Delprov B	Uppgift 1–12. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 13–16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av ett muntligt delprov (delprov A) och tre skriftliga delprov (delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 23 E-, 24 C- och 19 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

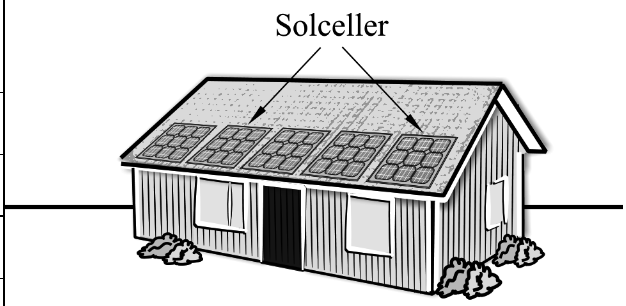
Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = e^{2x}$ $f'(x) =$ ____________________ (1/0/0)

2. Beräkna $7 - |-7|$ ____________________ (1/0/0)

3. I Skåne har antalet nätanslutna solcellsanläggningar ökat under de senaste fyra åren, se tabell.

Tidpunkt	Antal nätanslutna solcellsanläggningar
1 jan 2013	125
1 jan 2014	285
1 jan 2015	580
1 jan 2016	945
1 jan 2017	1325



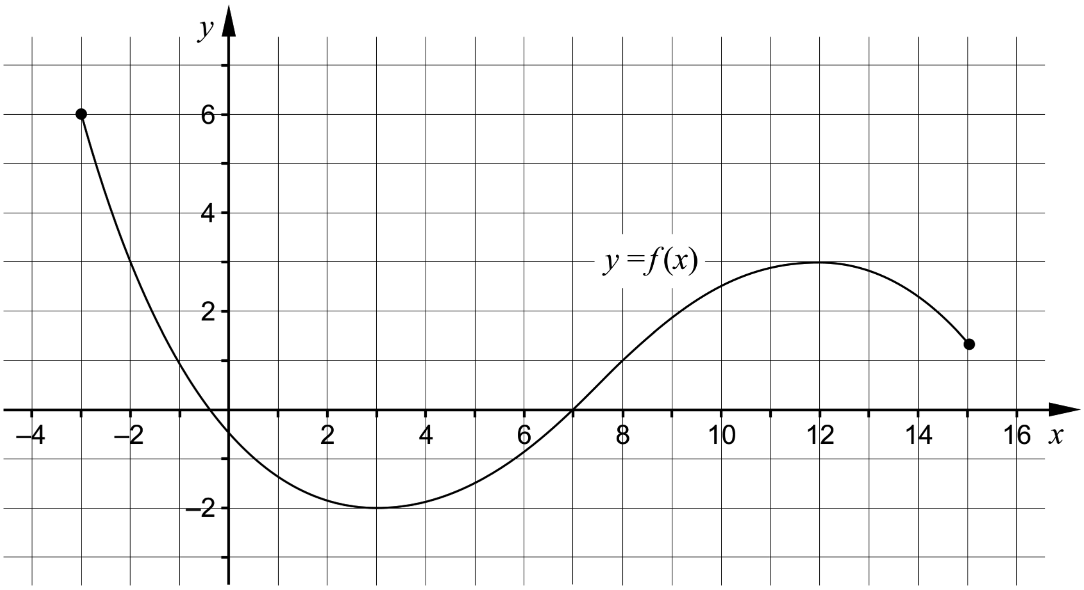
Använd tabellen och bestäm ändringskvoten för antalet nätanslutna solcellsanläggningar under fyraårsperioden.

____________________st/år (1/0/0)

4. Funktionen *f* har en primitiv funktion $F(x) = x^4 - 7x^2 + 10$

Ange en annan primitiv funktion *G* till funktionen *f*. $G(x) =$ ____________________ (1/0/0)

5. Figuren visar grafen till en funktion f som är definierad i intervallet $-3 \leq x \leq 15$. Grafen har en lokal maximipunkt i $(12,\ 3)$ och en lokal minimipunkt i $(3,\ -2)$.



Bestäm med hjälp av grafen

a) funktionens största värde ____________________ (1/0/0)

b) de värden på x för vilka det gäller att $f'(x) \geq 0$ och $f(x) \leq 1$ ____________________ (0/1/0)

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$ ____________________ (0/1/0)

6. Förenkla så långt som möjligt.

a) $\dfrac{x+3}{4x+12}$ ____________________ (1/0/0)

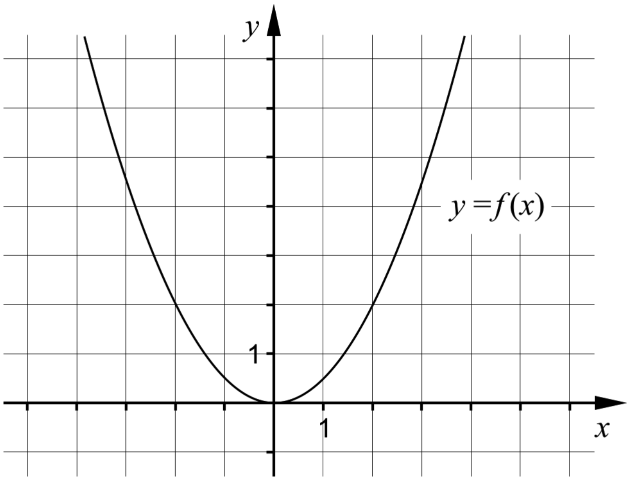
b) $(x+1)^3 - (3x+1)$ ____________________ (0/1/0)

c) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x^2 - x}$ ____________________ (0/1/0)

7. En cirkel har ekvationen $x^2 + x + 0,25 + y^2 - 2y + 1 = 4$

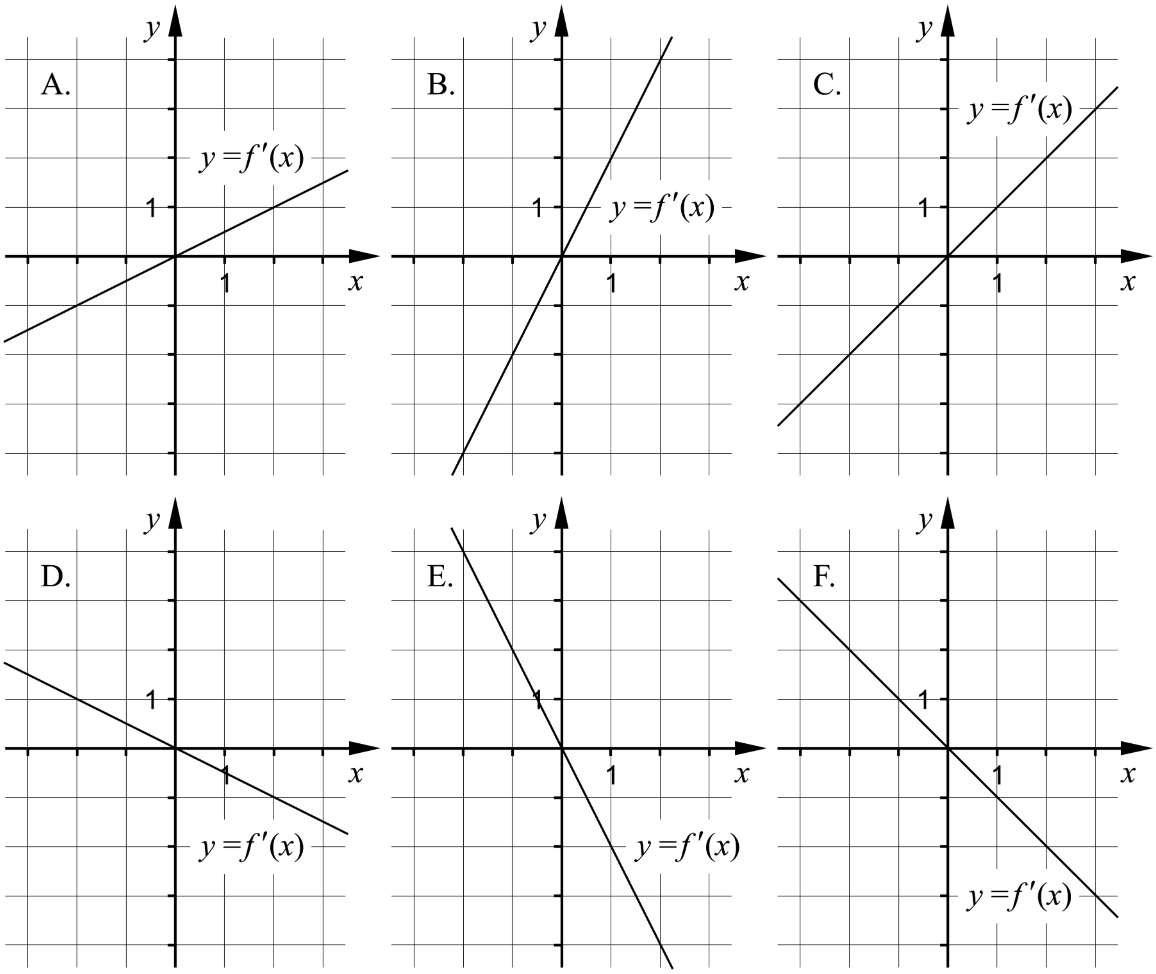
Bestäm cirkelns medelpunkt. ____________________ (0/1/0)

8. Figuren visar grafen till funktionen *f*.

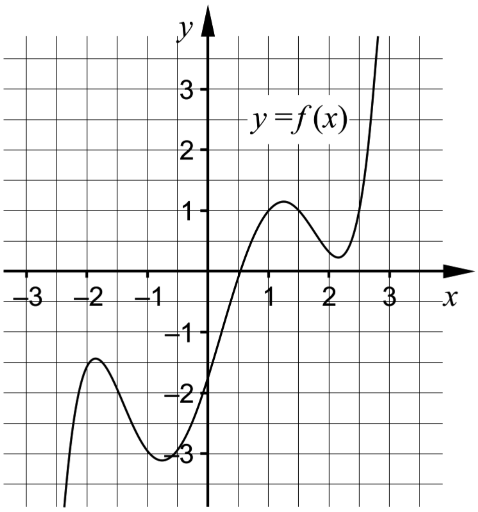


Ett av alternativen A–F visar grafen till funktionens derivata f'. Vilket?

_______________________ (0/1/0)



9. Figuren visar grafen till femtegradsfunktionen *f*.



a) Bestäm för vilket eller vilka värden på x som $f(x)=1$ och $f''(x)\geq 0$ ____________________ (0/1/0)

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen $f''(x)=0$ ____________________ (0/1/0)

10. Derivera och svara på enklaste form.

a) $f(x)=\dfrac{x^{\pi}}{\pi}+\pi x$ $f'(x)=$ ____________________ (0/1/0)

b) $g(x)=2^{-7x}\cdot 16^{2x}$ $g'(x)=$ ____________________ (0/0/1)

c) $h(x)=\dfrac{1-\sqrt{a}}{x^{-1-\sqrt{a}}}$ där a är en positiv konstant

$h'(x)=$ ____________________ (0/0/1)

11. Ange vilket av alternativen A–H som är det bästa närmevärdet till differenskvoten $\dfrac{2\cdot(-1+0,001)^5 - 2\cdot(-1)^5}{0,001}$

A. 0

B. 0,001

C. 1

D. 2

E. -4

F. $-4\,000$

G. 10

H. 20

_______________________ (0/0/1)

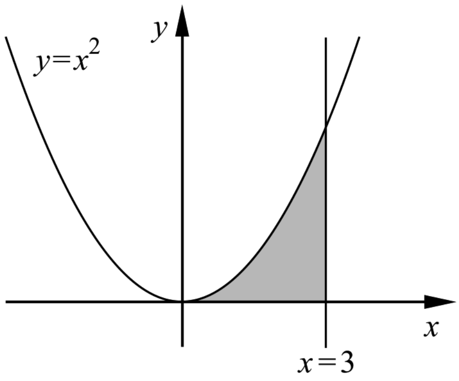
12. Ge ett exempel på en exponentialfunktion *f* för vilken det gäller att

- $f'(x) > 0$ för alla x
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

_______________________ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

13. Figuren visar ett markerat område som begränsas av x-axeln, kurvan $y = x^2$ och linjen $x = 3$



Beräkna områdets area. (2/0/0)

14. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 12x$.
Använd derivata och bestäm koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/1/0)

15. För en funktion f gäller att $f(x) = kx + m$

Undersök för vilka värden på k och m som $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

Motivera dina slutsatser. (0/2/1)

16. Två tangenter till kurvan $y = x^2 - 2x$ skär varandra i punkten $(0, -5)$.

Bestäm de två tangeringspunkterna. (0/0/3)

Delprov D	Uppgift 17–27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av ett muntligt delprov (delprov A) och tre skriftliga delprov (delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 23 E-, 24 C- och 19 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____

Födelsedatum: ______________________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ____________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Funktionen f är en tredjegradsfunktion. Kim påstår att f' är en fjärdegradsfunktion.

Har Kim rätt? Motivera ditt svar. (1/0/0)

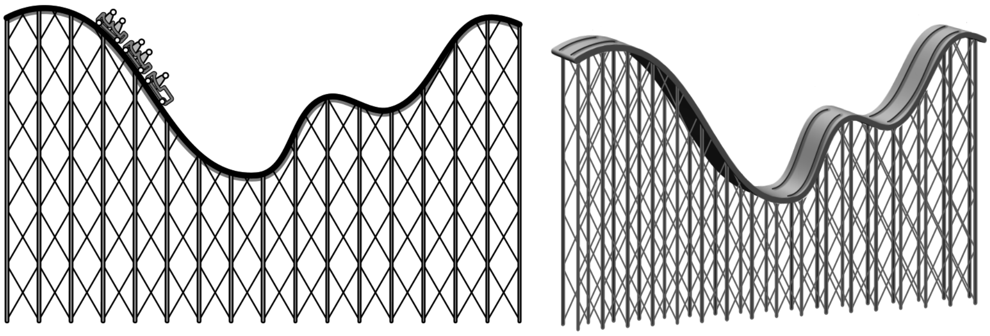
18. Ekvationen $x^3 = 12 - 4x$ har en reell lösning. Bestäm denna lösning med hjälp av ditt digitala verktyg. Svara med 3 decimalers noggrannhet.

Endast svar krävs (1/0/0)

19. För funktionen f gäller att $f'(x) = 5x^4$
Bestäm $f(x)$ så att $f(3) = 197$ (2/0/0)

20. För vinkeln v gäller att $\sqrt{2} \cdot \sin v = 1$ och $0° \leq v \leq 180°$
Bestäm $\cos(v + 45°)$ (2/1/0)

21. Conrad åker berg- och dalbana. I en del av berg- och dalbanan kan banans höjd över marken beskrivas med funktionen h där $h(x)$ är höjden i meter över marken och x är sträckan i meter längs marken.

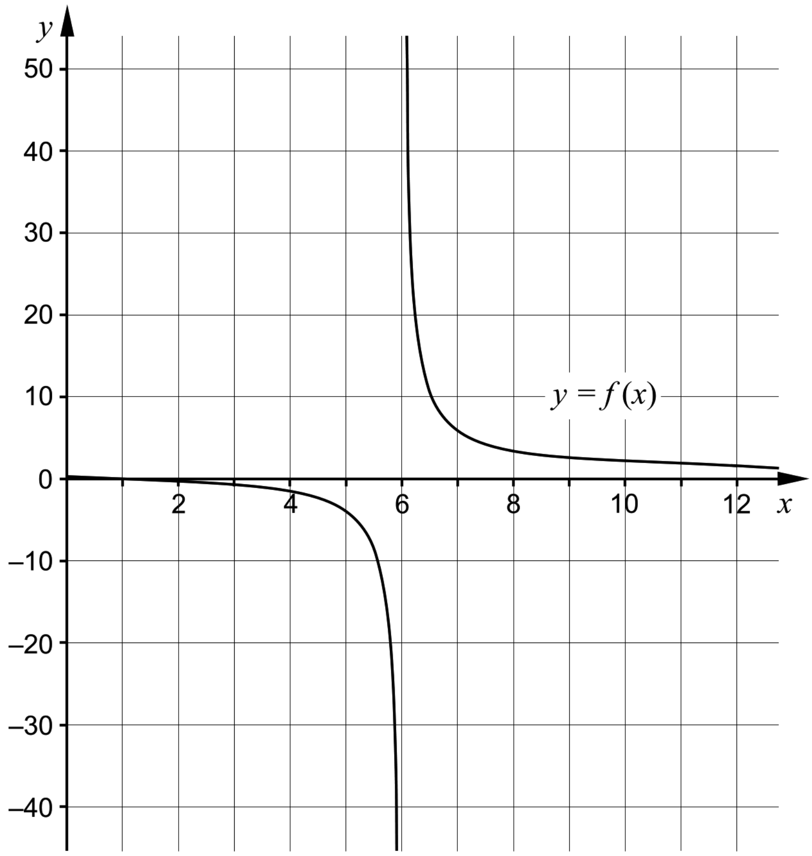


Vid ett visst tillfälle gäller följande tre villkor där Conrad befinner sig:

- $h(50) = 3$
- $h'(50) = 0$
- $h''(50) > 0$

Förklara vad dessa tre villkor tillsammans säger om berg- och dalbanan där Conrad befinner sig. (0/2/0)

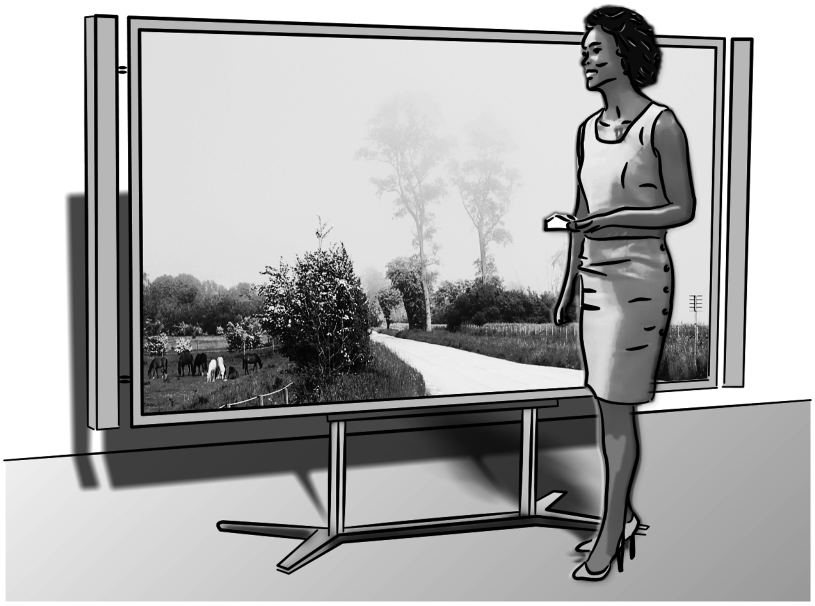
22. Sofia ritar upp grafen till $f(x) = \dfrac{x-1}{x-6}$, se figur.



a) Sofia påstår att: ”Största värdet nås när $x = 6$”
Har hon rätt? Motivera. (1/0/0)

b) Sofia påstår att: ”För $x > 6$ är funktionens minsta värde 1”
Har hon rätt? Motivera. (0/1/1)

23. Hamisa köper en tv i 4K-format för 33 700 kr. Värdet av Hamisas tv kan beskrivas med den förenklade modellen $V(t) = 33\,700\,\mathrm{e}^{-0{,}0348 \cdot t}$ där $V(t)$ är värdet av tv:n i kronor och t är tiden i månader efter inköpet.



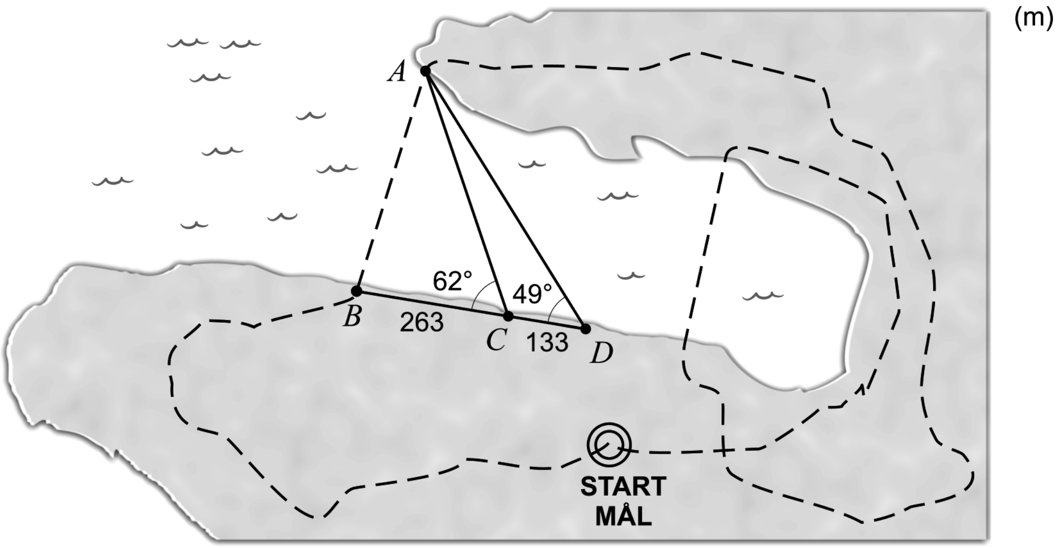
a) Beräkna efter hur många månader som Hamisas tv är värd hälften så mycket som vid inköpet. (2/0/0)

Det är möjligt att köpa denna tv på avbetalning. Inklusive ränta och andra avgifter innebär det en kostnad på 488 kronor per månad under 72 månader.

b) Ett visst antal månader efter inköpet är värdet av Hamisas tv lika stort som summan av de kvarvarande inbetalningarna. Utgå från modellen och bestäm när detta sker. (0/0/2)

24. Sekanten $y = 0,2x + 1$ skär kurvan $y = x^2 - 0,8x - 100$
Bestäm ekvationen för den tangent till kurvan som är parallell med sekanten. (0/3/0)

25. Swimrun är en sport där man springer och simmar ett antal sträckor, utan att stanna emellan. Deltagarna växlar alltså mellan löpning och simning flera gånger under samma lopp. Figuren visar en bana i en swimruntävling.



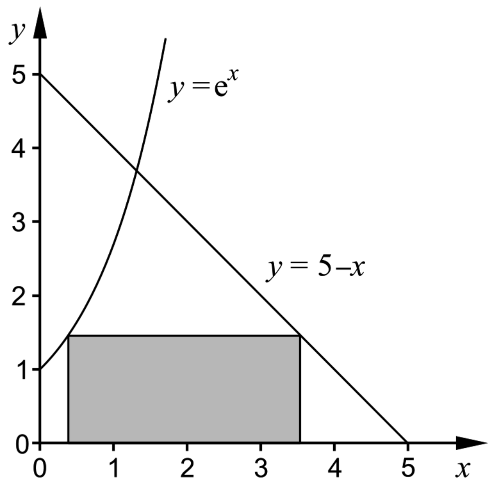
Arrangören vill bestämma simsträckan mellan punkt *A* och *B* och mäter därför upp sträckor och vinklar enligt figuren. Punkterna *B*, *C* och *D* ligger på en rät linje.

Använd figuren och bestäm längden på simsträckan mellan punkt *A* och *B* genom att använda någon eller några av area-, sinus- och cosinussatsen. (0/3/0)

26. För funktionen *f* gäller att $f(x) = (x+a)\cdot(x+b)$ där *a* och *b* är konstanter.

Visa att $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x+b}$ (0/1/1)

27. En rektangel har ett hörn på kurvan $y = e^x$, ett hörn på linjen $y = 5 - x$ och två hörn på x-axeln. Rektangeln ligger i första kvadranten och ingen del av rektangeln ligger ovanför de två kurvorna, se figur.



a) Ställ upp ett uttryck för arean av rektangeln utryckt i en variabel. (0/0/2)

b) Bestäm den maximala arean för rektangeln. Svara med minst en decimals noggrannhet. (0/0/2)

Till eleven – information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *”Hur?”* och en förklaring svarar på frågan *”Varför?”*. Du beskriver något när du till exempel berättar hur du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar varför du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.
Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1

Namn:___________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Ett område begränsas av de positiva koordinataxlarna, kurvan $y = x^2 + 4$, linjen $y = 19 - 2x$ samt linjen $x = 5$
Beräkna områdets area.

Uppgift 2

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Grafen till $f(x) = 0,5x^4 - x^2 + 5$ har tre extrempunkter.

- Använd derivata för att bestämma koordinater och karaktär för dessa.
- Använd extrempunkterna för att skissa grafen.

Uppgift 3

Namn:___________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Det finns två olika trianglar som båda uppfyller följande villkor:

- En sida har längden 14 cm och en annan sida har längden 35 cm.
- En vinkel är $47°$

Bestäm arean av respektive triangel.

Uppgift 4

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Kurvan $y = ax^3 + bx^2$, där a och b är konstanter, går genom $(1, 2)$ och $(2, 28)$. En rät linje tangerar kurvan i $(2, 28)$.

Bestäm ekvationen för den räta linjen.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehållsförteckning

Inledning

På uppdrag av regeringen ansvarar Skolverket för samtliga nationella prov. Syftet med de nationella proven är i huvudsak att

- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapskraven uppfylls på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

De nationella proven kan också bidra till

- att konkretisera kurs- och ämnesplanerna
- en ökad måluppfyllelse för eleverna.

Det är rektorn som ansvarar för organisationen omkring provet på skolan och för att leda och fördela arbetet.

Läsanvisning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 3c. Häftet består av 6 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma elevernas prestationer på de olika delproven (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanställningen till ett provbetyg (kapitel 4). De två avslutande kapitlen innehåller instruktioner för inrapportering av provresultat (kapitel 5) samt kopieringsunderlag och hänvisningar till webbmaterial (kapitel 6).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 3c

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges de poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

Uppgifter av kortsvarstyp

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

Uppgifter av långsvarstyp

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. (Eventuella avvikelser från dessa modeller kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.)

Modell 1

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen kan falla ut först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2

Godtagbar ansats, t.ex. …	$+1\ E_P$
med korrekt bestämning av…	$+1\ E_P$
Godtagbar verifiering av…	$+1\ E_P$

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … $1\ E_R$	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$ och $1\ C_R$	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Förklaring av modellen: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

I samband med vissa uppgifter ska elevens skriftliga kommunikativa förmåga bedömas. Då gäller följande krav:

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int \mathrm{d}x$, bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

Sammanställning av elevresultat

När eleven har genomfört de olika delproven noteras resultaten i ”Formulär för sammanställning av elevresultat” som finns i kapitel 6. Syftet med formuläret är att underlätta för läraren att sammanställa och rapportera in elevens resultat. Det kan också användas vid samtal med eleven om provresultatet.

Sammanställning till ett provbetyg

När samtliga delprov är genomförda ska resultaten summeras till ett provbetyg. Information om hur summeringen går till finns i kapitel 4.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($f'(x) = 2e^{2x}$)	+1 E_P
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (0)	+1 E_B
3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (300 st/år)	+1 E_B
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (t.ex. $G(x) = x^4 - 7x^2 + 5$)	+1 E_B
	Kommentar: Svaret $G(x) = x^4 - 7x^2 + C$ ges noll poäng.	
5.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (6)	+1 E_B
	Kommentar: Svaren $(-3,\ 6)$ och $\begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$ ges noll poäng.	
b)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($3 \le x \le 8$)	+1 C_B
c)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (0,5)	+1 C_B
	Kommentar: Svar inom intervallet $0,4 \le f'(5) \le 0,6$ ges poäng.	

6.		**Max 1/2/0**
a)	Korrekt svar $\left(\frac{1}{4}\right)$	+1 E_P
b)	Korrekt svar (x^3+3x^2)	+1 C_P
	Kommentar: Även svaret $x^2(x+3)$ ges poäng.	
c)	Korrekt svar $\left(\frac{2}{x}\right)$	+1 C_P

7.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar $((-0,5\,;1))$	+1 C_B

8.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar (C)	+1 C_B

9.		**Max 0/2/0**
a)	Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (2,5)	+1 C_B
b)	Korrekt svar (3)	+1 C_B

10.		**Max 0/1/2**
a)	Korrekt svar ($f'(x)=x^{\pi-1}+\pi$)	+1 C_P
	Kommentar: Även svaret $f'(x)=x^{2,14}+3,14$ ges poäng.	
b)	Korrekt svar ($g'(x)=2^x\cdot\ln 2$)	+1 A_P
c)	Korrekt svar ($h'(x)=(1-a)x^{\sqrt{a}}$)	+1 A_P
	Kommentar: Även svaret $h'(x)=x^{\sqrt{a}}-ax^{\sqrt{a}}$ ges poäng.	

11.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar (G: 10)	+1 A_B

12. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t.ex. $f(x) = -2 \cdot 0{,}5^x$) +1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar integralen $\int_0^3 x^2\, dx$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (9 a.e.) +1 E_P

Kommentar: Även ett svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

14. **Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställen, $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$
eller
bestämmer ett av derivatans nollställen och en extrempunkts koordinater +1 E_P

med korrekt bestämning av båda extrempunkternas koordinater,
$(-2,\ 16)$ och $(2,\ -16)$ +1 E_P

Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär
(maximipunkt $(-2,\ 16)$ och minimipunkt $(2,\ -16)$) +1 E_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

15. **Max 0/2/1**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer en korrekt primitiv funktion,
$F(x) = \frac{kx^2}{2} + mx$ +1 C_P

med godtagbart välgrundat resonemang med slutsatsen att $m = 1$ +1 C_R

Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang med slutsatsen att k kan anta vilket värde som helst +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

16. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer y' och tecknar ekvationen

$$2a-2=\frac{a^2-2a-(-5)}{a-0}$$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
($P_1=(\sqrt{5},\ 5-2\sqrt{5})$ och $P_2=(-\sqrt{5},\ 5+2\sqrt{5})$) +1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

Instruktioner för bedömning av delprov D

17. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang som inkluderar en enkel motivering till varför Kim har fel (t.ex. ”Kim har fel för det är en andragradare”) +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

18. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($x=1,722$) +1 E_P

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer ett allmänt uttryck för funktionen +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($f(x)=x^5-46$) +1 E_{PL}

20. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer en vinkel, t.ex. $v=45°$ +1 E_{PL}

med godtagbar bestämning av ett av de två värdena för $\cos(v+45°)$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0 eller –1) +1 C_{PL}

21. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, beskriver berg- och dalbanan där Conrad befinner sig godtagbart utifrån minst två av villkoren +1 C_M

med godtagbar fullständig beskrivning av berg- och dalbanan där Conrad befinner sig (t.ex. ”50 meter bort och 3 meter över marken, längst ner i en dal”) +1 C_M

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

22. **Max 1/1/1**

a) Godtagbart enkelt resonemang där det framgår att Sofia har fel, baserat på att största värde saknas *eller* baserat på att funktionen inte är definierad då $x = 6$ +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

b) Godtagbar ansats, påbörjar ett välgrundat resonemang, t.ex. tecknar ekvationen $1 = \frac{x-1}{x-6}$ +1 C_R

med slutfört välgrundat och nyanserat resonemang som visar att funktionsvärdet aldrig kan bli 1 och att Sofia därför har fel +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

23. **Max 2/0/2**

a) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $16\,850 = 33\,700\,\mathrm{e}^{-0{,}0348 \cdot t}$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (20 månader) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, tecknar ekvationen $488 \cdot 72 - 488 \cdot t = 33\,700\,\mathrm{e}^{-0{,}0348 \cdot t}$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar grafisk/numerisk lösning med godtagbart svar (65 månader) +1 A_M

24. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $2x-0,8=0,2$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y=0,2x-100,25$) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

25. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer vinklarna i triangeln *ACD* och någon av sidorna *AC* eller *AD* +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (398 m) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

26. **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer $f'(x)=2x+a+b$ +1 C_P

med slutfört välgrundat och nyanserat resonemang där det visas att $\text{VL}=\text{HL}$ +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

27. **Max 0/0/4**

a) Godtagbar ansats, tecknar ett uttryck för arean där något av funktionsuttrycken används, t.ex. $A=\mathrm{e}^{x_1}\cdot(x_2-x_1)$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex. $A=\mathrm{e}^{x}(5-\mathrm{e}^{x}-x)$) +1 A_{PL}

b) Godtagbar grafisk/numerisk lösning med godtagbart svar (4,7 a.e.) +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Kommentar: Även svar utan enhet godtas.

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

Uppgift 13.

Elevlösningsexempel 13.1 (1 E_B och 1 E_P)

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$A = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9$$

Svar: 9 areaenheter

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats trots att ingen integral tecknats och att *C* saknas i bestämningen av den primitiva funktionen. I övrigt är lösningen godtagbar och ges sammantaget nätt och jämnt en begreppspoäng på E-nivå och en procedurpoäng på E-nivå.

Uppgift 14.

Elevlösningsexempel 14.1 (1 E_P)

$$f(x) = x^3 - 12x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

		2	
	↘		↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$$

Svar: Funktionen har ett min i punkten $(2, -16)$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms endast ett av derivatans nollställen samt endast en extrempunkts koordinater vilket anses motsvara kraven för den första procedurpoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (3 EP)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ $\quad f''(x) = 6x$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$

$(-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 - (-24) = 16$

$6 \cdot 2 = 12$

$6 \cdot (-2) = -12$

Svar: $(2,-16)$ min , $(-2,16)$ max

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen otydlig då såväl symbolerna $f(2)$, $f(-2)$, $f''(2)$ och $f''(-2)$ som en förklaring till varför den ena punkten är ett minimum och den andra är ett maximum saknas. Sammantaget ges elevlösningen tre procedurpoäng på E-nivå

Elevlösningsexempel 14.3 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$x_1 = 2 \quad f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$

$x_2 = -2 \quad f(-2) = -2^3 - 12 \cdot -2 = -8 - -24 = 16$

$(2, -16)$ minpunkt $\quad (-2, 16)$ maxpunkt

x	-4	-2	0	2	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Bedömningskommentar till exemplet: Uppgiften är löst i sin helhet inklusive verifiering av extrempunkter. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att den är lite kortfattad, att det felaktiga skrivsättet ” $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ ” används, att parenteser runt negativa tal saknas och att de beräkningar som ligger bakom teckenschemat inte redovisas. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15.

Elevlösningsexempel 15.1 (1 C_P och 1 C_R)

$f(x) = kx + m$

$$\int_{-2}^{2} (kx+m)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2} + mx\right]_{-2}^{2} = \frac{k\cdot 2^2}{2} + m\cdot 2 - \left(\frac{k\cdot(-2)^2}{2} - 2m\right) =$$

$= 2k + 2m - 2k + 2m = 4m = 4$, $m = 1$

$k = 2$ $\quad \int_{-2}^{2} (2x+1)\,dx = \left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_{-2}^{2} = 4 + 2 - (4 - 2) = 4$

$k = -5$ $\quad \int_{-2}^{2} (-5x+1)\,dx = \left[-5\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{2} = -5\cdot 2 + 2 - (-5\cdot 2 - 2) = 4$

$k = 0$ $\quad \int_{-2}^{2} 1\,dx = \left[x\right]_{-2}^{2} = 2 - (-2 = 4$

Alltså $m = 1$ och k kan vara allt möjligt!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför $m = 1$ men ingen välgrundad motivering till varför k kan anta alla värden, eftersom endast specialfall undersöks. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 15.2 (1 C_P och 1 C_R)

$f(x) = kx + m$

$$\int_{-2}^{2} (kx+m)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2} + mx\right]_{-2}^{2} = 2k + 2m - (2k - 2m) = 4m = 4$$

SVAR: $m = 1$ och k kan vara vad som helst!

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en välgrundad motivering till varför $m = 1$ men ingen motivering till varför k kan anta alla värden. Elevlösningen ges en procedur- och en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 15.3 (1 C_P, 1 C_R och 1 A_R)

$$f(x)=kx+m$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}(kx+m)\,dx = \left[0{,}5kx^2+mx\right]_{-2}^{2} =$$

$$= F(2)-F(-2) = (0{,}5k\cdot 4+2m)-(0{,}5k\cdot 4-2m) =$$

$$= 2k+2m-2k+2m = 2m+2m = 4m$$

$$4m=4$$

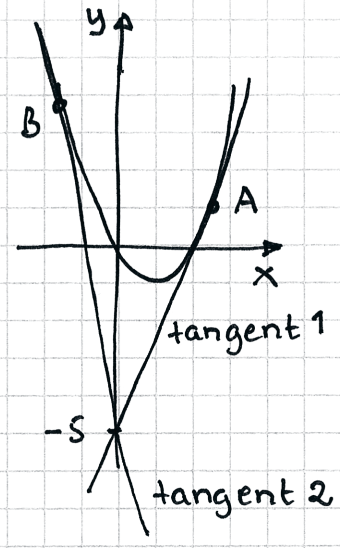
$$m=1$$

Eftersom k kan förenklas bort i integralen, kan k anta alla värden och m måste vara 1.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar godtagbara välgrundade slutsatser om k och m.

Uppgift 16.

Elevlösningsexempel 16.1 (2 A_{PL} och 1 A_K)



$y = x^2 - 2x$

$y' = 2x - 2$ kurvans lutning i A & B

Tangentens lutning:

$k_{tang} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$k_{tang} = \dfrac{x^2 - 2x - (-5)}{x - 0} =$

$= \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x}$

Kurvans lutning & tangentens lutning samma i A & i B. →

$\dfrac{x^2 - 2x + 5}{x} = 2x - 2$

$x^2 - 2x + 5 = 2x^2 - 2x$

$5 = x^2$

$x = \pm\sqrt{5}$

$x = \sqrt{5} \rightarrow y = 5 - 2\sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5} \rightarrow y = 5 + 2\sqrt{5}$

Svar $(\sqrt{5};\ 5 - 2\sqrt{5})$ punkt A

$(-\sqrt{5};\ 5 + 2\sqrt{5})$ punkt B

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar metod med korrekt svar. När det gäller kommunikation finns en tydlig figur och lösningen är lätt att följa och förstå. Dock används *x* som både variabel och konstant. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 17.

Elevlösningsexempel 17.1 (1 E_R)

Kim har fel. Exponenten minskas alltid vid derivering.

Så en tredjegradsfunktion kan inte bli en fjärdegradsfunktion.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen ger en godtagbar motivering till varför Kim har fel. Påståendet ”Exponenten minskas alltid…” är något otydligt men då det i uppgiftstexten framgår att uppgiften handlar om en polynomfunktion bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 21.

Elevlösningsexempel 21.1 (0 poäng)

$h(50)=3$ punkten $(50,3)$

$h'(50)=0$ lutningen är noll

$h''(50)>0$ minpunkt

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt matematisk tolkning av villkoren men däremot kopplas inte detta till berg- och dalbanans utseende där Conrad befinner sig. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 21.2 (1 C_M)

Berg o dalbana

h(50)=3   50m bort går banan 3m över marken

h'(50)=0   höjdförändringen är noll efter 50 m

h''(50)>0   Banan är i sitt lägsta läge

h(x)= höjd i meter över marken

x= längd i meter längs marken

Svar: 50 m bort går banan 3 m över marken och där är höjdförändringen noll. Detta är banans lägsta läge

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats då de två första villkoren tolkas korrekt. I den fortsatta beskrivningen tolkas det tredje villkoret som att berg- och dalbanan har en global minimipunkt där Conrad befinner sig vilket inte går att avgöra utifrån villkoren. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 21.3 (2 C_M)

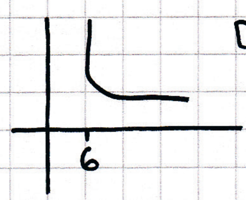
När han har åkt 50m befinns han 3m över marken. Han befinner sig mitt i en dal.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar beskrivning av berg- och dalbanan utifrån de tre villkoren även om det görs indirekt genom Conrads position. Uttrycket ”mitt i en dal” är något otydligt men sett till kontexten i uppgiften anses detta godtagbart. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 22a

Elevlösningsexempel 22a.1 (1 E_R)

Sofia har fel eftersom att x-värdet aldrig når 6, den snuddar ifrån 6:an



Den når aldrig fram till punkt 6.

x-värdet blir aldrig 6.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som beskriver att funktionen inte är definierad för $x = 6$ även om det inte anges explicit. Lösningen bedöms nätt och jämt uppfylla kraven för resonemang på E-nivå.

Elevlösningsexempel 22a.2 (1 ER)

$f(6) = \frac{5}{0}$ Svaret är odefinierat. hon har fel.

Elevlösningsexempel 22a.3 (1 ER)

När x=6 är inte y bestämt
eftersom att grafen är diskont-
nuerlig, vilket betyder att y är ej
bestämt när x=6; så nej hon har inte rätt

Elevlösningsexempel 22a.4 (1 ER)

Nej, x kommer aldrig bli 6. Man kan inte dela
något med noll

Bedömningskommentar till exemplen: Elevlösning 2–4 visar godtagbara enkla resonemang som anses uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 22b.

Elevlösningsexempel 22b.1 (0 poäng)

Nej, i x-led närmar sig y-värdet 1, men
det kommer aldrig att uppnå det, alltså
kan det minsta värdet närma sig 1 men
det kommer aldrig att att vara 1

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som inte anses vara välgrundat eftersom det inte styrks av exempelvis beräkningar. Dessutom antyds att minsta värde existerar. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösningsexempel 22b.2 (1 CR)

$1 = \frac{x-1}{x-6}$

$x-6 = x-1$

$0x = 5$???

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar ansats och uppfyller därmed kraven för en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 22b.3 (1 C_R och 1 A_R)

Funktionens värde när $x>6$ kan inte bli 1

Vid en prövning $f(x)=1$ ger det $1 = \frac{x-1}{x-6}$

$x-6 = x-1$

$x = x+5$

vilket är omöjligt

Däremot så närmar sig funktionsvärdet mot 1 men det kommer aldrig ner till 1.

Bedömningskommentar till exemplet: Det inledande resonemanget visar varför Sofias påstående är felaktigt och bedöms därför uppfylla kraven för resonemangspoängen på C- och A-nivå. Kommentaren i slutet av lösningen ”Däremot så närmar sig funktionsvärdet…” visar på förståelse men behövs inte för att vederlägga Sofias påstående.

Elevlösningsexempel 22b.4 (1 C_R och 1 A_R)

För att det ska kunna bli 1 så måste både täljare och nämnare vara lika stora

$x-1 = x-6$ ger inget svar och därför kan inte värdet bli 1.

hon har fel.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar ett resonemang som bygger på att täljare och nämnare aldrig kan vara lika stora och att Sofias påstående därför är felaktigt. Lösningen uppfyller därmed kraven för resonemangspoäng på C- och A-nivå.

Uppgift 24.

Elevlösningsexempel 24.1 (2 C_{PL})

$y_1 = 0{,}2x + 1$ $\quad$ $y_2 = x^2 - 0{,}8x - 100$

$y_3 = kx + m$ $\quad$ $y'_2 = 2x - 0{,}8$

$k = 0{,}2 \quad m \neq 1$ $\quad$ $0{,}2 = 2x - 0{,}8$

$1 = 2x \quad , \quad x = 0{,}5$

$y_3 = 0{,}2x + m$

$y_2 = 0{,}5^2 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 100$

$-100{,}15 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 + m$

$m = -100{,}25$ $\quad$ $y_2 = 0{,}25 - 0{,}4 - 100 = -100{,}15$

Svar $y = 0{,}2x - 100{,}25$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar metod med korrekt svar. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå dessutom saknas förklarande text eller förklarande figur. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Uppgift 25.

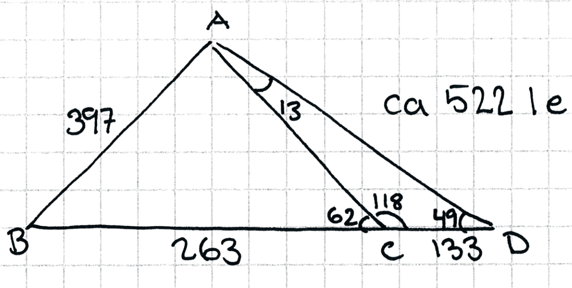
Elevlösningsexempel 25.1 (0 poäng)

Ritar in triangeln i Geogebra och tar sträckan AB.

Svar: 398 m

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en lösning där triangelsatserna inte använts och ges därmed noll poäng.

Elevlösningsexempel 25.2 (2 CPL)



$$\frac{\sin 13}{133} = \frac{\sin 118}{AD} =$$

$$= AD = \frac{\sin 118}{\left(\frac{\sin 13}{133}\right)} = 522{,}0336939$$

$\boxed{\text{cosinussatsen}}$

$$AB^2 = 396^2 + 522^2 - 2 \cdot 396 \cdot 522 \cdot \cos 49 =$$

$$= \sqrt{158104} = \sqrt{AB^2}$$

$$AB = 397{,}6237287$$

Svar: Simsträckan är ca 397 m lång.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med ett felaktigt svar men eftersom rätt svar angivits på raden ovanför anses detta godtagbart. När det gäller kommunikation så finns en tydlig figur och en hänvisning till cosinussatsen. Däremot används likhetstecknet på ett felaktigt sätt, längdenheter anges istället för meter i figuren, gradtecken saknas liksom hänvisning till sinussatsen. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 25.3 (2 C_{PL} och 1 C_{K})

För att hitta en till vinkel vid punkt C:

$180-62=118$

$180-118-49=13$

ACD-triangeln har vinklarna $13°$ o $118°$ o $49°$

Räkna ut AC-sträckan (sinussatsen):

$$\frac{\sin 49°}{AC}=\frac{\sin 13°}{133} \Rightarrow \frac{133\cdot\sin 49}{\sin 13}=AC \Rightarrow AC\approx 446,2\text{ m}$$

Cosinussatsen:

$$AB^2=446,2^2+263^2-2\cdot 446,2\cdot 263\cdot\cos 62°$$

$$AB=\sqrt{446,2^2+263^2-2\cdot 446,2\cdot 263\cdot\cos 62°}$$

$$AB\approx 397,59$$

Svar: 398 m

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med ett korrekt svar vilket anses uppfylla kraven för två problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikationen hänvisas till relevanta satser och lösningen är möjlig att följa och förstå. Inledningen ”en till vinkel vid punkt C” är något otydlig men eftersom det framgår på rad 3 vilken vinkel som avses så väger detta upp otydligheten. Utöver detta saknas gradtecken på flera ställen. Trots dessa brister anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 26.

Elevlösningsexempel 26.1 (1 C_P och 1 A_R)

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{x+b+x+a}{(x+a)(x+b)}=\frac{2x+b+a}{(x+a)(x+b)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x+a)(x+b) = x^2+bx+ax+ab \\ f'(x) &= 2x+b+a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x+b+a}{(x+a)(x+b)}$$

samma

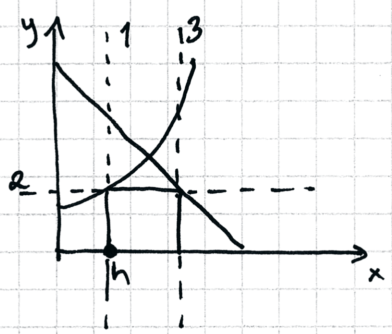
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att likheten stämmer även om det inte är helt tydligt att det är VL = HL som visas. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 27.

Elevlösningsexempel 27.1 (1 A_{PL})

a) –

b) Skriver in funktionerna i Geogebra och sätter ut h. Vinkelräta linjer 1,2,3. Drar i punkten h och får max.



Svar: 4,7

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning på b)-uppgiften där ett digitalt hjälpmedel använts för att lösa problemet. I och med att a)-uppgiften inte är löst uppfyller lösningen inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27.2 (3 A_{PL})

a) Anta att höjden är h.

$h = e^x$, $x = \ln h$ $\qquad$ $h = 5 - x$, $x = 5 - h$

$a(h) = h(5 - h - \ln h) = 5h - h^2 - h \cdot \ln h$

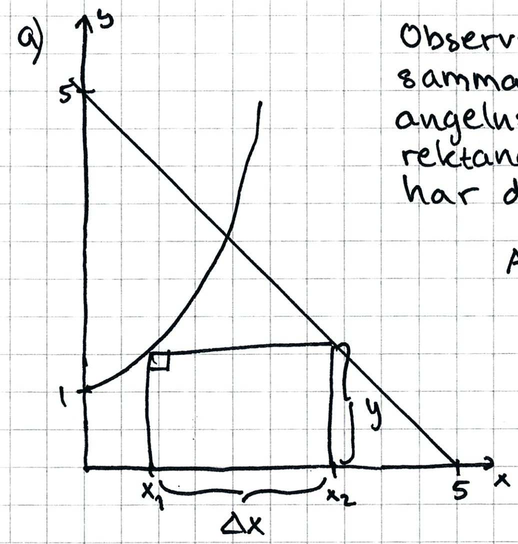
b) Ritar in funktionen på Geogebra och tar max-funktionen.

Svar: 4,7 a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar i både a)- och b)-uppgiften. När det gäller kommunikation är lösningen något kortfattad. Dessutom behandlas *x* felaktigt i a)-uppgiften då *x* inte nödvändigtvis behöver ha samma värde i de båda ekvationerna. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen tre problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27.3 (3 APL och 1 AK)

a)



Observera att $y=e^x$ och $y=5-x$ har samma funktionsvärde i rektangelns hörn, då vinklarna mellan rektangelns sidor är räta. Dock har de olika x-värden, x_1 och x_2

Alltså: $\begin{cases} y=e^{x_1} \\ y=5-x_2 \end{cases}$

Rektangelns area kan uttryckas som $y\cdot\Delta x$, där y är (det gemensamma) funktionsvärdet för $y=e^{x_1}$ och $y=5-x_2$ och Δx är skillnaden i funktionens x-värde i rektangelns två hörn. Formulera Areafunktionen A.

$$A=y\cdot\Delta x=y(x_2-x_1)=e^{x_1}(x_2-x_1)=(5-x_2)(x_2-x_1)$$

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}\begin{cases} y=e^{x_1} \\ y=5-x_2 \end{cases}$$

Sätt I = II

$$e^{x_1}=5-x_2$$

$$x_2=5-e^{x_1}$$

Sätter in detta värde i funktionen A:

$$A=y\cdot\Delta x=e^{x_1}(5-e^{x_1}-x_1)$$

b) Med hjälp av grafräknaren och användning av calc-maximum får vi att maxvärdet för funktionen A är $A\approx 4{,}709$

Svar: Maximal area är 4,709 a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar lösning med korrekt svar i både a)- och b)-uppgiften. När det gäller kommunikation finns en tydlig bild och lösningen är lätt att följa och förstå. Sammantaget anses lösningen uppnå kraven för tre problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.