/1/0)

22. The consumption of energy drinks in Sweden is increasing. According to a simplified model, the consumption can be described by the exponential function

$f(x) = 0.558 \cdot 1.16^x$

where $f(x)$ is the yearly consumption in litres per capita and x is the time in years, starting from December 31, in the year 2001. The model may be assumed to be valid in the interval $0 \le x \le 14$

Use the model to determine at which rate (expressed in litres/capita/year) the yearly consumption was increasing on December 31, in the year 2013. (0/2/0)

23. A secant passes through two points on the curve $y = x^2$. One of the points is (2, 4).

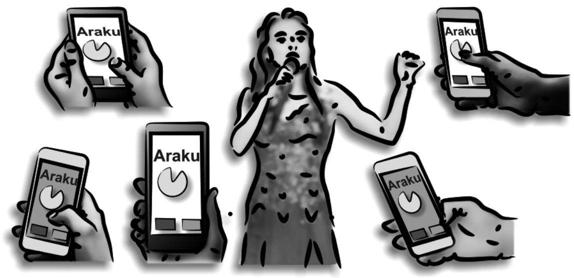
a) Claim:
All secants of the curve $y = x^2$ passing through the point (2, 4) have a positive slope.
Is the claim correct? Justify your answer. (1/0/0)

b) Determine the x-coordinate of the second point so that the slope of the secant will be exactly 20 (0/0/2)

24. In a certain music contest, votes are cast by text messaging. The relation

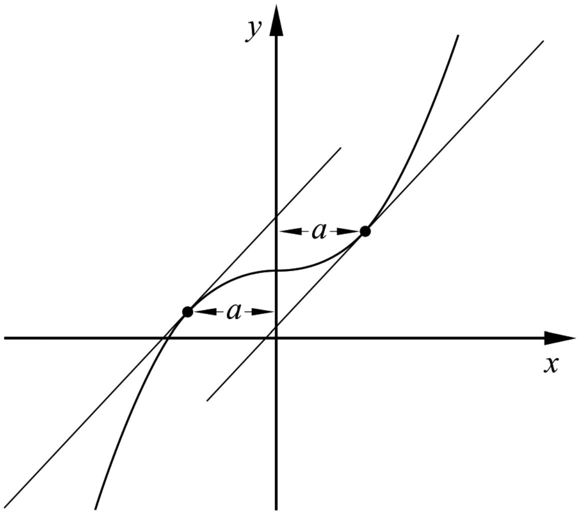
$r(x) = 200 - 0.003x^2$

describes the number of incoming votes by text message per second, x seconds after the voting has started.



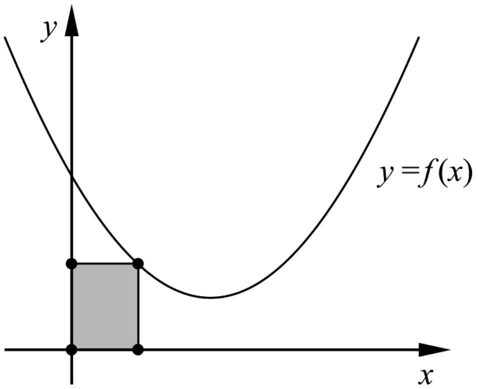
Voting is open for four minutes. Determine how many votes by text message were cast during the last minute. (0/2/0)

25. The figure shows the graph of the function f given by $f(x) = x^3 + 1$. In the figure, two tangents to the graph are also shown. The points of tangency lie on opposite sides of the y-axis and at the same distance a from the y-axis.



Assume that the tangents have slopes k_1 and k_2, respectively. Show that $k_1 = k_2$ regardless of how great the distance a is. (0/2/0)

26. In the figure the graph of $f(x)=x^2-45x+638.25$ is shown, together with a rectangle with one corner at the origin, two corners on the positive coordinate axes and one corner on the graph. No part of the rectangle is allowed to be above the graph.

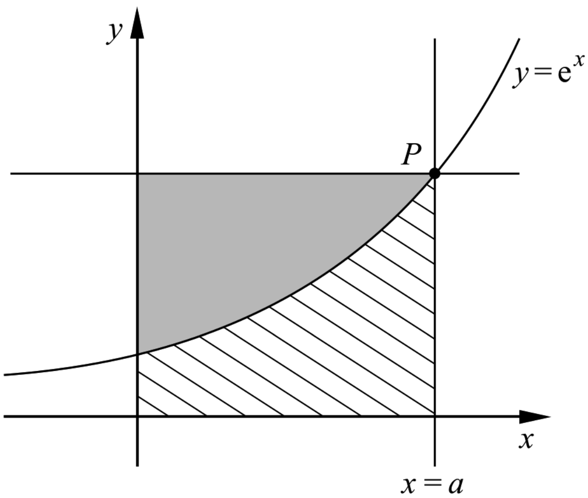


The area of the rectangle varies as the locations of the corners on the coordinate axes and on the graph vary. The area can be described by a function *A*, where *A* depends on *x*.

a) Determine the domain of the area function *A*. (0/0/1)

b) Determine the range of the area function *A*. (0/0/3)

27. In the figure, the curve $y=\mathrm{e}^x$ and two lines passing through the point *P* on the curve are shown. The lines are parallel to the coordinate axes and the point *P* has *x*-coordinate *a* where $a>0$



Determine *a* so that the area of the lineated region is the same as the area of the shaded region. Give your answer correct to three decimal places. (0/0/3)

To the student – information about the oral part

You will be given a problem that you will solve in writing, and then you will present your solution orally. If you need, you can ask your classmates or your teacher and use your textbook for help when solving the problem. Your oral presentation starts with you presenting the problem and then you describe and explain your solution. You must present all steps in your solution. However, if you have done the same calculation several times (for example in a table) it might be sufficient if you present only a few of the calculations. Your presentation should take a maximum of 5 minutes, and be held to a smaller group of your classmates and one or more teachers.

The problem given to you should, on the whole, be solved algebraically. You might need a calculator to do some of the calculations but, when presenting your solution, you should avoid referring to the use of your calculator for drawing graphs and/or symbolic handling (if that is the type of calculator you are using).

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use mathematical terminology.

How complete, relevant and structured your presentation is
Your presentation must contain the necessary parts in order for a listener to follow and understand your thoughts. What you say should be in a suitable order and be relevant. The listener must understand how calculations, descriptions, explanations and conclusions are connected with each other.

How well you describe and explain the train of thought behind your solution
Your presentation should contain both descriptions and explanations. To put it simple, a description answers the question *"How?"* and an explanation answers the question *"Why?"*. You describe something when you for instance tell how you have done a calculation. You explain something when you for instance justify why you could use a certain formula.

How well you use mathematical terminology
In your presentation you should use a language that contains mathematical terms, expressions and symbols suitable for the problem you have solved.

Mathematical terms are for example words like "exponent", "function" and "graph".
An example of a mathematical expression is that x^2 is read "x to the power 2" or "x squared". Some examples of mathematical symbols are π and $f(x)$, which are read "pi" and "f of x".

Problem 1

Name: ____________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

Calculate the area of the region bounded by the curve $y = x^2 - 6x + 14$, the line of symmetry of the curve, the line $x = 9$ and the x-axis.

Problem 2

Name: ____________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

The curve $y = x^4 - 4x^2 + 8$ has three extreme points.

- Use the derivative to determine the coordinates and the characteristics of these three extreme points.
- Use the extreme points to sketch the curve.

Problem 3

Name: ______________________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

A business owner is counting on the turnover increasing 5 % on average per year over a 10 year period. According to the business owner this means a total turnover of SEK 1 000 000 for the whole 10 year period.

a) Determine how large the turnover gets during the first year if the total turnover during the whole 10 year period is going to be SEK 1 000 000

b) Determine how much larger the turnover gets during the last year compared to the turnover during the first year.

Problem 4

Name: ______________________

When assessing your oral presentation, the teacher will take into consideration

- how complete, relevant and structured your presentation is,
- how well you describe and explain the train of thought behind your solution, and
- how well you use the mathematical terminology.

The curve $y = -x^2 + 4x + 6$ has a tangent at the point where $x = 4$

Determine the area of the region bounded by the tangent and the positive coordinate axes.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehållsförteckning

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 3b. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4) samt ett kapitel med instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3b

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. … $+1\ E_P$

med korrekt bestämning av… $+1\ E_P$

Godtagbar verifiering av… $+1\ E_P$

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. …	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. …	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. …
$1\ E_R$	$1\ E_R$ och $1\ C_R$	$1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL
Termer	t.ex. polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, rät linje, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm, geometrisk summa, olikhet
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, formeln för geometrisk summa
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (5)	+1 E_B
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (B: 7–8 juni)	+1 E_B
3.		**Max 3/0/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 6x - 6$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($f'(1) = 0$)	+1 E_P
c)	Korrekt svar (C: Grafen till funktionen har en minimipunkt.)	+1 E_B
4.		**Max 1/1/1**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($x = 1$ och $x = 5$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($1 < x < 5$)	+1 C_B
c)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($x > 3$)	+1 A_B
5.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($f'(x) = 1,5 \cdot x^{0,5}$)	+1 C_P
6.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($h = x + 5$)	+1 C_{PL}

7. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (16) + 1 C_{PL}

8. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($x_1 = 0$ och $x_2 = \frac{1}{3}$) +1 C_B

9. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($2 \cdot (-k)^{299}$) +1 C_B

10. **Max 0/1/0**

Korrekt svar $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ +1 C_B

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (3) +1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

12. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang som styrker att Sabina har rätt, t.ex. resonemang baserat på argumentet att värdet hos konstanten *A* endast påverkar grafens läge i *y*-led +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

13. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer derivatans nollställen, $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$ +1 E_P

med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater $(-2,\ 48)$ och $(2,\ -48)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär (maximipunkt $(-2,\ 48)$ och minimipunkt $(2,\ -48)$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

14. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar en integral som motsvarar arean, $\int_0^2 9x^2 \mathrm{d}x$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (24 a.e.) +1 E_P

Kommentar: Även ett svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

b) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $-3x^{-1}$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($2{,}25$ a.e.) +1 C_P

Kommentar: Även ett svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer den primitiva funktionen F på allmän form, $F(x) = -0{,}2x^2 + 4x + C$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (25) +1 C_{PL}

16. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, t.ex. inser att $(x-5) = -(5-x)$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($10-2x$) +1 C_P

b) Godtagbar lösning med korrekt svar ($(x-3)^6$) +1 A_P

c) Godtagbar lösning med korrekt svar (e^x) +1 A_P

17. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. drar slutsatsen att derivatan är positiv för alla värden på *x* +1 A_R

med ett i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang, där exempelvis den positiva derivatan används för att förklara varför ekvationen endast har en reell lösning +1 A_R

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"

18. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. inser att $\lim_{x \to \infty} P(x) = 500$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (25) +1 A_M

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"

Instruktioner för bedömning av delprov D

19. **Max 3/0/0**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar (t.ex. "Nej, 12 har slocknat.") +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $75 = e^{0,00412 \cdot t} - 1$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1051 dygn) +1 E_M

20. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, visar insikt om att tangenten går genom punkterna (2, 30) och (0, –10)
eller visar insikt om att $f'(2) = a$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 20$) +1 E_{PL}

21. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer det tredje hörnet $(6,-18)$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning, t.ex. där punkterna $(6,-18)$, $(60,0)$ och $(30,30)$ undersöks, med korrekt svar (330) +1 E_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer ett korrekt uttryck för $f'(x)$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,49) +1 C_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

23. **Max 1/0/2**

a) Godtagbart enkelt resonemang som baseras på insikten att sekanten skär andragradskurvan i två punkter och leder till slutsatsen att påståendet är felaktigt +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\dfrac{x^2-4}{x-2}=20$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (18) +1 A_{PL}

Kommentar: Även svaret (18, 324) godtas.

24. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar integralen $\displaystyle\int_{180}^{240}(200-0{,}003x^2)\,dx$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4 008 st) +1 C_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

25. **Max 0/2/0**

Godtagbar inledning till välgrundat resonemang, t.ex. inser att $f'(a)$ och $f'(-a)$ ska undersökas +1 C_R

med i övrigt välgrundat slutfört resonemang där det visas att $k_1 = k_2$ oavsett avståndet a +1 C_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

26. **Max 0/0/4**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($0 < x \leq 22,5$) +1 A_{PL}

Kommentar: Även svaret $0 \leq x \leq 22,5$ godtas.

b) Godtagbar ansats, tecknar areafunktionen korrekt *och* inser att derivatans nollställen ska undersökas eller inser att den övre intervallgränsen ska undersökas +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(0 < A(x) \leq 2970)$ +1 A_{PL}

Kommentar: Även svaren $0 \leq A(x) \leq 2970$, $0 \leq A \leq 2970$ och $0 < A \leq 2970$ godtas.

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

27. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\int_0^a e^x dx = \frac{a \cdot e^a}{2}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($a \approx 1,594$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 12

Elevlösningsexempel 12.1 (1 E_R)

Ja, Sabina har rätt då konstanten
A bara påverkar var minimipunkten
har sin y-koordinat

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang där det framgår att värdet på konstanten *A* endast påverkar minimipunktens läge i *y*-led. Resonemanget hade varit tydligare om det framgått att *hela grafen* förskjuts i *y*-led. Elevlösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 12.2 (1 E_R)

Ja hon har rätt. Extrempunkternas
x-koordinater fås när $f'(x)=0$
Eftersom A är en konstant deriveras inte
den, så $f'(x)$ är alltid $8x-4x^3$ oavsett A:s värde

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang. Frasen ”deriveras inte den” är felaktig men kompenseras av resonemanget på sista raden. Elevlösningen ges resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 13

Elevlösningsexempel 13.1 (1 E_P)

$f(x) = 3x^3 - 36x$

$f'(x) = 9x^2 - 36$

$f'(x) = 0$

$9x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$

	$\searrow$		$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
x		2	

$x = 2$; $f(2) = 3 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = -48$

Funktionen har ett min i punkten $(2, -48)$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms endast ett av derivatans nollställen vilket förenklar uppgiftens komplexitet. Eftersom resterande del av uppgiften löses godtagbart anses elevlösningen som helhet motsvara kraven för en godtagbar ansats. Elevlösningen ges den första procedurpoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.2 (2 E_P och 1 C_K)

$f'(x) = 9x^2 - 36$

$0 = 9x^2 - 36$

$0 = x^2 - 4$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$f''(x) = 18x$

$f''(2) = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow$ Maximipunkt

$f''(-2) = -18 \cdot 2 = -36 \Rightarrow$ Minimipunkt

$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = 3 \cdot 8 - 72 = -48$

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^3 - 36 \cdot (-2) = -24 + 72 = 48$

Svar: Koordinaterna är $(2, -48)$ och $(-2, 48)$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt när det gäller derivatans nollställen och extrempunkternas koordinater. Eftersom slutsatserna av verifieringen är felaktiga uppfylls inte kraven för den tredje procedurpoängen på E-nivå. När det gäller kommunikation är uppgiften behandlad i sin helhet, strukturerad samt möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen de två första procedurpoängen på E-nivå samt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 13.3 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = 3x^3 - 36x$

$f'(x) = 9x^2 - 36 = 0$

$9x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = 3 \cdot 8 - 72 = -48$

$f(-2) = 3 \cdot -2^3 - 36 \cdot -2 = 3 \cdot -8 + 72 = -24 + 72 = 48$

Punkterna är $(2, -48)$ och $(-2, 48)$

x	-10	-2	0	2	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$(-2, 48)$ är en maxpunkt

$(2, -48)$ är en minpunkt

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation används det felaktiga skrivsättet "$f'(x) = 9x^2 - 36 = 0$", parenteser runt negativa tal saknas och de beräkningar som ligger bakom teckenschemat redovisas inte. I övrigt är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 14a

Elevlösningsexempel 14a.1 (1 E_B och 1 E_P)

$F(x) = \frac{9x^3}{3} = 3x^3$

Arean $= F(2) - F(0) = 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 0^3 = 3 \cdot 8 = 24$

Svar 24 a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas en primitiv funktion där konstantterm saknas. I detta sammanhang anses lösningen godtagbar och ges sammantaget en begreppspoäng på E-nivå och en procedurpoäng på E-nivå.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (0 poäng)

$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad f(x) = x^3 + x$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) \Rightarrow$

$x_1 = 0 \qquad x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

inte reella tal

1 lösning, $x = 0$

Bedömningskommentar till exemplet: Utifrån den givna funktionen $f'(x)$ bestäms en primitiv funktion $f(x)$ där konstantterm saknas. Därmed saknas även ett resonemang som omfattar antalet lösningar oavsett värdet på konstanttermen. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 17.2 (2 A_R)

$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad 3x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -\frac{1}{3}$

Vi kan se att derivatan inte har några reella lösningar, alltså inga nollställen.
Det betyder att den primitiva funktionen f(x) inte har några min eller maxpunkter.
Det betyder att den primitiva funktionen bara skär x-axeln på ett ställe och har då bara en reell lösning.

Svar ekvationen $f(x) = 0$ har en reell lösning

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som baseras på att $f'(x)$ saknar reella nollställen och att $f(x)$ inte har några extrempunkter. Därmed kan det uteslutas att funktionen har fler än ett reellt nollställe. Att funktionen har ett nollställe motiveras inte men det anses underförstått då det handlar om polynomfunktioner. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (0 poäng)

$p(x) = 300 \cdot 0{,}95^x - 20A\,(0{,}95^x - 1) \Rightarrow$

$p(1) = 285 - (-1 \cdot A) \Rightarrow 285 + A$

$A > (300 - 285)$

$A > 15 \Rightarrow A \geq 16$

För att antalet ska öka måste minst 16st papegojor släppas ut varje år

Bedömningskommentar till exemplet: Utifrån ett specialfall visar lösningen att det måste planteras ut fler än 15 papegojor för att arten överhuvudtaget ska öka. Eftersom lösningen inte behandlar att antalet papegojor med tiden ska närma sig 500 så ges lösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 18.2 (2 A_M)

$(500) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} 300 \cdot 0{,}95^x - 20A\,(0{,}95^x - 1) \rightarrow 300 \cdot 0 - 20A \cdot -1 \rightarrow$

$-20A \cdot -1 \rightarrow \boxed{20A}$

$500 = 20A$

$A = \frac{500}{20} = 25$

Svar: 25 papegojor per år

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar ett godtagbart tecknat gränsvärde som leder fram till ett korrekt svar. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på A-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 E_{PL})

$P = 5x - 8y + 30$

$P = 5 \cdot 30 - 8 \cdot 30 + 30 = -60$

$P = 5 \cdot 60 - 8 \cdot 0 + 30 = 330$

$\frac{x}{3} - 20 = 2x - 30 = x - 60 = 6x - 90 = 30 = 5x$

$\frac{30}{5} = 6$ x $\quad \frac{6}{3} - 20 = -18$ y $\quad P = 5 \cdot 6 - 8(-18) + 30 = 204$

Svar 330

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar metod där de tre punkterna undersöks. När det gäller kommunikation är lösningen knapphändig och likhetstecken används felaktigt vilket gör det svårt att följa beräkningarna för den tredje punkten. Sammantaget bedöms lösningen ge två problemlösningspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 E_{PL} och 1 C_K)

$y \leq 60 - x$

$y \geq \frac{x}{3} - 20$

$y \leq 2x - 30$

$(30, 30)$: $150 - 240 + 30 = -60$

$(60, 0)$: $300 - 0 + 30 = 330$

(okänd punkt) $\frac{x}{3} - 20$ & $2x - 30$

Grafritaren intersect

$= (6, -18)$: $30 + 144 + 30 = 204$

Svar: Det största värdet P antar är 330

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar metod där de tre punkterna undersöks och ett korrekt svar anges. När det gäller kommunikation så redovisas beräkningar för de två första punkterna och vidare framgår det att ett digitalt hjälpmedel använts för beräkning av den tredje punkten. Även om symbolen *P* saknas genomgående är lösningen möjlig att följa och förstå och lösningen bedöms uppfylla kraven för två problemlösningspoäng på E-nivå samt nått och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (2 C_M)

$f(x) = 0.558 \cdot 1{,}16^x \qquad 0 \leq x \leq 14$

→ nDerv (f(x), x, 2013-2001) ≈

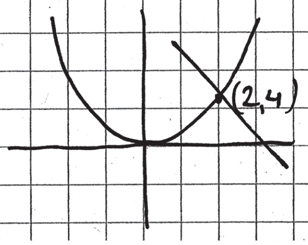
ökning med 0,49 liter/inv/år

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen används ett digitalt verktyg för att lösa uppgiften och det framgår även att funktionen deriveras med avseende på *x*. Trots att det inte tydligt framgår att $f'(12)$ beräknas bedöms lösningen motsvara kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 23a

Elevlösningsexempel 23a.1 (0 poäng)

Nej, påståendet stämmer inte eftersom sekanten kan t.ex. se ut som nedan.



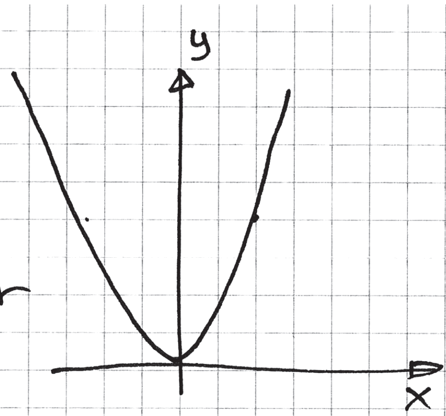
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas inte insikt om att sekanten skär kurvan i två punkter. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 23a.2 (0 poäng)

Nej.

Sekanten kan ha Negativ lutning och gå genom punkten. funktionen har inget slut. därfor finns det många olika lösningar.

Svar: Nej



Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett otillräckligt resonemang och ingen sekant som motiverar slutsatsen visas i figuren. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 23a.3 (1 E_R)

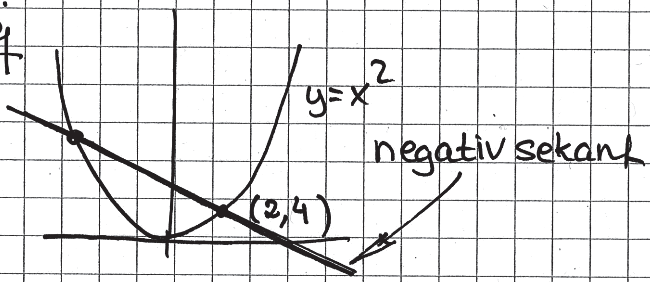
Svar Nej

Om den andra punkten har en x-koordinat som är mindre än −2 så kommer lutningen att bli negativ.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en kortfattad men korrekt förklaring till att påståendet inte stämmer. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 23a.4 (1 E_R)

Svar: Nej



Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar en figur som innehåller all väsentlig information även om påståendet ”negativ sekant” inte är formellt korrekt. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C_M)

Mellan 3 och 4 min

$$\int_3^4 200-0{,}003x^2\,dx = \left[200x-\frac{0{,}003}{3}x^3\right]_3^4 =$$

$$200\cdot 4-\frac{0{,}003\cdot 4^3}{3}-\left(200\cdot 3-\frac{0{,}003}{3}\cdot 3^3\right)=$$

$$800-600=200$$

Svar 200 st

Bedömningskommentar till exemplet: Metoden i lösningen är godtagbar men en felaktig enhetshantering ger fel svar. Eftersom lösningen i övrigt är godtagbar anses den motsvara kraven för den första modelleringspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M)

$$r(x)=200-0{,}003x^2$$

$$R(x)=200x-\frac{0{,}003x^3}{3}=200x-0{,}001x^3$$

$$R(180)=200\cdot 180-0{,}001\cdot 180^3=30168$$

$$R(240)=200\cdot 240-0{,}001\cdot 240^3=34176$$

$$R(240)-R(180)=4008$$

Svar: 4008 röster registrerades under den sista minuten.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas den primitiva funktionen $R(x)$ men utan konstantterm. Eftersom konstanttermerna tar ut varandra då $R(240)-R(180)$ beräknas fås ett korrekt svar även om konstanttermerna saknas. Trots att avsaknad av konstantterm i den primitiva funktionen $R(x)$ innebär ett formellt fel bedöms lösningen nätt och jämnt ge två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 24.3 (2 C_M)

$r(x) = 200 - 0{,}003x^2$ röster/sekund vilket

ger att $R(x)$ = antal röster

3 minuter $= 3 \cdot 60 = 180$ sekunder

4 minuter $= 4 \cdot 60 = 240$ sekunder

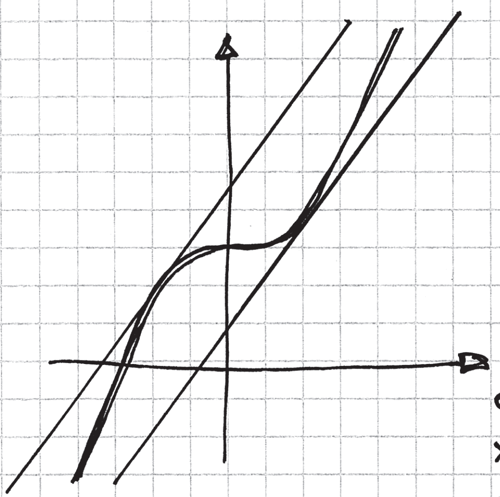
$$\int_{180}^{240} 200 - 0{,}003x^2 \, dx = 4008 \text{ st}$$ ← Grafräknaren

Svar 4008 st

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften löses genom användning av digitalt hjälpmedel. Trots att det inte framgår hur det digitala hjälpmedlet använts anses lösningen uppfylla kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (0 poäng)



$f(x) = x^3 + 1$

Eftersom grafen $x^3 + 1$ är symmetrisk och har en terrasspunkt i 0;1 kommer den att böjas lika mycket åt båda hållen då den inte har något övrigt x/k-värde som påverkar grafen.

Eftersom den är symmetrisk kommer avståndet aldrig förändras och $k_1 = k_2$

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar ett resonemang som endast rör symmetrin hos tredjegradsfunktionen. Då lösningen saknar resonemang om varför tangenternas riktningskoefficient är lika stora ges lösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 C_R)

$f'(x) = 3x^2$

Vi prövar derivatan med några positiva x-värden och dess negativa motparter

$3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ $\quad$ $3 \cdot -1^2 = 3 \cdot 1 = 3$

$3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ $\quad$ $3 \cdot -2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

$a^2 = -a^2$

f(x) är symmetrisk runt k 1,5, som korsar f(x) och y-axeln samtidigt. Där är mittpunkten $k_1 = k_2$ för de är varandras negativa/positiva motparter

Bedömningskommentar till exemplet: I lösningen undersöks derivatan för några positiva värden och deras negativa motsvarighet vilket anses uppfylla kraven för en godtagbar ansats. Resonemanget på de fyra sista raderna är otydligt och slutsats som behandlar att derivatan är lika stor för alla värden som har lika stort avstånd till *y*-axeln saknas. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 25.3 (2 C_R)

$f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2$ derivatan ger k-värdet

x anger var på ekuationen vi tar derivatan
men eftersom f'(x) är en andragradsekuation
så kan vi lägga in ett positivt eller negativt
värde ex: -1 & 1 och ändå få samma k-värde

$-1^{\wedge 2} = 1$ & $1^{\wedge 2} = 1$

så länge det är samma siffra m olika tecken

ex 5, -5 6, -6 20, -20 etc.

$3 \cdot 5^2 = k_1$

$3 \cdot -5^2 = k_2$

$75 = 75$

$k_1 = k_2$

$3 \cdot a^2 = 3 \cdot -a^2$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang om derivatafunktionens egenskaper och varför derivatan får samma värde för positiva *x*-värden och deras negativa motsvarighet. Trots att det saknas parenteser runt negativa tal så anses lösningen uppfylla kraven för två resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 26

Elevlösningsexempel 26.1 (2 A_{PL})

$f(x) = x^2 - 45x + 638,25$

a) $f'(x) = 2x - 45$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 22.5$

$A(x)$ då $x > 0$ och $x \leq 22,5$

↳ annars ≥ 0 om rektangeln kan försvinna

b) Övre gräns: $f(22,5) \cdot 22,5 = \cancel{2970}\ 2970$

Nedre gräns $f(0) \cdot 0 = 0$

$\boxed{0 \leq A \leq 2970}$

Bedömningskommentar till exemplet: I a)-uppgiften visar elevlösningen en korrekt definitionsmängd och uppfyller därmed kraven för problemlösningspoängen på A-nivå. I b)-uppgiften bestäms en nedre och övre gräns för arean där areafunktionen tecknas implicit genom att uttrycket $f(22,5) \cdot 22,5$ beräknas. Detta anses motsvara en godtagbar ansats. Eftersom areafunktionens extremvärden inte undersöks uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen. Sammantaget bedöms deluppgift a) och b) tillsammans ge två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 26.2 (2 A_{PL} och 1 A_K)

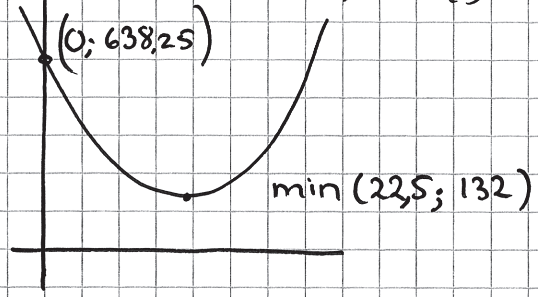
a) $f(x) = x^2 - 45x + 638.25$

$f'(x) = 2x - 45$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 45 = 0$

$2x = 45$

$x = 22{,}5$



$\Rightarrow$ Definitionsmängd för $A(x)$ $\quad 0 \leq x \leq 22{,}5$

b) $f(0) = 638{,}25$

$f(22.5) = 22{,}5^2 - 45 \cdot 22.5 + 638{,}25 = 132$

$A(x) = x \cdot f(x) = x^3 - 45x^2 + 638{,}25x$

$A'(x) = 3x^2 - 90x + 638{,}25$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 638{,}25 = 0$

PRGM: ANDRAGRD ger $x_1 = 18.5$

$x_2 = 11.5$

$A(11{,}5) = 11{,}5^3 - 45 \cdot 11{,}5^2 + 638{,}25 \cdot 11{,}25 = 2909.5$

$A(18{,}5) = 18{,}5^3 - 45 \cdot 18{,}5^2 + 638.25 \cdot 18{,}5 = 2738$

$A(0) = 0$

Svar $0 < A \leq 2909{,}5$

Bedömningskommentar till exemplet: I a)-uppgiften bestäms en korrekt definitionsmängd och därmed uppfylls kraven för problemlösningspoängen på A-nivå. I b)-uppgiften anges en korrekt areafunktion. Areafunktionen deriveras och med digitalt hjälpmedel bestäms derivatans nollställen. Vidare beräknas areafunktionens lokala maximi- och minimivärde samt dess värde för den lägre intervallgränsen. Värdet för den övre intervallgränsen bestäms ej och därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå.
När det gäller kommunikation är lösningen välstrukturerad, lätt att följa och förstå samt har lämpliga beteckningar och symboler. Sammantaget bedöms deluppgift a) och b) ge två problemlösningspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 26.3 (3 A_{PL} och 1 A_K)

a) $f(x) = x^2 - 45x + 638{,}25$

$f'(x) = 2x - 45 \Rightarrow$

$2x = 45$

$\underline{x = 22{,}5}$

$D_x: 0 < x \leq 22{,}5$

b) $A(x) = x(x^2 - 45x + 638{,}25)$

$= x^3 - 45x^2 + 638{,}25x$

$A'(x) = 3x^2 - 90x + 638{,}25$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 638{,}25 = 0$

$x^2 - 30x + 212{,}75 = 0$

$x = 15 \pm \sqrt{225 - 212{,}75}$

$x = 15 \pm \sqrt{12{,}25}$

$x = 15 \pm 3{,}5$

$x_1 = 11{,}5 \quad x_2 = 18{,}5$

$A(11{,}5) = 11{,}5^3 - 45 \cdot 11{,}5^2 + 638{,}25 \cdot 11{,}5 = 2909{,}5$

$A(18{,}5) = 18{,}5^3 - 45 \cdot 18{,}5^2 + 638{,}25 \cdot 18{,}5 = 2738$

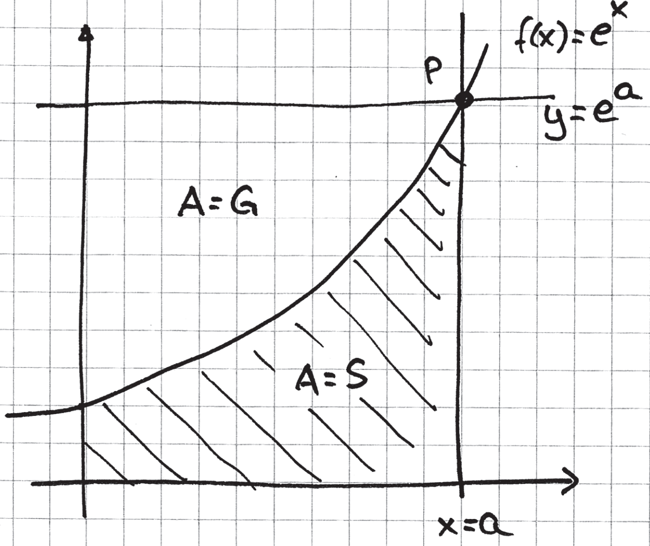
$A(22{,}5) = 22{,}5^3 - 45 \cdot 22{,}5 + 638{,}25 \cdot 22{,}5 = 2970$

Svar: $V_A: 0 < A \leq 2970$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt och behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation framgår det inte att derivatan sätts lika med noll i a)-uppgiften och *A*(0) undersöks inte explicit i b)-uppgiften. I övrigt är lösningen välstrukturerad samt lätt att följa och förstå. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för tre problemlösningspoäng på A-nivå samt nätt och jämnt kraven för en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 27

Elevlösningsexempel 27.1 (1 A_{PL})



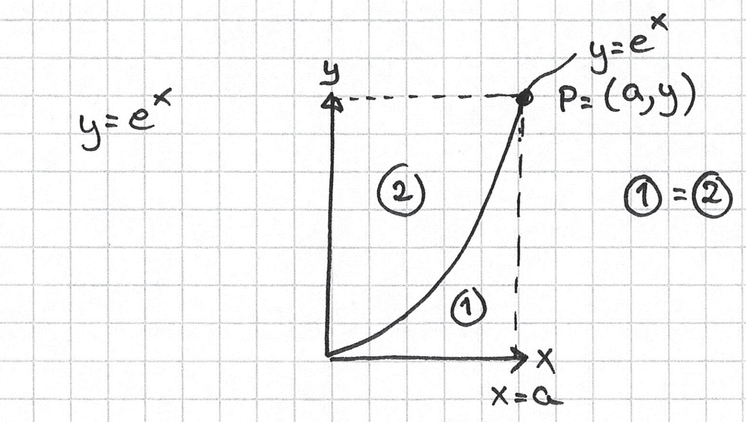
$$G=\int_0^a (e^a-e^x)\,dx=\Big[e^a-e^x\Big]_0^a=e^a-e^a-e^a+1=1-e^a$$

$$S=\int_0^a (e^x)\,dx=\Big[e^x\Big]_0^a=e^a-1$$

$$G=S \Rightarrow$$

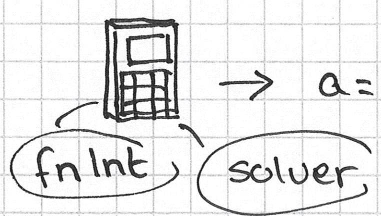
Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en tydlig figur med beteckningar för relevanta areaområden. Detta följs upp med korrekt tecknade integraluttryck för respektive area men integralen för G beräknas felaktigt. Genom att teckna ” $G = S$ ” visas att integralerna för respektive area ska sättas lika. Detta anses motsvara en godtagbar ansats och därmed uppfylls kraven för den första problemlösningspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27.2 (2 A_{PL})



$P = (a, e^a)$

$$a \cdot e^a - 2 \cdot \int_0^a e^x\,dx = 0$$



$\rightarrow \quad a = 1,594$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder fram till ett korrekt svar men är knapphändig och därmed inte helt lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27.3 (2 A_{PL} och 1 A_K)

B = streckade området

$$B = \int_0^a e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1$$

C = Area av det gråmarkerade området

$$C = a \cdot e^a - (e^a - 1)$$

$$B = C$$

$$e^a - 1 = ae^a - (e^a - 1)$$

$$e^a - 1 + e^a - 1 = ae^a$$

$$2e^a - 2 = ae^a$$

Ritar två grafer sedan intersect

$$a \approx 1{,}594$$

Svar: $a \approx 1{,}594$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt och behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå men det framgår inte vilken area som motsvaras av $a \cdot e^a$. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.