Delprov B	Uppgift 1–11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12–18. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av ett muntligt delprov (delprov A) och tre skriftliga delprov (delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 22 C- och 20 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 33 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 43 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 51 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

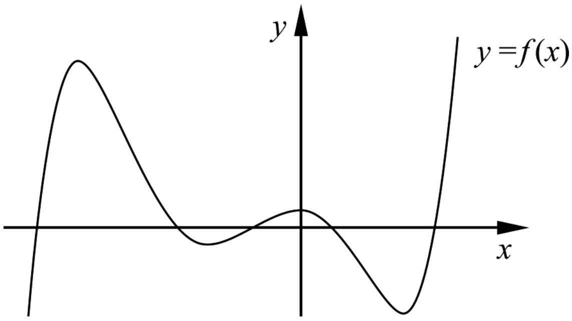
Namn: ____

Födelsedatum: ____

Gymnasieprogram/Komvux: ____

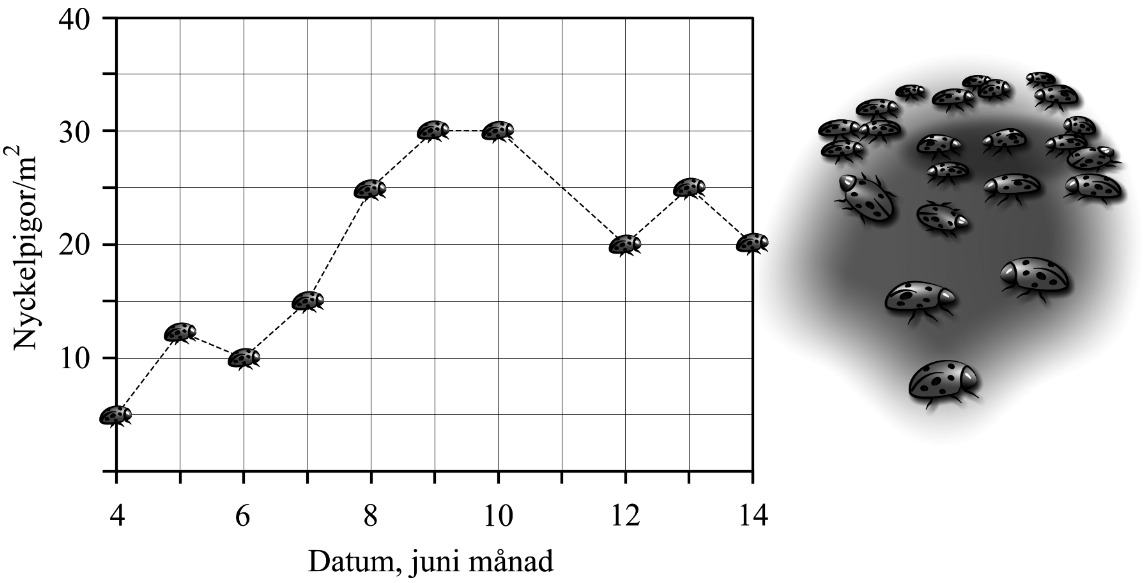
Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. I figuren visas huvuddragen av grafen till funktionen *f*.



Hur många reella lösningar har ekvationen $f(x)=0$? ______________________ (1/0/0)

2. Diagrammet visar antalet nyckelpigor per kvadratmeter på en äng under några dagar i juni månad. Mätningarna är utförda klockan 12.00 de aktuella dagarna.



Ett av alternativen A–E anger den tidsperiod när den genomsnittliga förändringshastigheten av antalet nyckelpigor är som störst. Vilket?

A. 4–14 juni

B. 7–8 juni

C. 6–10 juni

D. 7–14 juni

E. 9–10 juni ______________________ (1/0/0)

3. För funktionen *f* gäller att $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$

a) Bestäm $f'(x)$. $f'(x) =$ ______________________ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(1)$. $f'(1) =$ ______________________ (1/0/0)

c) Ett av alternativen A–D är korrekt. Vilket?

A. Grafen till funktionen har en terrasspunkt.

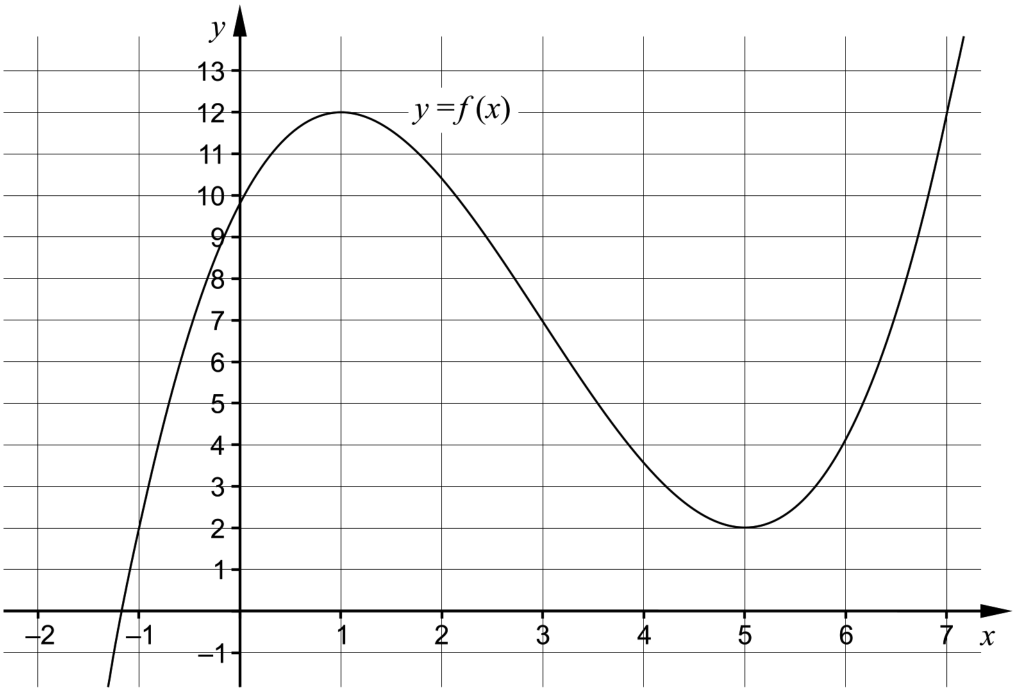
B. Grafen till funktionen har en maximipunkt.

C. Grafen till funktionen har en minimipunkt.

D. Grafen till funktionen har en inflektionspunkt.

______________________ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till tredjegradsfunktionen *f*.



Använd grafen och ange för vilka värden på *x* som

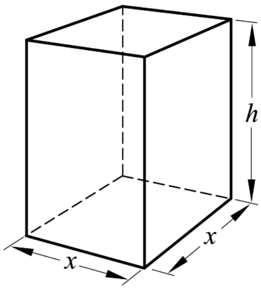
a) $f'(x) = 0$ ______________________ (1/0/0)

b) $f'(x) < 0$ ______________________ (0/1/0)

c) $f''(x) > 0$ ______________________ (0/0/1)

5. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = x\sqrt{x}$ $f'(x) =$ ____________________ (0/1/0)

6. Figuren visar ett rätblock med kvadratisk basyta. Rätblockets volym V som funktion av basytans sidlängd x beskrivs av $V(x) = x^3 + 5x^2$



Bestäm höjden h uttryckt i x.
Svara i enklaste form. $h =$ ____________________ (0/1/0)

7. Bestäm konstanten a så att ekvationen $4x^3 - ax = 0$ får lösningarna $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ och $x_3 = -2$ ____________________ (0/1/0)

8. För vilka värden på x är uttrycket $\dfrac{x^2 + 4x}{x - 3x^2}$ inte definierat? ____________________ (0/1/0)

9. De två första termerna i en geometrisk summa är 2 och $-2k$.

Vilken är den 300:e termen i summan? ____________________ (0/1/0)

10. Guillaume l'Hospital var en fransk matematiker som levde under slutet av 1600-talet. Han undersökte gränsvärden och kom fram till en regel som gör det enklare att beräkna vissa typer av gränsvärden.

l'Hospitals regel:

Gränsvärdet $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ är under vissa förutsättningar lika med $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Använd l'Hospitals regel för att bestämma gränsvärdet

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^9 - 1}$ ______________________ (0/1/0)

11. För en polynomfunktion f av sjunde graden gäller att:

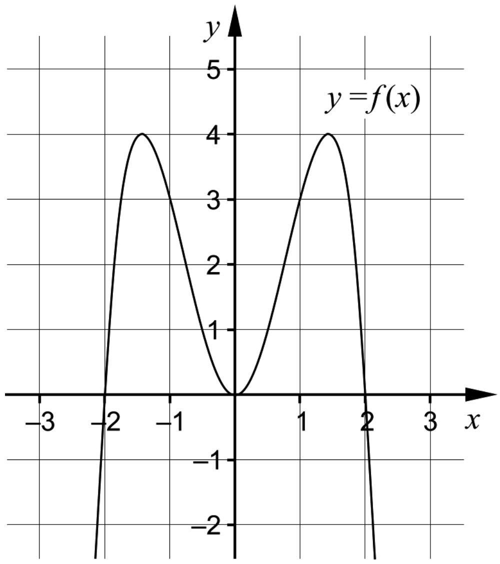
- Ekvationen $f'(x) = 0$ har sex olika reella lösningar.
- Grafen till f har ingen terrasspunkt.
- En av extrempunkterna har negativ y-koordinat och de övriga extrempunkterna har positiva y-koordinater.

Hur många reella lösningar har ekvationen $f(x) = 0$?

______________________ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. För funktionen *f* gäller att $f(x) = 4x^2 - x^4 + A$ där *A* är en konstant.
Figuren visar grafen till funktionen *f* då $A = 0$



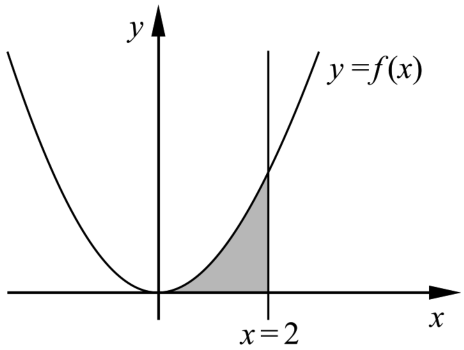
Sabina säger:
– *Funktionen har alltid tre extrempunkter oavsett värde på konstanten A.*
Har Sabina rätt? Motivera ditt svar. (1/0/0)

13. För funktionen *f* gäller att $f(x) = 3x^3 - 36x$
Använd derivata och bestäm koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktären för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/1/0)

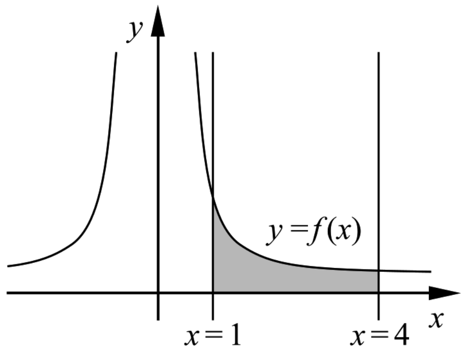
14. Beräkna algebraiskt arean av det markerade området om

a) området begränsas av x-axeln, grafen till $f(x) = 9x^2$ samt linjen $x = 2$



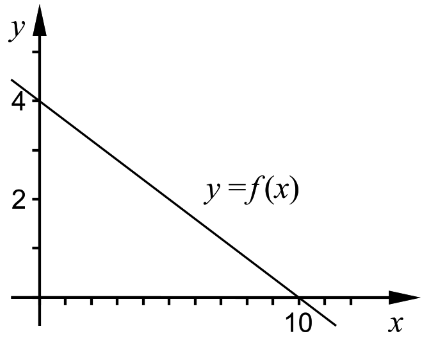
(2/0/0)

b) området begränsas av x-axeln, grafen till $f(x) = \frac{3}{x^2}$ samt linjerna $x = 1$ och $x = 4$



(0/2/0)

15. Nedan visas grafen till en funktion f. Grafen är en rät linje.



Funktionen f har en primitiv funktion F för vilken det gäller att $F(0) = 5$
Bestäm $F(10)$. (0/2/0)

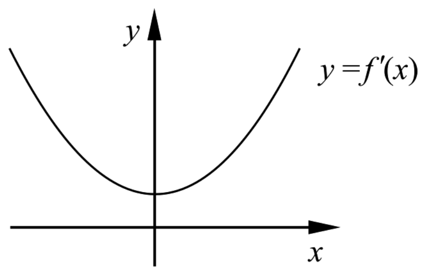
16. Förenkla så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(x-5)(x-5)}{5-x}+\dfrac{(5-x)(5-x)}{5-x}$ (0/2/0)

b) $\dfrac{(x-3)^7-(x-3)^6}{x-4}$ (0/0/1)

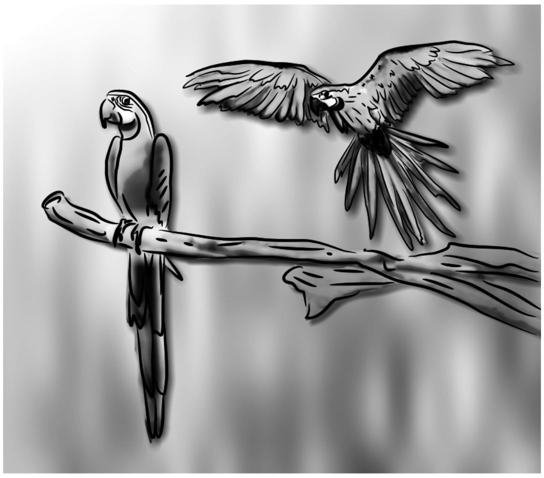
c) $\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{2x}\cdot e^{-2x}}$ (0/0/1)

17. Funktionen f har derivatan $f'(x)=3x^2+1$, se figur.



Undersök hur många reella lösningar ekvationen $f(x)=0$ har. (0/0/2)

18. I början av år 2015 fanns 300 papegojor av en viss art i ett område. Papegojorna riskerar att utrotas och därför planterar naturvårdare ut fler papegojor av samma art i området. Det planteras ut lika många papegojor i början av varje år med start år 2016.



Enligt en förenklad modell kan antalet papegojor P i området beskrivas med funktionen

$$P(x) = 300 \cdot 0,95^x - 20A(0,95^x - 1)$$

där A är antalet papegojor som planteras ut varje år och x är tiden i år räknat från början av år 2015.

Bestäm hur många papegojor som ska planteras ut varje år för att antalet med tiden ska närma sig 500. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 19–27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av ett muntligt delprov (delprov A) och tre skriftliga delprov (delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 22 C- och 20 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 33 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 43 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 51 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

19. Tillverkare av LED-lampor uppger att livslängden för lamporna varierar mellan 625 och 1000 dygn. För att kontrollera om detta stämmer ska ett försök med 75 lampor genomföras. I försöket undersöks hur många lampor som slocknat.

Antalet slocknade lampor kan enligt en enkel modell beskrivas av

$L(t) = \mathrm{e}^{0{,}00412 \cdot t} - 1$

där $L(t)$ är antal slocknade lampor och t är tiden i dygn från försökets start.

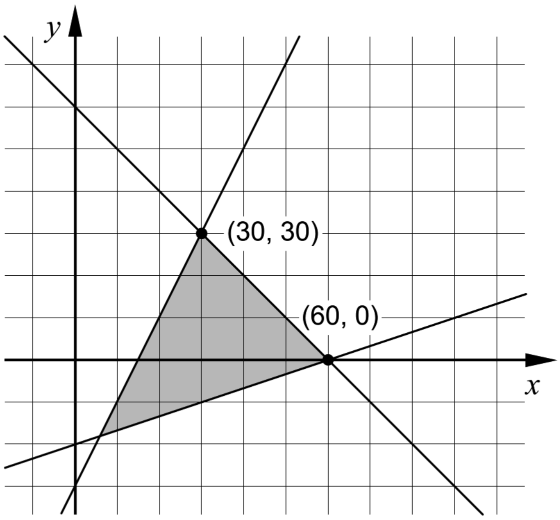
a) Kommer alla lampor att lysa efter 625 dygn enligt modellen? Motivera ditt svar. (1/0/0)

b) Bestäm med hjälp av modellen hur många dygn det tar innan alla lampor har slocknat. (2/0/0)

20. Grafen till funktionen $f(x) = 5x^2 + 10$ har en tangent i den punkt där $x = 2$
Tangentens ekvation kan skrivas $y = ax - 10$
Bestäm a. (2/0/0)

21. Figuren visar ett gråmarkerat område som kan beskrivas med olikheterna

$$\begin{cases} y \le 60 - x \\ y \ge \dfrac{x}{3} - 20 \\ y \le 2x - 30 \end{cases}$$



Bestäm det största värde som $P = 5x - 8y + 30$ antar i det gråmarkerade området. (2/1/0)

22. I Sverige ökar konsumtionen av energidryck. Enligt en förenklad modell kan konsumtionen beskrivas med exponentialfunktionen

$f(x) = 0{,}558 \cdot 1{,}16^x$

där $f(x)$ är den årliga konsumtionen i liter per invånare och x är tiden i år med start sista december 2001. Modellen kan antas gälla i intervallet $0 \le x \le 14$

Utgå från modellen och bestäm med vilken hastighet (uttryckt i liter/invånare/år) som den årliga konsumtionen av energidryck ökade sista december 2013. (0/2/0)

23. En sekant går genom två punkter på kurvan $y = x^2$. En av punkterna är (2, 4).

a) Påstående:

Alla sekanter till kurvan $y = x^2$ *som går genom punkten (2, 4) har positiv lutning.*

Stämmer påståendet? Motivera ditt svar. (1/0/0)

b) Bestäm den andra punktens x-koordinat så att sekantens lutning blir exakt 20 (0/0/2)

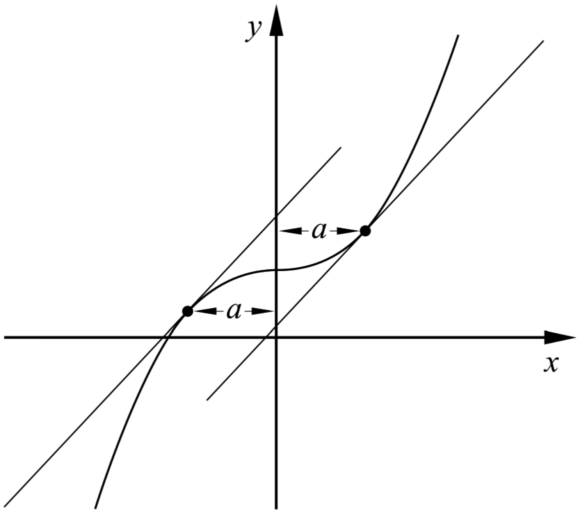
24. I en musiktävling sker röstningen med SMS. Sambandet

$r(x) = 200 - 0,003x^2$

beskriver antalet inkommande SMS-röster per sekund, x sekunder efter att registreringen startat.

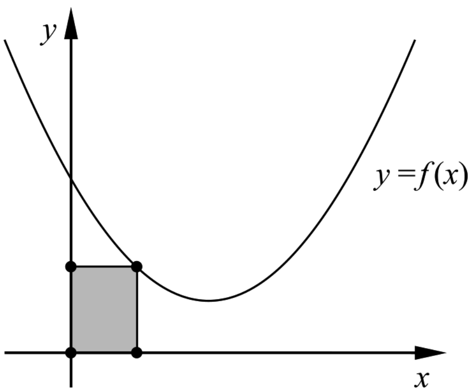
Röstningen är öppen under fyra minuter. Bestäm hur många SMS-röster som registrerades under den sista minuten. (0/2/0)

25. Figuren visar grafen till funktionen f som ges av $f(x) = x^3 + 1$. I figuren finns även två tangenter till grafen. Tangeringspunkterna ligger på var sin sida om y-axeln och på samma avstånd a från y-axeln.



Anta att tangenterna har riktningskoefficienterna k_1 och k_2.
Visa att $k_1 = k_2$ oavsett hur långt avståndet a är. (0/2/0)

26. I figuren visas grafen till $f(x) = x^2 - 45x + 638,25$ och en rektangel som har ett hörn i origo, två hörn på de positiva koordinataxlarna och ett hörn på grafen. Ingen del av rektangeln får vara ovanför grafen.

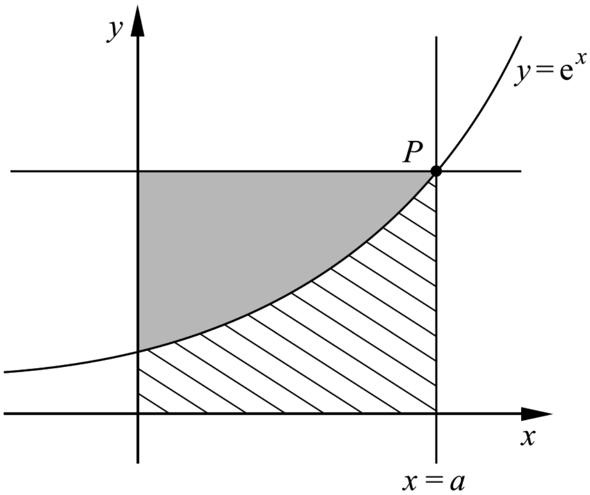


Rektangelns area varierar med hörnens läge på axlar och graf. Arean kan beskrivas med en funktion A, där A beror av x.

a) Bestäm definitionsmängden för areafunktionen A. (0/0/1)

b) Bestäm värdemängden för areafunktionen A. (0/0/3)

27. I figuren visas kurvan $y = e^x$ och två linjer som går genom punkten P på kurvan. Linjerna är parallella med koordinataxlarna och punkten P har x-koordinaten a där $a > 0$



Bestäm a så att arean av det streckade området blir lika stort som arean av det gråmarkerade området. Svara med tre decimalers noggrannhet. (0/0/3)

Till eleven – information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *”Hur?”* och en förklaring svarar på frågan *”Varför?”*. Du beskriver något när du till exempel berättar hur du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar varför du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.
Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = x^2 - 6x + 14$, kurvans symmetrilinje, linjen $x = 9$ och x-axeln.

Uppgift 2

Namn:__________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Kurvan $y = x^4 - 4x^2 + 8$ har tre extrempunkter.

- Använd derivata för att bestämma koordinater och karaktär för de tre extrempunkterna.
- Använd extrempunkterna för att skissa kurvan.

Uppgift 3

Namn:______________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

En företagare räknar med att under en 10-årsperiod öka omsättningen med i genomsnitt 5 % per år. Enligt företagaren innebär detta en total omsättning på 1 000 000 kr för hela 10-årsperioden.

a) Bestäm hur stor omsättningen blir under det första året om den totala omsättningen ska bli 1 000 000 kr för hela 10-årsperioden.

b) Bestäm hur mycket större omsättningen blir under det sista året jämfört med omsättningen under det första året.

Uppgift 4

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Kurvan $y = -x^2 + 4x + 6$ har en tangent i den punkt där $x = 4$

Bestäm arean av det område som begränsas av tangenten och de positiva koordinataxlarna.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	E	C	A	Max
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehållsförteckning

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 3b. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4) samt ett kapitel med instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3b

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av…	+1 E_P
Godtagbar verifiering av…	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL
Termer	t.ex. polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, rät linje, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm, geometrisk summa, olikhet
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, formeln för geometrisk summa
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (5)	+1 E_B
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (B: 7–8 juni)	+1 E_B
3.		**Max 3/0/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x)=6x-6$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($f'(1)=0$)	+1 E_P
c)	Korrekt svar (C: Grafen till funktionen har en minimipunkt.)	+1 E_B
4.		**Max 1/1/1**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($x=1$ och $x=5$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($1<x<5$)	+1 C_B
c)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($x>3$)	+1 A_B
5.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($f'(x)=1,5\cdot x^{0,5}$)	+1 C_P
6.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($h=x+5$)	+1 C_{PL}

7. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (16) + 1 C_{PL}

8. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($x_1 = 0$ och $x_2 = \frac{1}{3}$) +1 C_B

9. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($2 \cdot (-k)^{299}$) +1 C_B

10. **Max 0/1/0**

Korrekt svar $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ +1 C_B

11. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (3) +1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

12. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang som styrker att Sabina har rätt, t.ex. resonemang baserat på argumentet att värdet hos konstanten *A* endast påverkar grafens läge i *y*-led +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

13. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer derivatans nollställen, $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$	+1 E_P
med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater $(-2,\ 48)$ och $(2,\ -48)$	+1 E_P
Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär (maximipunkt $(-2,\ 48)$ och minimipunkt $(2,\ -48)$)	+1 E_P
Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga”	+1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

14. **Max 2/2/0**

a)	Godtagbar ansats, t.ex. tecknar en integral som motsvarar arean, $\int_0^2 9x^2 \mathrm{d}x$	+1 E_B
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (24 a.e.)	+1 E_P
	Kommentar: Även ett svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.	

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

b)	Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion, $-3x^{-1}$	+1 C_P
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($2{,}25$ a.e.)	+1 C_P
	Kommentar: Även ett svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.	

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer den primitiva funktionen F på allmän form, $F(x) = -0{,}2x^2 + 4x + C$	+1 C_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (25)	+1 C_{PL}

16. **Max 0/2/2**

a)	Godtagbar ansats, t.ex. inser att $(x-5) = -(5-x)$	+1 C_P
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($10-2x$)	+1 C_P
b)	Godtagbar lösning med korrekt svar ($(x-3)^6$)	+1 A_P
c)	Godtagbar lösning med korrekt svar (e^x)	+1 A_P

17. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. drar slutsatsen att derivatan är positiv för alla värden på x +1 A_R

med ett i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang, där exempelvis den positiva derivatan används för att förklara varför ekvationen endast har en reell lösning +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

18. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. inser att $\lim_{x \to \infty} P(x) = 500$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (25) +1 A_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

Instruktioner för bedömning av delprov D

19. **Max 3/0/0**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar (t.ex. ”Nej, 12 har slocknat.”) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $75 = e^{0,00412 \cdot t} - 1$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1051 dygn) +1 E_M

20. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, visar insikt om att tangenten går genom punkterna (2, 30) och (0, –10)
eller visar insikt om att $f'(2) = a$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 20$) +1 E_{PL}

21. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer det tredje hörnet $(6,-18)$	+1 E_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning, t.ex. där punkterna $(6,-18)$, $(60,0)$ och $(30,30)$ undersöks, med korrekt svar (330)	+1 E_{PL}
Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga”	+1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

22. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer ett korrekt uttryck för $f'(x)$	+1 C_M
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,49)	+1 C_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

23. **Max 1/0/2**

a)	Godtagbart enkelt resonemang som baseras på insikten att sekanten skär andragradskurvan i två punkter och leder till slutsatsen att påståendet är felaktigt	+1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

b)	Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\frac{x^2-4}{x-2}=20$	+1 A_{PL}
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (18)	+1 A_{PL}
	Kommentar: Även svaret (18, 324) godtas.	

24. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar integralen $\int_{180}^{240} (200-0,003x^2)\,\mathrm{d}x$	+1 C_M
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4 008 st)	+1 C_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

25. **Max 0/2/0**

Godtagbar inledning till välgrundat resonemang, t.ex. inser att $f'(a)$ och $f'(-a)$ ska undersökas +1 C_R

med i övrigt välgrundat slutfört resonemang där det visas att $k_1 = k_2$ oavsett avståndet a +1 C_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

26. **Max 0/0/4**

a) Godtagbar lösning med korrekt svar ($0 < x \leq 22,5$) +1 A_{PL}

Kommentar: Även svaret $0 \leq x \leq 22,5$ godtas.

b) Godtagbar ansats, tecknar areafunktionen korrekt *och* inser att derivatans nollställen ska undersökas eller inser att den övre intervallgränsen ska undersökas +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(0 < A(x) \leq 2970)$ +1 A_{PL}

Kommentar: Även svaren $0 \leq A(x) \leq 2970$, $0 \leq A \leq 2970$ och $0 < A \leq 2970$ godtas.

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

27. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\int_0^a e^x dx = \frac{a \cdot e^a}{2}$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($a \approx 1,594$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 12

Elevlösningsexempel 12.1 (1 E_R)

Ja, Sabina har rätt då konstanten
A bara påverkar var minimipunkten
har sin y-koordinat

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang där det framgår att värdet på konstanten *A* endast påverkar minimipunktens läge i *y*-led. Resonemanget hade varit tydligare om det framgått att *hela grafen* förskjuts i *y*-led. Elevlösningen ges nätt och jämnt resonemangspoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 12.2 (1 E_R)

Ja hon har rätt. Extrempunkternas
x-koordinater fås när $f'(x)=0$
Eftersom A är en konstant deriveras inte
den, så $f'(x)$ är alltid $8x-4x^3$ oavsett A:s värde

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett enkelt godtagbart resonemang. Frasen ”deriveras inte den” är felaktig men kompenseras av resonemanget på sista raden. Elevlösningen ges resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 13

Elevlösningsexempel 13.1 (1 E_P)

$f(x) = 3x^3 - 36x$

$f'(x) = 9x^2 - 36$

$f'(x) = 0$

$9x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$

	↘		↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$
x		2	

$x = 2;\ f(2) = 3 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = -48$

Funktionen har ett min i punkten $(2, -48)$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms endast ett av derivatans nollställen vilket förenklar uppgiftens komplexitet. Eftersom resterande del av uppgiften löses godtagbart anses elevlösningen som helhet motsvara kraven för en godtagbar ansats. Elevlösningen ges den första procedurpoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.2 (2 E_P och 1 C_K)

$f'(x) = 9x^2 - 36$

$0 = 9x^2 - 36$

$0 = x^2 - 4$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$f''(x) = 18x$

$f''(2) = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow$ Maximipunkt

$f''(-2) = -18 \cdot 2 = -36 \Rightarrow$ Minimipunkt

$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = 3 \cdot 8 - 72 = -48$

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^3 - 36 \cdot (-2) = -24 + 72 = 48$

Svar: Koordinaterna är $(2, -48)$ och $(-2, 48)$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt när det gäller derivatans nollställen och extrempunkternas koordinater. Eftersom slutsatserna av verifieringen är felaktiga uppfylls inte kraven för den tredje procedurpoängen på E-nivå. När det gäller kommunikation är uppgiften behandlad i sin helhet, strukturerad samt möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen de två första procedurpoängen på E-nivå samt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 13.3 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = 3x^3 - 36x$

$f'(x) = 9x^2 - 36 = 0$

$9x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2 = 3 \cdot 8 - 72 = -48$

$f(-2) = 3 \cdot -2^3 - 36 \cdot -2 = 3 \cdot -8 + 72 = -24 + 72 = 48$

Punkterna är $(2, -48)$ och $(-2, 48)$

x	-10	-2	0	2	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$(-2, 48)$ är en maxpunkt

$(2, -48)$ är en minpunkt

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation används det felaktiga skrivsättet "$f'(x) = 9x^2 - 36 = 0$", parenteser runt negativa tal saknas och de beräkningar som ligger bakom teckenschemat redovisas inte. I övrigt är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 14a

Elevlösningsexempel 14a.1 (1 E_B och 1 E_P)

$F(x) = \frac{9x^3}{3} = 3x^3$

Arean $= F(2) - F(0) = 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 0^3 = 3 \cdot 8 = 24$

Svar 24 a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas en primitiv funktion där konstantterm saknas. I detta sammanhang anses lösningen godtagbar och ges sammantaget en begreppspoäng på E-nivå och en procedurpoäng på E-nivå.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (0 poäng)

$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad f(x) = x^3 + x$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) \Rightarrow$

$x_1 = 0 \qquad x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

inte reella tal

1 lösning, $x = 0$

Bedömningskommentar till exemplet: Utifrån den givna funktionen $f'(x)$ bestäms en primitiv funktion $f(x)$ där konstantterm saknas. Därmed saknas även ett resonemang som omfattar antalet lösningar oavsett värdet på konstanttermen. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 17.2 (2 A_R)

$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad 3x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -\frac{1}{3}$

Vi kan se att derivatan inte har några reella lösningar, alltså inga nollställen. Det betyder att den primitiva funktionen f(x) inte har några min eller maxpunkter. Det betyder att den primitiva funktionen bara skär x-axeln på ett ställe och har då bara en reell lösning.

Svar ekvationen $f(x) = 0$ har en reell lösning

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som baseras på att $f'(x)$ saknar reella nollställen och att $f(x)$ inte har några extrempunkter. Därmed kan det uteslutas att funktionen har fler än ett reellt nollställe. Att funktionen har ett nollställe motiveras inte men det anses underförstått då det handlar om polynomfunktioner. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (0 poäng)

$p(x) = 300 \cdot 0{,}95^x - 20A\,(0{,}95^x - 1) \Rightarrow$

$p(1) = 285 - (-1 \cdot A) \Rightarrow 285 + A$

$A > (300 - 285)$

$A > 15 \Rightarrow A \geq 16$

För att antalet ska öka måste minst 16st papegojor släppas ut varje år

Bedömningskommentar till exemplet: Utifrån ett specialfall visar lösningen att det måste planteras ut fler än 15 papegojor för att arten överhuvudtaget ska öka. Eftersom lösningen inte behandlar att antalet papegojor med tiden ska närma sig 500 så ges lösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 18.2 (2 A_M)

$(500) \lim_{x \to \infty} 300 \cdot 0{,}95^x - 20A\,(0{,}95^x - 1) \rightarrow 300 \cdot 0 - 20A \cdot -1 \rightarrow$

$-20A \cdot -1 \rightarrow \boxed{20A}$

$500 = 20A$

$A = \frac{500}{20} = 25$

Svar: 25 papegojor per år

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar ett godtagbart tecknat gränsvärde som leder fram till ett korrekt svar. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på A-nivå.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 E_{PL})

$P = 5x - 8y + 30$

$P = 5 \cdot 30 - 8 \cdot 30 + 30 = -60$

$P = 5 \cdot 60 - 8 \cdot 0 + 30 = 330$

$\frac{x}{3} - 20 = 2x - 30 = x - 60 = 6x - 90 = 30 = 5x$

$\frac{30}{5} = 6$ x $\quad \frac{6}{3} - 20 = -18$ y $\quad P = 5 \cdot 6 - 8(-18) + 30 = 204$

Svar 330

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar metod där de tre punkterna undersöks. När det gäller kommunikation är lösningen knapphändig och likhetstecken används felaktigt vilket gör det svårt att följa beräkningarna för den tredje punkten. Sammantaget bedöms lösningen ge två problemlösningspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 E_{PL} och 1 C_K)

$y \leq 60 - x$

$y \geq \frac{x}{3} - 20$

$y \leq 2x - 30$

$(30, 30)$: $150 - 240 + 30 = -60$

$(60, 0)$: $300 - 0 + 30 = 330$

(okänd punkt) $\frac{x}{3} - 20$ & $2x - 30$

Grafritaren intersect

$= (6, -18)$: $30 + 144 + 30 = 204$

Svar: Det största värdet P antar är 330

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar metod där de tre punkterna undersöks och ett korrekt svar anges. När det gäller kommunikation så redovisas beräkningar för de två första punkterna och vidare framgår det att ett digitalt hjälpmedel använts för beräkning av den tredje punkten. Även om symbolen *P* saknas genomgående är lösningen möjlig att följa och förstå och lösningen bedöms uppfylla kraven för två problemlösningspoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (2 C_M)

$f(x) = 0.558 \cdot 1{,}16^x \quad 0 \leq x \leq 14$

→ nDerv (f(x), x, 2013-2001) ≈

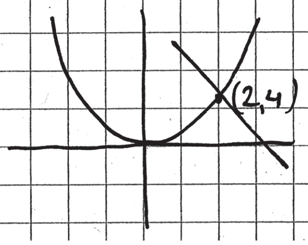
ökning med 0,49 liter/inv/år

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen används ett digitalt verktyg för att lösa uppgiften och det framgår även att funktionen deriveras med avseende på x. Trots att det inte tydligt framgår att $f'(12)$ beräknas bedöms lösningen motsvara kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 23a

Elevlösningsexempel 23a.1 (0 poäng)

Nej, påståendet stämmer inte eftersom sekanten kan t.ex. se ut som nedan.



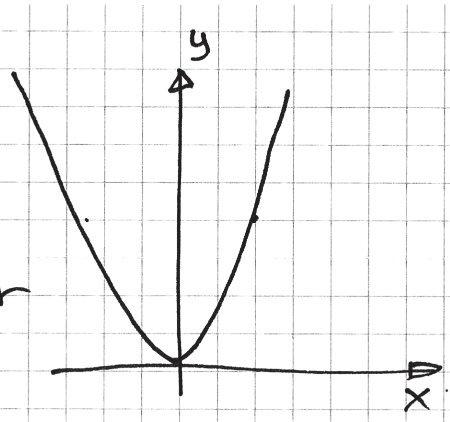
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas inte insikt om att sekanten skär kurvan i två punkter. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 23a.2 (0 poäng)

Nej.

Sekanten kan ha Negativ lutning och gå genom punkten. funktionen har inget slut. därfor finns det många olika lösningar.

Svar: Nej



Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett otillräckligt resonemang och ingen sekant som motiverar slutsatsen visas i figuren. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 23a.3 (1 E_R)

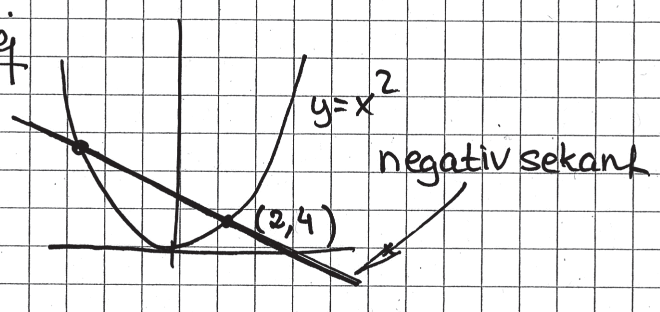
Svar Nej

Om den andra punkten har en x-koordinat som är mindre än −2 så kommer lutningen att bli negativ.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en kortfattad men korrekt förklaring till att påståendet inte stämmer. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 23a.4 (1 E_R)

Svar: Nej



Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar en figur som innehåller all väsentlig information även om påståendet ”negativ sekant” inte är formellt korrekt. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 C_M)

Mellan 3 och 4 min

$$\int_3^4 200-0{,}003x^2\,dx = \left[200x - \frac{0{,}003}{3}x^3\right]_3^4 =$$

$$200\cdot 4 - \frac{0{,}003\cdot 4^3}{3} - \left(200\cdot 3 - \frac{0{,}003}{3}\cdot 3^3\right) =$$

$$800 - 600 = 200$$

Svar 200 st

Bedömningskommentar till exemplet: Metoden i lösningen är godtagbar men en felaktig enhetshantering ger fel svar. Eftersom lösningen i övrigt är godtagbar anses den motsvara kraven för den första modelleringspoängen på C-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (2 C_M)

$$r(x) = 200 - 0{,}003x^2$$

$$R(x) = 200x - \frac{0{,}003x^3}{3} = 200x - 0{,}001x^3$$

$$R(180) = 200\cdot 180 - 0{,}001\cdot 180^3 = 30168$$

$$R(240) = 200\cdot 240 - 0{,}001\cdot 240^3 = 34176$$

$$R(240) - R(180) = 4008$$

Svar: 4008 röster registrerades under den sista minuten.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen tecknas den primitiva funktionen $R(x)$ men utan konstantterm. Eftersom konstanttermerna tar ut varandra då $R(240) - R(180)$ beräknas fås ett korrekt svar även om konstanttermerna saknas. Trots att avsaknad av konstantterm i den primitiva funktionen $R(x)$ innebär ett formellt fel bedöms lösningen nätt och jämnt ge två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 24.3 (2 C_M)

$r(x) = 200 - 0{,}003x^2$ röster/sekund vilket

ger att $R(x)$ = antal röster

3 minuter $= 3 \cdot 60 = 180$ sekunder

4 minuter $= 4 \cdot 60 = 240$ sekunder

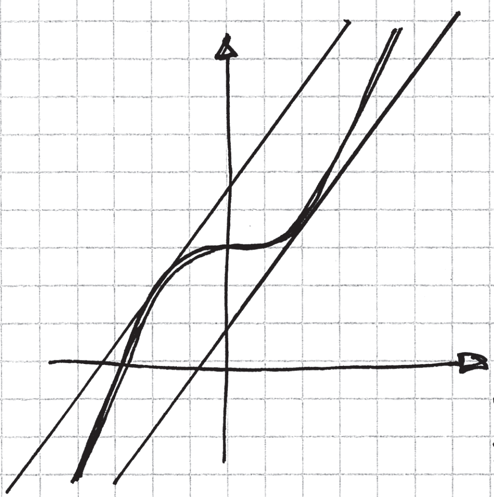
$\int_{180}^{240} 200 - 0{,}003x^2 \, dx = 4008$ st ← Grafräknaren

Svar 4008 st

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften löses genom användning av digitalt hjälpmedel. Trots att det inte framgår hur det digitala hjälpmedlet använts anses lösningen uppfylla kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (0 poäng)



$f(x) = x^3 + 1$

Eftersom grafen $x^3 + 1$ är symmetrisk och har en terrasspunkt i 0;1 kommer den att böjas lika mycket åt båda hållen då den inte har något övrigt x/k-värde som påverkar grafen.

Eftersom den är symmetrisk kommer avståndet aldrig förändras och $k_1 = k_2$

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen visar ett resonemang som endast rör symmetrin hos tredjegradsfunktionen. Då lösningen saknar resonemang om varför tangenternas riktningskoefficient är lika stora ges lösningen noll poäng.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 C_R)

$f'(x) = 3x^2$

Vi prövar derivatan med några positiva x-värden och dess negativa motparter

$3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ $\quad$ $3 \cdot -1^2 = 3 \cdot 1 = 3$

$3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ $\quad$ $3 \cdot -2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

$a^2 = -a^2$

f(x) är symmetrisk runt k1,5, som korsar f(x) och y-axeln samtidigt. Där är mittpunkten $k_1 = k_2$ för de är varandras negativa/positiva motparter

Bedömningskommentar till exemplet: I lösningen undersöks derivatan för några positiva värden och deras negativa motsvarighet vilket anses uppfylla kraven för en godtagbar ansats. Resonemanget på de fyra sista raderna är otydligt och slutsats som behandlar att derivatan är lika stor för alla värden som har lika stort avstånd till *y*-axeln saknas. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 25.3 (2 C_R)

$f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2$ derivatan ger k-värdet

x anger var på ekvationen vi tar derivatan
men eftersom $f'(x)$ är en andragradsekvation
så kan vi lägga in ett positivt eller negativt
värde ex: -1 & 1 och ändå få samma k-värde

$-1^{\wedge 2} = 1$ & $1^{\wedge 2} = 1$

så länge det är samma siffra m olika tecken

ex 5, -5 6, -6 20, -20 etc.

$3 \cdot 5^2 = k_1$

$3 \cdot -5^2 = k_2$

$75 = 75$

$k_1 = k_2$

$3 \cdot a^2 = 3 \cdot -a^2$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang om derivatafunktionens egenskaper och varför derivatan får samma värde för positiva *x*-värden och deras negativa motsvarighet. Trots att det saknas parenteser runt negativa tal så anses lösningen uppfylla kraven för två resonemangspoäng på C-nivå.

Uppgift 26

Elevlösningsexempel 26.1 (2 A_{PL})

$f(x) = x^2 - 45x + 638{,}25$

a) $f'(x) = 2x - 45$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 22.5$

$A(x)$ då $x > 0$ och $x \leq 22{,}5$

↳ annars ≥ 0 om rektangeln kan försvinna

b) Övre gräns: $f(22{,}5) \cdot 22{,}5 = \cancel{2970}\ 2970$

Nedre gräns $f(0) \cdot 0 = 0$

$\boxed{0 \leq A \leq 2970}$

Bedömningskommentar till exemplet: I a)-uppgiften visar elevlösningen en korrekt definitionsmängd och uppfyller därmed kraven för problemlösningspoängen på A-nivå. I b)-uppgiften bestäms en nedre och övre gräns för arean där areafunktionen tecknas implicit genom att uttrycket $f(22,5) \cdot 22,5$ beräknas. Detta anses motsvara en godtagbar ansats. Eftersom areafunktionens extremvärden inte undersöks uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen. Sammantaget bedöms deluppgift a) och b) tillsammans ge två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 26.2 (2 A_{PL} och 1 A_K)

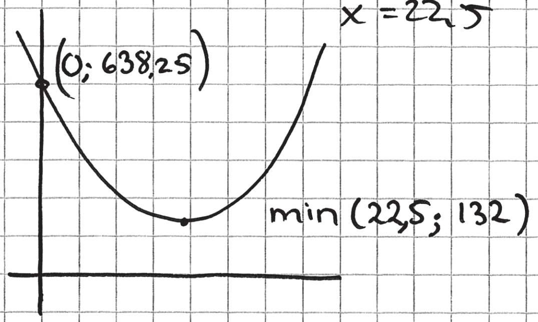
a) $f(x) = x^2 - 45x + 638.25$

$f'(x) = 2x - 45$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 45 = 0$

$2x = 45$

$x = 22,5$



$\Rightarrow$ Definitionsmängd för $A(x)$ $\quad 0 \leq x \leq 22,5$

b) $f(0) = 638,25$

$f(22,5) = 22,5^2 - 45 \cdot 22,5 + 638,25 = 132$

$A(x) = x \cdot f(x) = x^3 - 45x^2 + 638,25x$

$A'(x) = 3x^2 - 90x + 638,25$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 638,25 = 0$

PRGM: ANDRAGRD ger $x_1 = 18,5$
$x_2 = 11,5$

$A(11,5) = 11,5^3 - 45 \cdot 11,5^2 + 638,25 \cdot 11,25 = 2909,5$

$A(18,5) = 18,5^3 - 45 \cdot 18,5^2 + 638,25 \cdot 18,5 = 2738$

$A(0) = \cancel{2} \; 0$

Svar $0 < A \leq 2909,5$

Bedömningskommentar till exemplet: I a)-uppgiften bestäms en korrekt definitionsmängd och därmed uppfylls kraven för problemlösningspoängen på A-nivå. I b)-uppgiften anges en korrekt areafunktion. Areafunktionen deriveras och med digitalt hjälpmedel bestäms derivatans nollställen. Vidare beräknas areafunktionens lokala maximi- och minimivärde samt dess värde för den lägre intervallgränsen. Värdet för den övre intervallgränsen bestäms ej och därmed uppfylls inte kraven för den andra problemlösningspoängen på A-nivå.
När det gäller kommunikation är lösningen välstrukturerad, lätt att följa och förstå samt har lämpliga beteckningar och symboler. Sammantaget bedöms deluppgift a) och b) ge två problemlösningspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 26.3 (3 A_{PL} och 1 A_K)

a) $f(x) = x^2 - 45x + 638{,}25$

$f'(x) = 2x - 45 \Rightarrow$

$2x = 45$

$\underline{x = 22{,}5}$

$D_x: 0 < x \leq 22{,}5$

b) $A(x) = x(x^2 - 45x + 638{,}25)$

$= x^3 - 45x^2 + 638{,}25x$

$A'(x) = 3x^2 - 90x + 638{,}25$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 638{,}25 = 0$

$x^2 - 30x + 212{,}75 = 0$

$x = 15 \pm \sqrt{225 - 212{,}75}$

$x = 15 \pm \sqrt{12{,}25}$

$x = 15 \pm 3{,}5$

$x_1 = 11{,}5 \quad x_2 = 18{,}5$

$A(11{,}5) = 11{,}5^3 - 45 \cdot 11{,}5^2 + 638{,}25 \cdot 11{,}5 = 2909{,}5$

$A(18{,}5) = 18{,}5^3 - 45 \cdot 18{,}5^2 + 638{,}25 \cdot 18{,}5 = 2738$

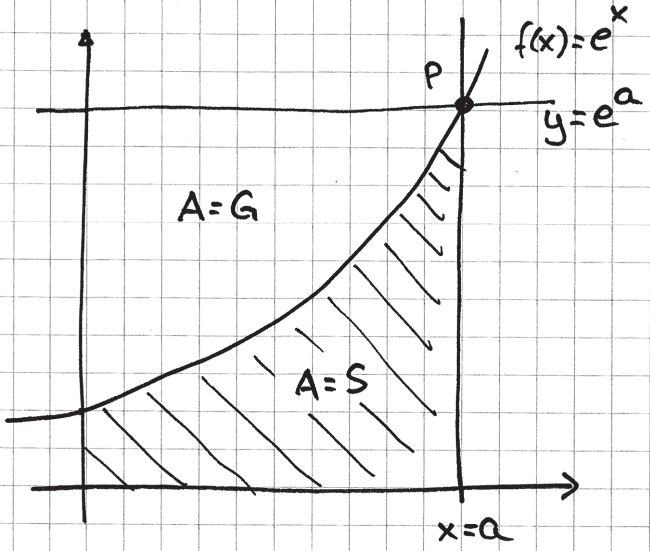
$A(22{,}5) = 22{,}5^3 - 45 \cdot 22{,}5 + 638{,}25 \cdot 22{,}5 = 2970$

Svar: $V_A: 0 < A \leq 2970$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt och behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation framgår det inte att derivatan sätts lika med noll i a)-uppgiften och $A(0)$ undersöks inte explicit i b)-uppgiften. I övrigt är lösningen välstrukturerad samt lätt att följa och förstå. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för tre problemlösningspoäng på A-nivå samt nätt och jämnt kraven för en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 27

Elevlösningsexempel 27.1 (1 A_{PL})



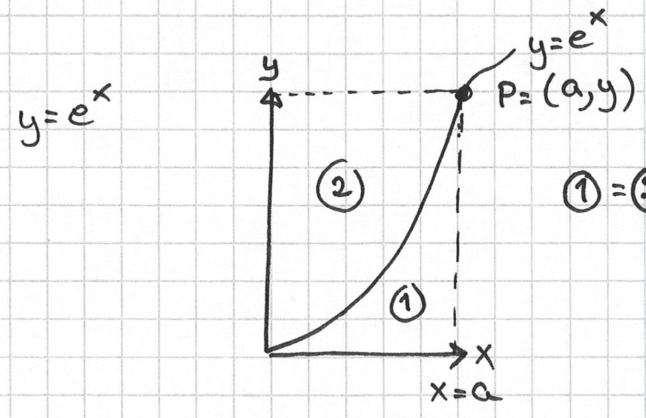
$$G = \int_0^a (e^a - e^x)\,dx = \left[e^a - e^x\right]_0^a = e^a - e^a - e^a + 1 = 1 - e^a$$

$$S = \int_0^a (e^x)\,dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - 1$$

$$G = S \Rightarrow$$

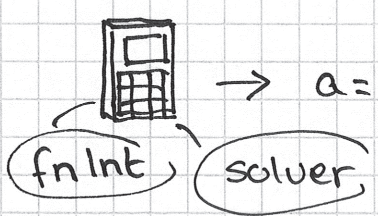
Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en tydlig figur med beteckningar för relevanta areaområden. Detta följs upp med korrekt tecknade integraluttryck för respektive area men integralen för G beräknas felaktigt. Genom att teckna ” $G = S$ ” visas att integralerna för respektive area ska sättas lika. Detta anses motsvara en godtagbar ansats och därmed uppfylls kraven för den första problemlösningspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27.2 (2 A_{PL})



$P=(a,e^a)$

$$a\cdot e^a - 2\cdot\int_0^a e^x\,dx = 0$$



$\rightarrow\ a=1,594$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen leder fram till ett korrekt svar men är knapphändig och därmed inte helt lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27.3 (2 A_{PL} och 1 A_K)

B = streckade området

$$B = \int_0^a e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1$$

C = Area av det gråmarkerade området

$$C = a \cdot e^a - (e^a - 1)$$

$$B = C$$

$$e^a - 1 = ae^a - (e^a - 1)$$

$$e^a - 1 + e^a - 1 = ae^a$$

$$2e^a - 2 = ae^a$$

Ritar två grafer sedan intersect

$$a \approx 1{,}594$$

Svar: $a \approx 1{,}594$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen är korrekt och behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå men det framgår inte vilken area som motsvaras av $a \cdot e^a$. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.