| | |
|---|---|
| **Delprov B** | Uppgift 1–8. Endast svar krävs. |
| **Delprov C** | Uppgift 9–18. Fullständiga lösningar krävs. |
| **Provtid** | 150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans. |
| **Hjälpmedel** | Formelblad och linjal. |

**Kravgränser** Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

**Delprov B:** Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

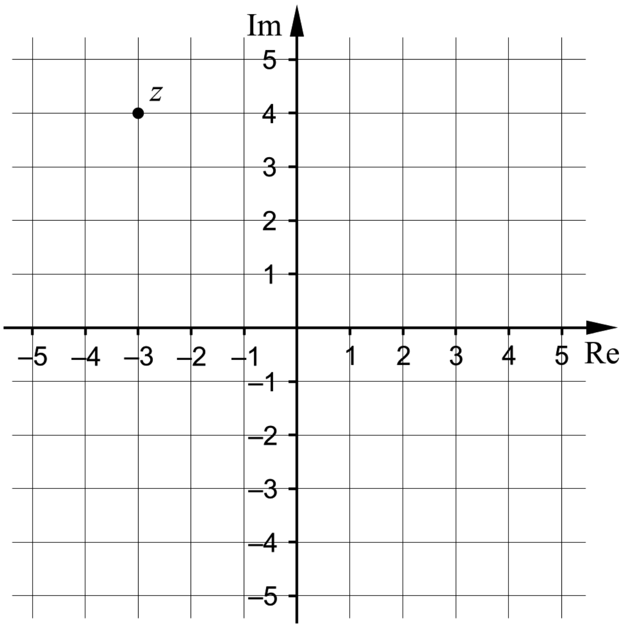
**1.** För funktionen $f$ gäller att $f(x) = \sin 2x$.

a) Bestäm $f(\frac{\pi}{6})$. ______________________ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(x)$. ______________________ (1/0/0)

**2.** Ange de lodräta asymptoterna till $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ ______________________ (2/0/0)

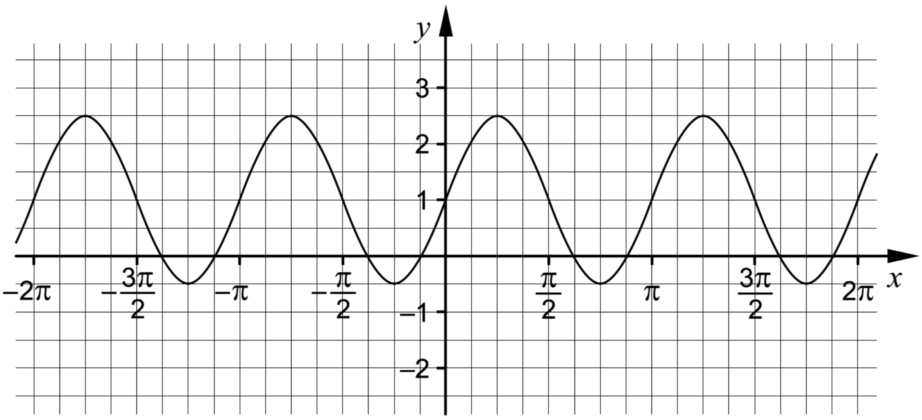
**3.** Figuren visar ett komplext talplan där talet $z$ är markerat.




a) Bestäm $\bar{z}$. ______________________ (1/0/0)

b) Bestäm $|z|$. ______________________ (1/0/0)

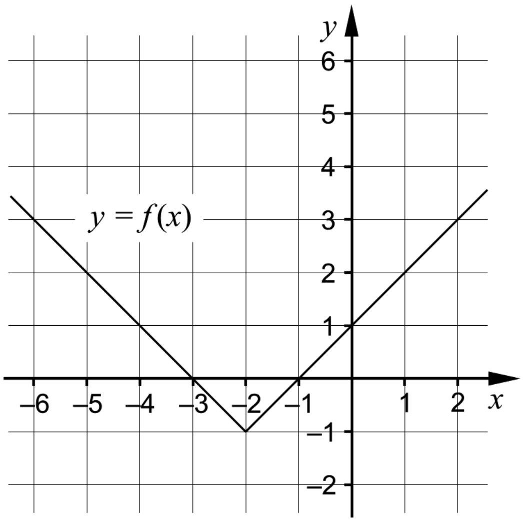
**4.** Figuren visar en sinuskurva.




Bestäm ekvationen för sinuskurvan
på formen $y = A\sin(kx) + B$.

$y =$ ______________________ (1/1/0)

**5.** Figuren visar grafen till $f(x) = a + |x + b|$.

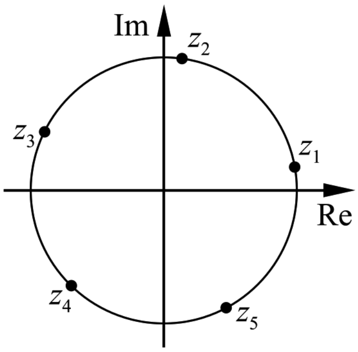



Bestäm konstanterna $a$ och $b$.

$a =$ ______________________

$b =$ ______________________ (1/1/0)

**6.** Figuren visar cirkeln $|z|=1$ i det komplexa talplanet. På cirkeln är de fem rötterna $z_1, z_2, z_3, z_4$ och $z_5$ till ekvationen $z^5 = \cos 50° + i\sin 50°$ markerade.




a) Bestäm $\arg z_1$ ______________________ (1/0/0)

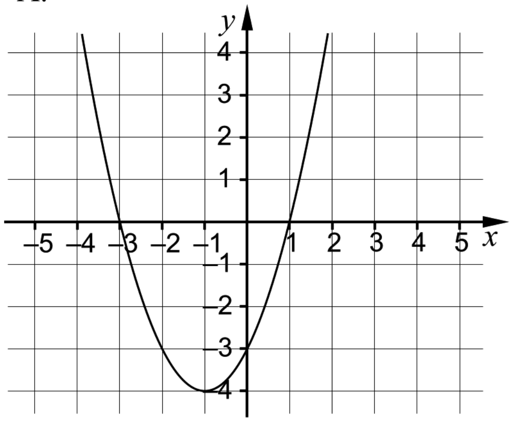
b) Bestäm $\arg z_3$ ______________________ (0/1/0)

**7.** Chen ska derivera funktionen $f$. Han ser att funktionen är en produkt. Chen deriverar funktionen och får det korrekta svaret $f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$.

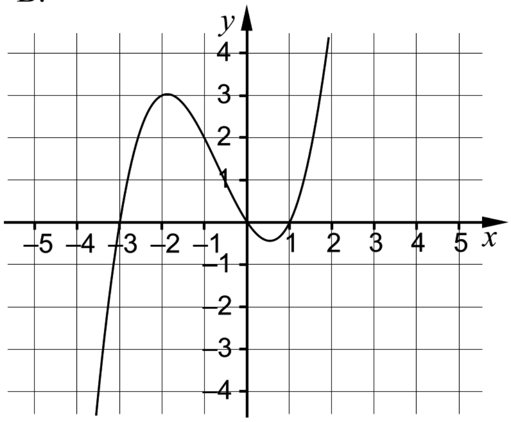
Bestäm funktionen $f$. ______________________ (0/1/0)

**8.** Figurerna A–F visar graferna till sex olika polynomfunktioner.

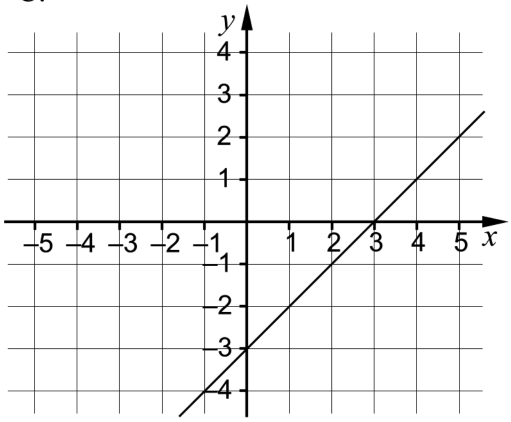
A.



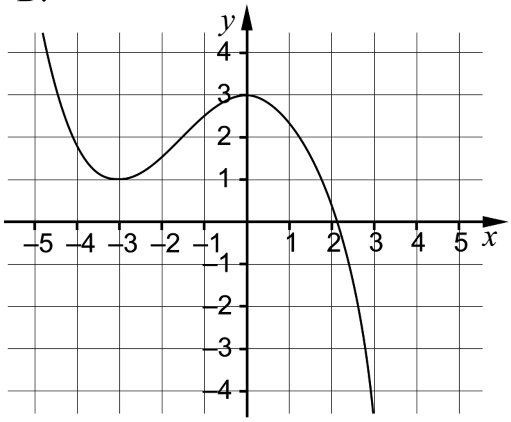
B.



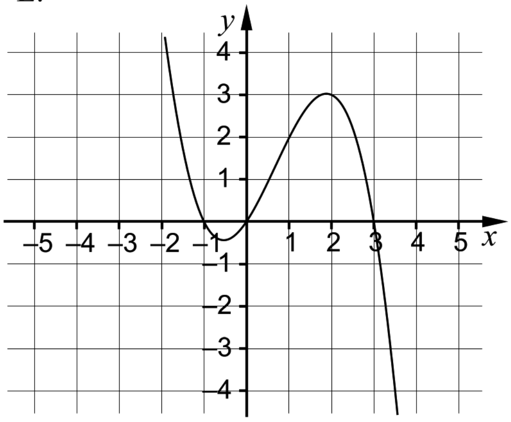
C.



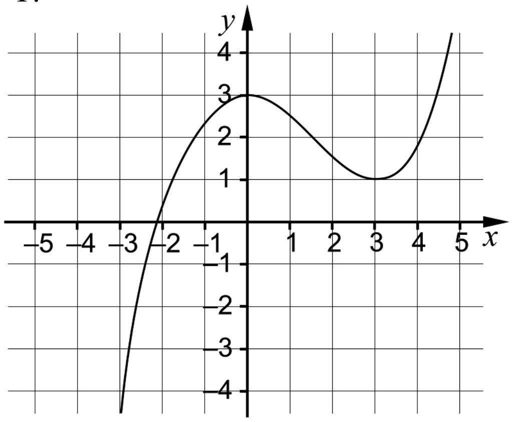
D.



E.



F.



Två av figurerna A–F visar graferna till polynomfunktioner som är delbara med $x+3$
Vilka två? _______________________ (0/0/1)

**Delprov C:** Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

**9.** Visa att $\dfrac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$ för alla $x$ där uttrycken är definierade. (2/0/0)

**10.** Lös ekvationen $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$. Svara i grader. (2/1/0)

**11.** I de två komplexa talen $z_1 = a + a\text{i}$ och $z_2 = (a+1) + (a-1)\text{i}$
är konstanten $a$ ett reellt tal och $a > 0$
Visa att $|z_1| < |z_2|$. (0/2/0)

**12.** Ekvationen $x^2 + ax + b = 0$ har en rot $x = 1 + \text{i}\sqrt{3}$
Bestäm de reella konstanterna $a$ och $b$. (0/3/0)

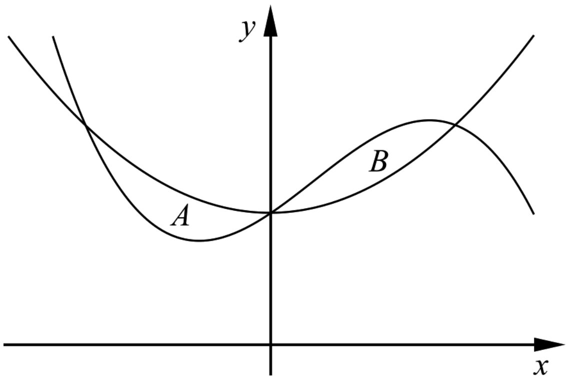
**13.** En lösning till ekvationen $z^3 + 2z^2 + 5z + 10 = 0$ är $z = -2$
Bestäm övriga lösningar till ekvationen. (0/2/0)

**14.** Undersök hur antalet lösningar till ekvationen $B\sin 2x = 5$ i intervallet $0 \le x < 2\pi$ beror av värdet på konstanten $B$.
Motivera varför ekvationen har det antal lösningar som du påstår för de olika värdena på $B$. (0/2/1)

**15.** Bestäm konstanten $a$ så att $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x}\right)\text{d}x = \ln a$. (0/1/1)

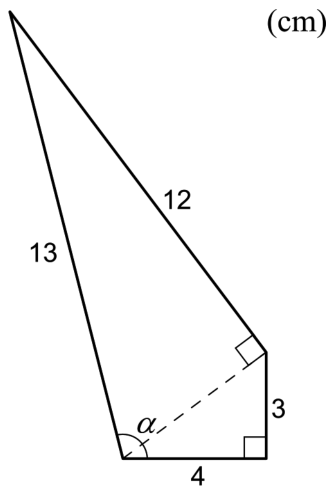
**16.** Lös ekvationen $|z|^2 = 5z - 10\text{i}$. (0/0/3)

**17.** För funktionerna $f$ och $g$ gäller att $f(x) = x^2 + 3$ och
$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$, där $k > 0$
Graferna till funktionerna $f$ och $g$ innesluter områdena $A$ och $B$, se figur.




Visa att arean av $A$ är lika stor som arean av $B$ oavsett värde på $k$. (0/0/4)

**18.** Figuren visar en fyrhörning indelad i två rätvinkliga trianglar.




En av fyrhörningens vinklar betecknas $\alpha$.
Bestäm $\sin\alpha$. (0/0/2)

| | |
|---|---|
| **Delprov D** | Uppgift 19–26. Fullständiga lösningar krävs. |
| **Provtid** | 120 minuter. |
| **Hjälpmedel** | Digitala verktyg, formelblad och linjal. |

**Kravgränser** Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

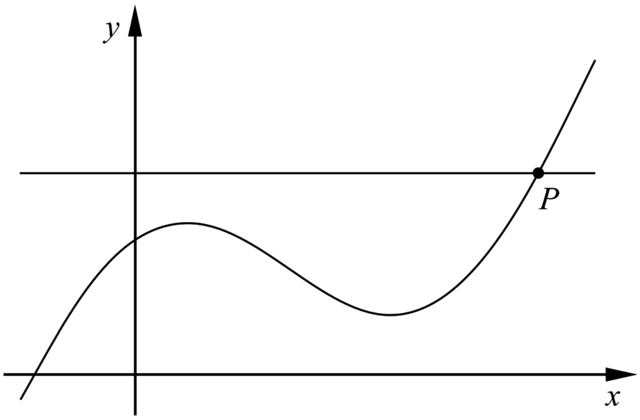
Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

**Delprov D:** Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

**19.** Bestäm $f'(\frac{\pi}{5})$ om $f(x) = 2\cos 3x$. Svara med två decimaler.

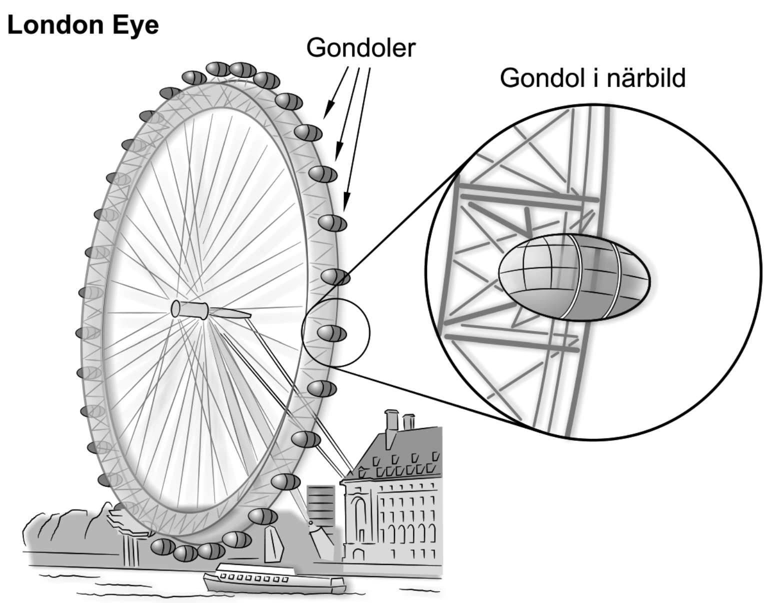
*Endast svar krävs* (1/0/0)

**20.** Figuren visar kurvan $y = x + 2\cos x$ och linjen $y = 3$ samt deras skärningspunkt $P$.




Bestäm lutningen på kurvan $y = x + 2\cos x$ i punkten $P$.
Svara med minst tre värdesiffror. (2/0/0)

**21.** Pariserhjulet London Eye har en diameter på 135 meter och ett varv tar 30 minuter.




En gondols höjd över marken kan beskrivas med funktionen
$h(t) = 67{,}5\sin(0{,}209t - 1{,}57) + 70; \quad 0 \le t \le 30$
där $h$ är höjden över marken i meter och $t$ är tiden i minuter efter start.

a) Vilken är gondolens största höjd över marken?
*Endast svar krävs* (1/0/0)

b) Bestäm hur lång tid gondolen är minst 40 m över marken under ett varv. (0/2/0)

**22.** Frida får ett läkemedel mot högt blodtryck. Hur snabbt läkemedlet bryts ner av kroppen kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = k \cdot m$$

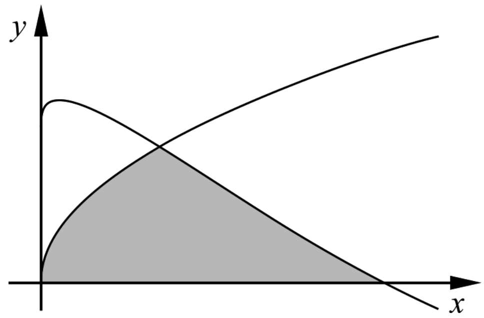
där $k$ är en konstant och $m$ mg är mängden läkemedel i kroppen $t$ timmar efter att hon fått medicinen.

a) Visa att $m(t) = C \cdot \mathrm{e}^{kt}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

b) När Frida tar en tablett blir mängden läkemedel i hennes kropp 100 mg. Efter 1 timme har mängden minskat till 90 mg.
Bestäm konstanterna $C$ och $k$ för funktionen $m(t) = C \cdot \mathrm{e}^{kt}$ i detta fall. (2/0/0)

c) Bestäm hur lång tid det tar för Fridas kropp att bryta ner 90 % av en given mängd läkemedel om inget nytt läkemedel tillförs. (0/1/0)

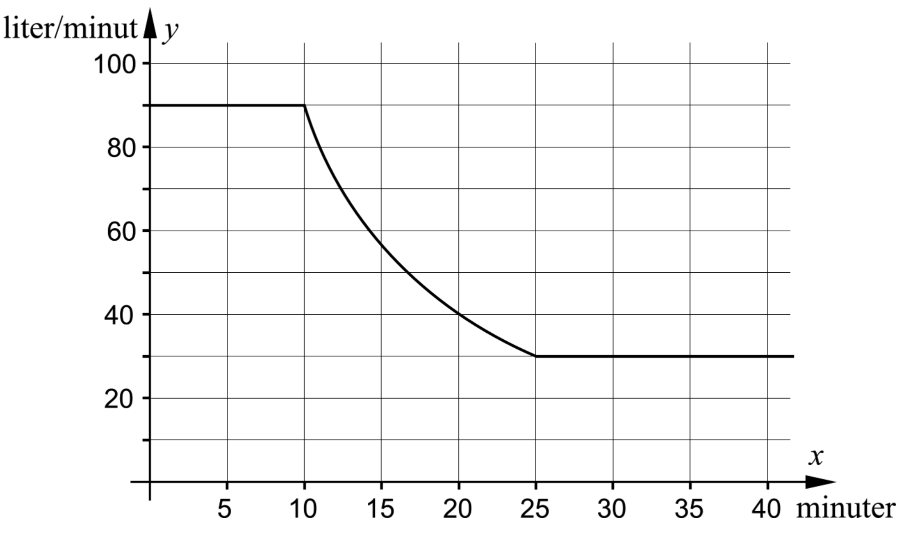
**23.** Figuren visar graferna till funktionerna $y = e^{\sqrt{x}} - 2x$ och $y = \sqrt{x}$.
Funktionernas grafer och $x$-axeln begränsar det skuggade området i figuren.




Beräkna arean av det skuggade området.
Svara med minst tre värdesiffror. (1/2/0)

**24.** En tom tank ska fyllas med vatten. Under de första 10 minuterna är påfyllningshastigheten konstant, 90 liter/minut. Under de följande 15 minuterna sjunker påfyllningshastigheten på grund av minskat vattentryck. Därefter är påfyllningshastigheten konstant 30 liter/minut.

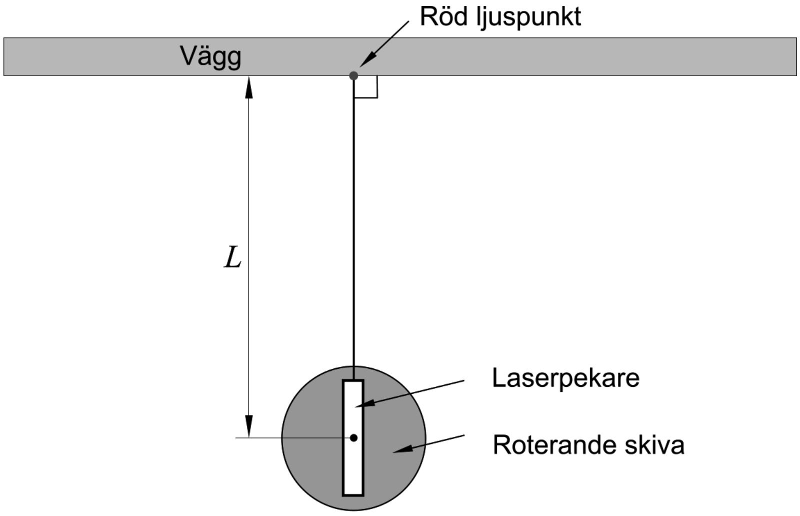
Grafen visar hur påfyllningshastigheten $y$ liter/minut beror av tiden $x$ minuter. Under den tid då vattentrycket sjunker ges påfyllningshastigheten av funktionen $y = \dfrac{1000}{x} - 10$




Bestäm hur lång tid det tar att fylla tanken med 2000 liter vatten. (0/3/0)

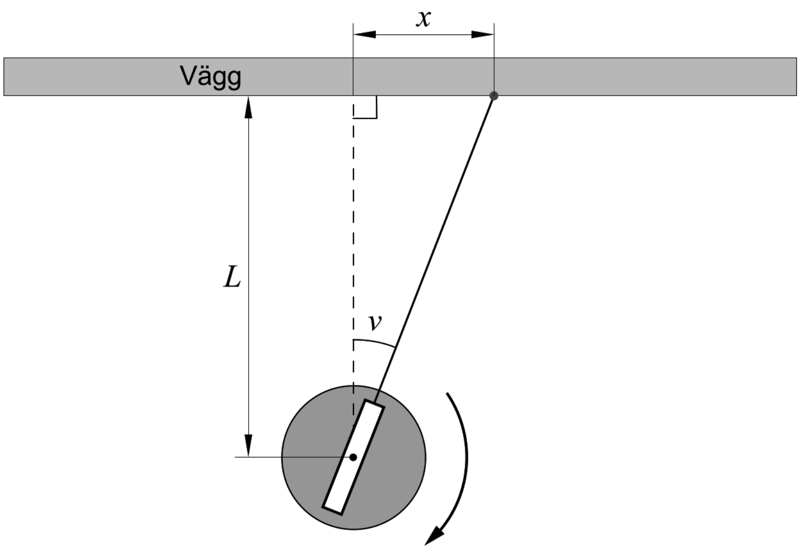
**25.** Ett område begränsas av kurvan $y = x^2 - 4$ och linjen $y = 5$
Bestäm volymen som bildas när detta område roterar runt linjen $y = 5$ (0/0/3)

**26.** En laserpekare är placerad på en roterande skiva. Där laserstrålen från laserpekaren träffar en vägg syns en röd ljuspunkt. Avståndet mellan väggen och den roterande skivans mittpunkt är $L$ meter. Vid tiden $t = 0$ lyser laserstrålen vinkelrätt mot väggen, se figur 1.




Figur 1

Skivan med laserpekaren roterar så att den röda ljuspunkten rör sig åt höger på väggen. Vid tiden $t$ sekunder har skivan roterat vinkeln $v$ radianer och ljuspunkten rört sig sträckan $x$ meter längs väggen. Se figur 2.




Figur 2

Skivan roterar med konstant vinkelhastighet $C$ radianer/s så att $v = C \cdot t$.

Ljuspunkten rör sig längs väggen med hastigheten $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Bestäm ett uttryck för hastigheten $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (0/0/2)

# Innehåll

# Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att $E_{PL}$ och $A_R$ ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

**Bedömningsanvisningar**

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

| | |
|---|---|
| Godtagbar ansats, t.ex. … | +1 $E_P$ |
| med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…) | +1 $E_P$ |

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.*

Modell 2:

| E | C | A |
|---|---|---|
| Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. …<br>1 $E_R$ | Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. …<br>1 $E_R$ och 1 $C_R$ | Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. …<br>1 $E_R$, 1 $C_R$ och 1 $A_R$ |

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).*

**Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga**
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå ($C_K$) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå ($A_K$) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska
1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

| | |
|---|---|
| Symboler | t.ex. $=,\ \neq,\ <,\ >,\ \leq,\ \geq,\ \approx,\ \pm,\ \sqrt{\ },\ f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ x,\ y,\ (\ ),\ [\ ],\ \int,\ \mathrm{d}x$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$ |
| Termer | t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor |
| Hänvisningar | t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur |
| Övrigt | t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabell, angivna enheter |

# Provsammanställning – Kunskapskrav

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 10_1 och 10_2 den första respektive andra poängen i uppgift 10.

| Delprov | Uppg. Poäng | Förmåga och nivå | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | E | | | | C | | | | A | | | |
| | | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK |
| B | 1a | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 1b | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 2_1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 2_2 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 3a | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 3b | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 4_1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 4_2 | | | | | 1 | | | | | | | |
| | 5_1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 5_2 | | | | | 1 | | | | | | | |
| | 6a | 1 | | | | | | | | | | | |
| | 6b | | | | | 1 | | | | | | | |
| | 7 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 8 | | | | | | | | | 1 | | | |
| C | 9_1 | | | | 1 | | | | | | | | |
| | 9_2 | | | | 1 | | | | | | | | |
| | 10_1 | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 10_2 | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 10_3 | | | | | | 1 | | | | | | |
| | 11_1 | | | | | | | | 1 | | | | |
| | 11_2 | | | | | | | | 1 | | | | |
| | 12_1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 12_2 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 12_3 | | | | | | | | 1 | | | | |
| | 13_1 | | | | | | 1 | | | | | | |
| | 13_2 | | | | | | 1 | | | | | | |
| | 14_1 | | | | | | | | 1 | | | | |
| | 14_2 | | | | | | | | 1 | | | | |
| | 14_3 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 15_1 | | | | | | 1 | | | | | | |
| | 15_2 | | | | | | | | | | 1 | | |
| | 16_1 | | | | | | | | | | 1 | | |
| | 16_2 | | | | | | | | | | 1 | | |
| | 16_3 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 17_1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 17_2 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 17_3 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 17_4 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | 18_1 | | | | | | | | | 1 | | | |
| | 18_2 | | | | | | | | | | | 1 | |

| Delprov | Uppg. Poäng | Förmåga och nivå | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | E | | | | C | | | | A | | | |
| | | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK |
| D | 19 | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 20_1 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | 20_2 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | 21a | | | 1 | | | | | | | | | |
| | 21b_1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 21b_2 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 22a | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 22b_1 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | 22b_2 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | 22c | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 23_1 | | 1 | | | | | | | | | | |
| | 23_2 | | | | | | 1 | | | | | | |
| | 23_3 | | | | | | 1 | | | | | | |
| | 24_1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 24_2 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 24_3 | | | | | | | | 1 | | | | |
| | 25_1 | | | | | | | | | | | 1 | |
| | 25_2 | | | | | | | | | | | 1 | |
| | 25_3 | | | | | | | | | | | 1 | |
| | 26_1 | | | | | | | | | | | 1 | |
| | 26_2 | | | | | | | | | | | 1 | |
| | Total | 7 | 7 | 5 | 2 | 3 | 6 | 8 | 6 | 2 | 3 | 6 | 6 |
| Σ | **61** | **21** | | | | **23** | | | | **17** | | | |

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

# Provsammanställning – Centralt innehåll

**Tabell 2** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

| Del-prov | Uppg. | Nivå | | | Centralt innehåll Kurs Ma4 | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Aritmetik, algebra och förändring | | | | | | | | Samband och förändring | | | | | Problem-lösning | | |
| | | E | C | A | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | F17 | F18 | F19 | F20 | F21 | P1 | P3 | P4 |
| B | 1a | 1 | 0 | 0 | | | | | | X | | | | | | | | | | |
| | 1b | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | X | | | | | |
| | 2 | 2 | 0 | 0 | | | | | | | | | | X | | | | | | |
| | 3a | 1 | 0 | 0 | | X | X | | | | | | | | | | | | | |
| | 3b | 1 | 0 | 0 | | X | X | | | | | | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | X | | | | | | | |
| | 5 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | X | | | | | | | |
| | 6a | 1 | 0 | 0 | X | X | | X | X | | | | | | | | | | | |
| | 6b | 0 | 1 | 0 | X | X | | X | X | | | | | | | | | | | |
| | 7 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | X | | | X | | |
| | 8 | 0 | 0 | 1 | | | | | X | | | | | | | | | | | |
| C | 9 | 2 | 0 | 0 | | | | | | X | | X | | | | | | | | |
| | 10 | 2 | 1 | 0 | | | | | | | X | | | | | | | | | |
| | 11 | 0 | 2 | 0 | X | | X | | | | | X | | | | | | | | |
| | 12 | 0 | 3 | 0 | X | | X | | X | | | | | | | | | X | | |
| | 13 | 0 | 2 | 0 | | | | | X | | | | | | | | | | | |
| | 14 | 0 | 2 | 1 | | | | | | | | | X | | | | | | | |
| | 15 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | X | | | X | | | | |
| | 16 | 0 | 0 | 3 | X | | X | | | | | | | | | | | | | |
| | 17 | 0 | 0 | 4 | | | | | | | | X | | | | X | | | | |
| | 18 | 0 | 0 | 2 | | | | | | X | | | | | | | | X | | |
| D | 19 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | X | | | | | |
| | 20 | 2 | 0 | 0 | | | | | | | X | | | | X | | | X | | |
| | 21a | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | X | | | | | X | X | |
| | 21b | 0 | 2 | 0 | | | | | | | X | | X | | | | | X | X | |
| | 22a | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | X | X | X | |
| | 22b | 2 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | X | X | X | |
| | 22c | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | X | X | X | |
| | 23 | 1 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | X | | | | |
| | 24 | 0 | 3 | 0 | | | | | | | | | | | | X | | X | X | |
| | 25 | 0 | 0 | 3 | | | | | | | | | | | | X | | X | | |
| | 26 | 0 | 0 | 2 | | | | | | | | | | | X | | | X | X | |
| Total | | 21 | 23 | 17 | | | | | | | | | | | | | | | | |

# Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

# Bedömningsformulär

**Elev:**____________________________ **Klass:**________________ **Provbetyg:**_____________

| Delprov | Uppg. Poäng | Förmåga och nivå | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | E | | | | C | | | | A | | | |
| | | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK |
| B | 1a | | | | | | | | | | | | |
| | 1b | | | | | | | | | | | | |
| | 2_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 2_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 3a | | | | | | | | | | | | |
| | 3b | | | | | | | | | | | | |
| | 4_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 4_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 5_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 5_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 6a | | | | | | | | | | | | |
| | 6b | | | | | | | | | | | | |
| | 7 | | | | | | | | | | | | |
| | 8 | | | | | | | | | | | | |
| C | 9_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 9_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 10_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 10_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 10_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 11_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 11_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 12_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 12_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 12_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 13_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 13_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 14_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 14_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 14_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 15_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 15_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 16_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 16_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 16_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 17_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 17_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 17_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 17_4 | | | | | | | | | | | | |
| | 18_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 18_2 | | | | | | | | | | | | |

| Delprov | Uppg. Poäng | Förmåga och nivå | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | E | | | | C | | | | A | | | |
| | | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK | B | P | PM | RK |
| D | 19 | | | | | | | | | | | | |
| | 20_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 20_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 21a | | | | | | | | | | | | |
| | 21b_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 21b_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 22a | | | | | | | | | | | | |
| | 22b_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 22b_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 22c | | | | | | | | | | | | |
| | 23_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 23_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 23_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 24_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 24_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 24_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 25_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 25_2 | | | | | | | | | | | | |
| | 25_3 | | | | | | | | | | | | |
| | 26_1 | | | | | | | | | | | | |
| | 26_2 | | | | | | | | | | | | |
| | Total | | | | | | | | | | | | |
| Σ | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Total | 7 | 7 | 5 | 2 | 3 | 6 | 8 | 6 | 2 | 3 | 6 | 6 |
| Σ | **61** | **21** | | | | **23** | | | | **17** | | | |

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

## Bedömningsanvisningar

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

**Delprov B**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | | **Max 2/0/0** |
| a) | Korrekt svar ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) | +1 $E_P$ |
| b) | Korrekt svar ($2\cos 2x$) | +1 $E_P$ |
| **2.** | | **Max 2/0/0** |
| | Anger minst ett värde där funktionen inte är definierad, t ex 2 | +1 $E_B$ |
| | med korrekt angivna ekvationer ($x = -2$ och $x = 2$) | +1 $E_B$ |
| **3.** | | **Max 2/0/0** |
| a) | Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning ($-3-4\text{i}$) | +1 $E_B$ |
| b) | Korrekt svar utifrån godtagbar avläsning (5) | +1 $E_B$ |
| **4.** | | **Max 1/1/0** |
| | Anger minst en av konstanterna *A*, *B* eller *k* godtagbart | +1 $E_B$ |
| | med godtagbart svar ($y = 1{,}5\sin(2x)+1$) | +1 $C_B$ |
| **5.** | | **Max 1/1/0** |
| | Anger minst en konstant godtagbart | +1 $E_B$ |
| | med godtagbart svar ($a = -1$ och $b = 2$) | +1 $C_B$ |
| **6.** | | **Max 1/1/0** |
| a) | Korrekt svar ($10°$) | +1 $E_B$ |
| b) | Korrekt svar ($154°$) | +1 $C_B$ |

**7.** **Max 0/1/0**

Korrekt svar ( $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ ) +1 $C_{PL}$

*Kommentar:* Svar där en konstant adderats till det korrekta svaret (t ex $f(x) = x^2 \cdot \sin x + 3$ ) anses godtagbart.

**8.** **Max 0/0/1**

Korrekt svar (A och B) +1 $A_B$

**Delprov C**

**9.** **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, använder sinus för dubbla vinkeln +1 $E_R$

med ett enkelt resonemang som visar att VL = HL +1 $E_R$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**10.** **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en vinkel korrekt +1 $E_P$

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två vinklar korrekt +1 $E_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
( $x = 10° + n \cdot 120°$ eller $x = 50° + n \cdot 120°$ ) +1 $C_P$

**11.** **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex tecknar uttryck för $|z_1|$ och $|z_2|$,
$|z_1| = \sqrt{a^2 + a^2}$ och $|z_2| = \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2}$ +1 $C_R$

med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 $C_R$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**12.** **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex korrekt insättning av roten med korrekt förenkling *eller* kommer fram till uttrycket $(x-(1+\mathrm{i}\sqrt{3}))\cdot(x-(1-\mathrm{i}\sqrt{3}))$ +1 $C_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a=-2$ och $b=4$) +1 $C_{PL}$

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 $C_K$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**13.** **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex faktoriserar ekvationen,
$z^3+2z^2+5z+10=(z+2)(z^2+5)$ +1 $C_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z=\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$) +1 $C_P$

**14.** **Max 0/2/1**

Godtagbart resonemang som leder till en korrekt slutsats för
$B>5$ *eller* $B=5$ *eller* positiva $B<5$ +1 $C_R$

med godtagbart fortsatt resonemang som t ex leder till korrekt slutsats för alla positiva värden på $B$ +1 $C_R$

med ett godtagbart slutfört resonemang som leder till korrekt slutsats för alla värden på $B$ (Det finns inga lösningar om $-5<B<5$, två lösningar om $B=\pm5$ och fyra lösningar om $B<-5$ eller $B>5$) +1 $A_R$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**15.** **Max 0/1/1**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 $C_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3) +1 $A_P$

**16.** **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\operatorname{Im} z$ +1 $A_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
($z_1=1+2\mathrm{i}$ och $z_2=4+2\mathrm{i}$) +1 $A_P$

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 $A_K$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**17.** **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer integrationsgränserna korrekt +1 $A_R$

med godtagbar fortsättning, bestämmer en av areorna korrekt,
t ex $-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}$ +1 $A_R$

med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 $A_R$

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 $A_K$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**18.** **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex delar upp vinkeln $\alpha$ och inser att additionssatsen för sinus ska användas +1 $A_B$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (63/65) +1 $A_{PL}$

## Delprov D

**19.** **Max 1/0/0**

Godtagbart svar $(-5,71)$ +1 $E_P$

**20.** **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett godtagbart värde på $P$:s $x$-koordinat, $x=4{,}12$ +1 $E_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2,66) +1 $E_{PL}$

**21.** **Max 1/2/0**

a) Korrekt svar (137,5 m) +1 $E_M$

b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer godtagbart minst en av tidpunkterna då höjden är 40 m +1 $C_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (19 minuter) +1 $C_M$

**22.** **Max 3/1/0**

a) Godtagbar lösning +1 $E_P$

b) Godtagbar ansats, bestämmer minst en av konstanterna korrekt +1 $E_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar
($C = 100$ och $k = -0,105$) +1 $E_M$

c) Godtagbar lösning med godtagbart svar (22 h) +1 $C_{PL}$

**23.** **Max 1/2/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer skärningspunkten mellan funktionerna +1 $E_P$

med godtagbar fortsättning, t ex ställer upp godtagbart uttryck för areaberäkningen, $\int_0^{0,759} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0,759}^{2,214} (\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 2x)\,\mathrm{d}x$ +1 $C_P$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,05 a.e.) +1 $C_P$

*Kommentar:* Svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

**24.** **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer volymen under de första 25 minuterna,
1666 liter +1 $C_M$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (36 minuter) +1 $C_M$

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 $C_K$

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***

**25.** **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, inser att volymen består av skivor med radien $9 - x^2$
*eller*
inser att funktionen kan förskjutas 5 enheter ”neråt” för att få rotation runt $x$-axeln +1 $A_{PL}$

med godtagbar fortsättning, ställer upp en korrekt integral med integrationsgränser, t ex $\pi \int_{-3}^{3} (x^2 - 9)^2\,\mathrm{d}x$ +1 $A_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (814 v.e.) +1 $A_{PL}$

*Kommentar:* Svar utan enhet eller med felaktig enhet godtas.

**26.** **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex tecknar uttrycket $x = L\tan Ct$ +1 $A_M$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{CL}{\cos^2 Ct}$ ) +1 $A_M$

*Kommentar:* Även svaret $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{CL}{\cos^2 v}$ godtas.

# Bedömda elevlösningar

## Uppgift 9.

### Elevlösning 9.1 (1 $E_R$)

$$\frac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$$

$$\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$$

$$2\sin x \cos x = 2\sin x \cos x \qquad \text{V.S.V.}$$

*Kommentar:* Elevlösningen bygger på likheten som ska visas. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

## Uppgift 11.

### Elevlösning 11.1 (1 $C_R$)

$$z_1 = a + ai$$

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$$

$$z_2 = (a+1) + (a-1)i$$

$$|z_2| = \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2} =$$

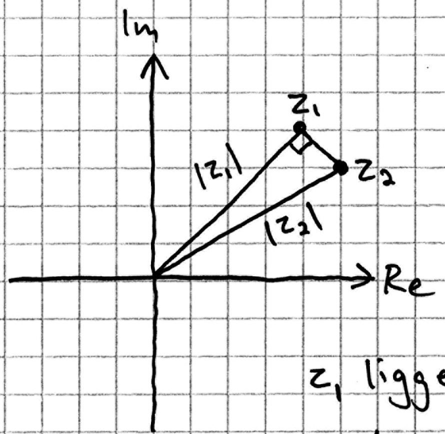
$$= \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a + 1} =$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2}$$

$$\sqrt{2}\,a < \sqrt{2a^2 + 2} \Rightarrow |z_1| < |z_2|$$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett resonemang som leder till konstaterandet att $\sqrt{2}a < \sqrt{2a^2 + 2}$ utan att detta motiveras. Därmed anses beviset inte vara godtagbart vilket gör att kraven för den andra resonemangspoängen på C-nivå inte är uppfyllda.

**Elevlösning 11.2 (2 $C_R$)**




$z_1$ ligger på 45°-linjen.

$z_2$ ligger $\overset{1}{\rightarrow}\downarrow 1$ från $z_1$

Det blir en rätvinklig triangel

där $|z_2|$ är längsta sidan

och $|z_1|$ är kortare.

Alltså: $|z_2| > |z_1|$ V.S.V.

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett bevis som genomförs med hjälp av en grafisk tolkning av olikheten. Trots att argumentationen för att det bildas en rätvinklig triangel är vag anses lösningen uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på C-nivå.

**Uppgift 12.**

**Elevlösning 12.1 (2 $C_{PL}$)**

Om $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ är $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$

dvs $x = 1 \pm i\sqrt{3}$

enligt pq-formeln är $a = -2$ och

de måste $b = 4$ för att det ska bli $\sqrt{-3}$

i pq-formeln.

Svar: $a = -2$

$b = 4$

*Kommentar:* Elevlösningen behandlar uppgiften på ett knapphändigt men godtagbart sätt. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå. Det saknas t ex förklaring till slutsatserna om *a* och *b* på raderna 3–5. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

**Elevlösning 12.2 (2 $C_{PL}$ och 1 $C_K$)**

$x^2 + ax + b = 0 \qquad x = 1 + i\sqrt{3}$

$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - b} \Rightarrow \left(-\frac{a}{2}\right) = 1$

$\frac{a}{2} = 1 \cdot (-1) = -1$

$a = 2 \cdot (-1) = -2$

$a = -2$

$i\sqrt{3} = \sqrt{\left(-\frac{-2}{2}\right)^2 - b}$

$\left(-\frac{-2}{2}\right)^2 = 1 \qquad \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-3}$

$\sqrt{-3} = \sqrt{1-b}$

$1 - b = -3$

$b = 4$

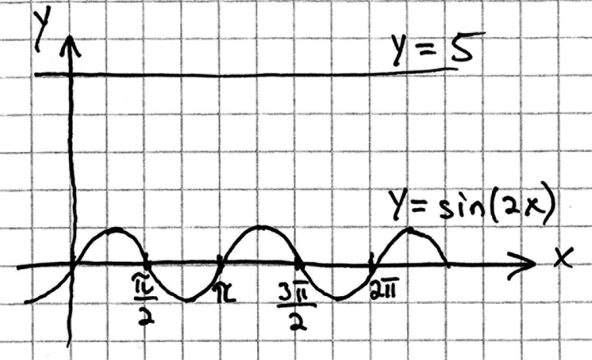
Svar: $a = -2$

$b = 4$

*Kommentar:* Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och leder fram till ett korrekt svar. Gällande kommunikation hade lösningen kunnat vara mer strukturerad men anses ändå möjlig att följa och förstå. Därmed anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

**Uppgift 14.**

**Elevlösning 14.1 (2 $C_R$)**




$B \sin(2x) = 5 \qquad 0 \leq x < 2\pi$

B måste vara $B \geq 5$ eller $B \leq -5$ för att ekvationen ska få lösningar. Detta beror på att sin(2x) maxvärde är 1 och därför kan den inte nå 5 annars.

Om $B = 5$ kommer det att finnas två lösningar i $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$, om $B = -5$ (kurvan "vänds") finns två lösningar i $\frac{3\pi}{4}$ och $\frac{7\pi}{4}$.

Annars finns det alltid 4 lösningar.

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett godtagbart resonemang om att $B \geq 5$ eller $B \leq -5$ måste gälla för att ekvationen ska få lösningar. Vidare anges ekvationens lösningar då $B = 5$ och $B = -5$. Tillsammans med figuren anses detta vara ett nätt och jämnt godtagbart resonemang för att visa att ekvationen har två lösningar för dessa värden på $B$. Avslutningsvis anges att det för övriga värden på $B$ finns 4 lösningar. Denna slutsats stöds dock inte av något godtagbart resonemang. Sammantaget anses elevlösningen innehålla godtagbara resonemang med korrekta slutsatser för $-5 < B < 5$, $B = 5$ och $B = -5$. Därmed anses kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå vara uppfyllda.

**Elevlösning 14.2 (2 $C_R$)**

Eftersom B är amplituden bestämmer den hur högt sinuskurvan går. Om $B<5$ får vi inga lösningar.

Om $B=5$:

$$5\sin 2x = 5$$

$$\sin 2x = 1 \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ och } x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Om $B=5$ får vi 2 lösningar.

Om $B>5$ får vi dubbelt så många lösningar än om $B=5$, d.v.s. 4 lösningar. Detta för att kurvans topp (vid $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{5\pi}{4}$) kommer ovanför 5 så vi får två lösningar runt $\frac{\pi}{4}$ och två runt $\frac{5\pi}{4}$.

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett nätt och jämnt godtagbart resonemang om amplitud som leder till korrekt slutsats för $B<5$. För fallet $B=5$ löses ekvationen och en korrekt slutsats att ekvationen har 2 lösningar dras. För $B>5$ innehåller lösningen ett nätt och jämnt godtagbart resonemang om varför det blir dubbelt så många lösningar som när $B=5$. Sammantaget anses kraven för de två resonemangspoängen på C-nivå vara uppfyllda.

## Uppgift 16.

### Elevlösning 16.1 (2 $A_P$)

$|z|^2 = 5z - 10i$ $\quad$ $|z| = \sqrt{5z - 10i}$

$|z| \cdot |z| = 5z - 10i$

$a^2 + b^2 = 5(a+bi) - 10i$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad$ $z = a + bi$

$|z|^2 = a^2 + b^2$ $\quad$ $a^2 + b^2 = 5z - 10i$

$\frac{|z|^2 + 10i}{5} = z$ $\quad$ $|z|^2 + 10i = 5z$

Jag tar bort

$a^2 + b^2 = 5a + 5bi - 10i$

$a^2 + 2^2 = 5a \Rightarrow a^2 - 5a + 4$

Pq ger $a = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4} \Rightarrow 2,5 \pm \sqrt{2,25} \Rightarrow 2,5 \pm 1,5$

$a_1 = 4 \quad a_2 = 1$

$a^2 + b^2 =$ bara reella tal $\Rightarrow 5bi - 10i = 0 \quad b = 2$

Svar: Det finns 2 lösningar

$z = 4 + 2i$ eller $1 + 2i$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av ekvationens rötter. När det gäller kommunikation är lösningen bitvis ostrukturerad och innehåller ovidkommande led. Detta gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng på A-nivå.

**Elevlösning 16.2 (2 $A_P$ och 1 $A_K$)**

$|z|^2 = 5z - 10i \qquad z = a + bi$

$|z|^2 - 5z = -10i \rightarrow a^2 + b^2 - (5a + 5bi) = -10i$

$-5b = -10$

$b = 2$

$a^2 + 2^2 - 5a = 0$

$a^2 - 5a + 4 = 0$

$a = 2,5 \pm \sqrt{2,25} = 2,5 \pm 1,5$

$a = 4, \quad a = 1$

Svar: $z = 4 + 2i$ eller $z = 1 + 2i$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller en korrekt lösning av ekvationen. När det gäller kommunikation är lösningen något kortfattad och förklarande text saknas. Lösningen anses ändå vara lätt att följa och förstå och uppfyller nätt och jämnt kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

**Uppgift 17.**

**Elevlösning 17.1 (3 $A_R$)**

$f(x) = x^2 + 3$

$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$ där $k > 0$

$f(x) = g(x)$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{3} = -x^3 + \cancel{x^2} + kx + \cancel{3}$

$0 = -x^3 + kx$

$0 = -x^2 + k$

$x_1 = \sqrt{k} \quad x_2 = -\sqrt{k}$

$$A = \int_{-\sqrt{k}}^{0} x^3 - kx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}\right] =$$

$$0 - \left(\frac{(-k^{0,5})^4}{4} - \frac{k(-k^{0,5})^2}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

$$B = \int_{0}^{\sqrt{k}} -x^3 + kx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{kx^2}{2}\right] =$$

$$\frac{-(k^{0,5})^4}{4} + \frac{k(k^{0,5})^2}{2} = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$$

$A = B = -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2}$ $\quad$ k spelar ingen roll

V.S.V.

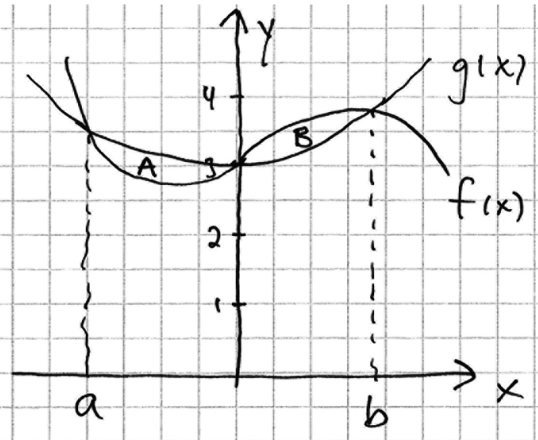
*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett bevis av att areorna är lika stora oavsett värde på *k*. När det gäller kommunikation så saknas d$x$ i integralen och parentes runt integranden. Integrationsgränserna saknas vid klamrarna runt primitiva funktionen. Det framgår inte att det är skillnaden mellan funktionerna som integreras. Dessutom motiveras inte hur integrationsgränsen $x = 0$ bestämts. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen de tre resonemangspoängen på A-nivå.

**Elevlösning 17.2 (2 $A_R$ och 1 $A_K$)**

$f(x) = x^2 + 3$

$g(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$

$A = B$




$$B = \int_0^b (-x^3 + x^2 + kx + 3)\,dx - \int_0^b (x^2 + 3)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^b (-x^3 + kx)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{kx^2}{2}\right]_0^b = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2} - 0$$

$$A = \int_a^0 (x^2 + 3)\,dx - \int_a^0 (-x^3 + x^2 + kx + 3)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^0 (x^3 - kx)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}\right]_a^0 = 0 - \left(\frac{a^4}{4} - \frac{ka^2}{2}\right) = -\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2}$$

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{ka^2}{2} = -\frac{b^4}{4} + \frac{kb^2}{2}$$

$a$ & $b = x$ när $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow x^2 + 3 = -x^3 + x^2 + kx + 3$

$\Rightarrow -x^3 + kx = 0 \Rightarrow x^3 = kx \Rightarrow x^2 = k$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$

$a = -\sqrt{k} \quad b = \sqrt{k}$

forts $\Rightarrow$

$$-\frac{a^4}{4}+\frac{ka^2}{2}=-\frac{b^4}{4}+\frac{kb^2}{2}$$

$$a=-\sqrt{k} \qquad b=\sqrt{k}$$

$$-\frac{(-k^{0,5})^4}{4}+\frac{k\cdot k}{2}=-\frac{(k^{0,5})^4}{4}+\frac{k(k^{0,5})^2}{2}$$

$$-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}=-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}$$

Svar: B är lika stor som A oavsett värdet på k. V.S.V.

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller ett resonemang som visar att areorna är lika stora. Eftersom lösningen utgår från likheten som ska visas anses inte kraven för den tredje resonemangspoängen vara uppfyllda. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. En figur definierar skärningspunkter vid $x=a$ och $x=b$. Figuren visar också att kurvorna skär varandra i punkten $(0, 3)$ vilket anses stödja att $x=0$ är den tredje integrationsgränsen. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på A-nivå och en kommunikationspoäng på A-nivå.

**Uppgift 24.**

**Elevlösning 24.1 (2 $C_M$)**

$90 \cdot 10 = 900$ efter 10 min

$\int_{10}^{25} \frac{1000}{x} - 10 = \left[1000 \cdot \ln x - 10x\right]_{10}^{25}$

$1000 \cdot \ln 25 - 250 = 2968{,}9\ldots$

$1000 \cdot \ln 10 - 100 = 2202{,}6\ldots$

$2968{,}9 - 2202{,}6 = 766{,}3$

$\sim 766 + 900 = 1666$

$2000 - 1666 = 334$

$\frac{334}{30} = 11{,}1\ldots$

Svar: $\sim 36{,}1$ minuter

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller en godtagbar lösning med godtagbart svar. När det gäller kommunikation anses lösningen vara svår att följa då det saknas såväl enheter i delberäkningarna som förklaringar till vad som beräknas. I integralen saknas d*x* och parentes runt integranden. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå.

**Elevlösning 24.2 (2 $C_M$ och 1 $C_K$)**

$90 \cdot 10 = 900\,l$ (10 min)

$\int_{10}^{25} \frac{1000}{x} - 10 = 766\ l$ $(25 - 10 = 15\ min)$

$2000 - 900 - 766 = 334\ l$

$\frac{334\ l}{30\ l/min} = 11{,}12\ min$

$\left(\begin{array}{c} liter/min \cdot min = liter \\ y \cdot x = liter \end{array}\right)$

$10\ min + 15\ min + 11{,}12 \approx 36\ min$

Svar: Det tar 36 minuter innan tanken innehåller 2000 liter vatten.

*Kommentar:* Lösningen innehåller en godtagbar bestämning av den efterfrågade tiden vilket gör att kraven för de båda modelleringspoängen är uppfyllda. När det gäller kommunikation saknas parentes och d*x* i integralen. Hur integralen beräknats kommenteras inte och en del förklarande text saknas. Bristen på förklaringar kompenseras av tidsangivelserna, enhets-analysen i de tre parenteserna samt enheterna i kvoten. Därmed anses kraven för kommunika-tionspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

# Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

## Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

**Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:**

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

# Kunskapskrav Matematik kurs 4

**Betyget E** Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget D** Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

**Betyget C** Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget B** Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

**Betyget A** Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

# Centralt innehåll Matematik kurs 4

*Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:*

## Aritmetik, algebra och geometri

**A6** Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
**A7** Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
**A8** Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
**A9** Användning och bevis av de Moivres formel.
**A10** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
**A11** Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
**A12** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
**A13** Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

## Samband och förändring

**F17** Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
**F18** Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
**F19** Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
**F20** Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
**F21** Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

## Problemlösning

**P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
**P3** Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
**P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.