

Delprov B	Uppgift 1–9. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 10–21. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 22 C- och 18 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Låt $f(x) = 1 + 4 \sin 3x$.

a) Ange funktionens period. _____ (1/0/0)

b) Ange funktionens minsta värde. _____ (1/0/0)

2. Skriv det komplexa talet $2 + 2i$ på polär form. _____ (1/0/0)

3. Derivera

a) $f(x) = \cos 3x$ $f'(x) =$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = (3x + 4)^5$ $g'(x) =$ _____ (1/0/0)

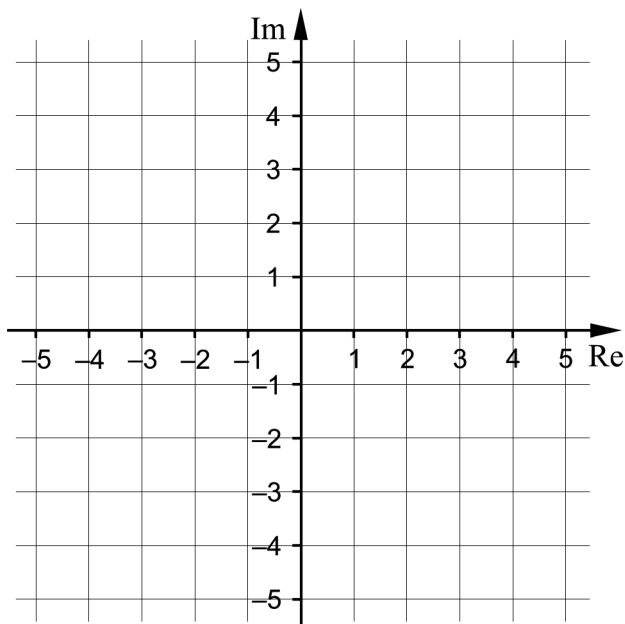
c) $h(x) = \frac{e^x}{x}$ $h'(x) =$ _____ (0/1/0)

4. Kurvan $y = 3 + \frac{1}{2x}$ har två asymptoter.

Ange de två asymptoternas ekvationer.

 _____ (2/0/0)

5. a) Markera $\bar{z}_1$ i det komplexa talplanet då $z_1 = 3 - 4i$ (1/0/0)
- b) Markera i det komplexa talplanet de punkter z för vilka $|z - 2i| = 1$ (0/1/0)



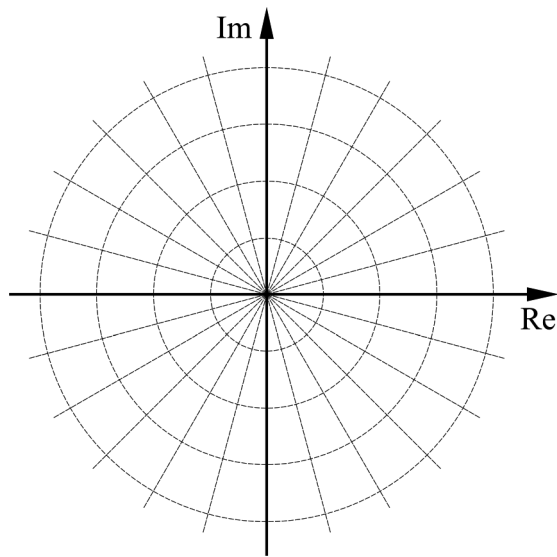
6. Ange det största och det minsta
värdet av funktionen $f(x) = 8 - |x - 1|$
i intervallet $-5 \leq x \leq 5$

största värde: _____

minsta värde: _____ (0/2/0)

7. a) Ange ett komplext tal $z \neq 0$, som uppfyller
villkoret $\arg(iz) = 180^\circ$ _____ (0/1/0)
- b) Ange *alla* komplexa tal $z \neq 0$, som uppfyller
villkoret $\arg(iz) = 180^\circ$ _____ (0/0/1)

8. I det komplexa talplanet ritas cirklar med radierna 1, 2, 3 och 4. Cirklarna har centrum i origo. I talplanet ritas också linjer som går genom origo och som bildar vinklarna 0° , 15° , 30° , ... med positiva reella axeln. Se figur.



Markera i figuren alla z som är lösningar till ekvationen

$$z^3 = 27(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$

(0/0/1)

9. Derivera $f(x) = \ln(\cos^2 x)$.

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (0/0/1)$$

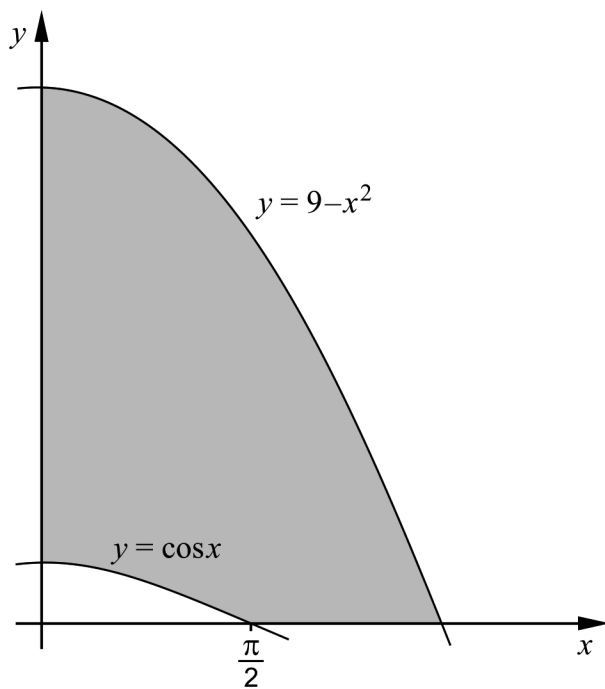
Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

10. Beräkna $(2 - 3i) \cdot (4 + i)$ (1/0/0)

11. Visa att $\frac{1 - \cos^2 23^\circ}{\sin 23^\circ \cos 23^\circ} = \tan 23^\circ$ (2/0/0)

12. Lös ekvationen $\sqrt{3} \tan x = 1$ (2/0/0)

13. Ett område begränsas av kurvorna $y = 9 - x^2$, $y = \cos x$ och de positiva koordinataxlarna. Se figur.



Bestäm områdets area. (2/1/0)

14. Bestäm vilket/vilka reella tal a som uppfyller $\frac{a^2 + 6ai}{1 - 3i} = 4$ (0/2/0)

15. Alicia beräknar $\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ och får det korrekta svaret 4.
 ”Det var konstigt” säger Greta. ”Den här integralen borde bli noll eftersom det är en sinusfunktion som integreras över ett intervall med bredden 2π . Då kommer arean under x -axeln att vara lika stor som arean över x -axeln.”
 Förklara varför Gretas resonemang inte stämmer för just den här integralen. (0/1/0)
16. Lös ekvationen $\cos x - \cos 2x = 1$ (0/3/0)
17. Joakim har löst en tredjegrads ekvation med reella koefficienter och fått rötterna $z_1 = 1$, $z_2 = 3$ och $z_3 = 1 + 3i$.
 Eric säger direkt, utan att göra några beräkningar, att svaret måste vara fel. Förklara hur Eric kan ha resonerat. (0/1/0)
18. Förenkla $(\sqrt{3} + i)^6$ så långt som möjligt. (0/2/0)
19. För kurvan $y = f(x)$ gäller att $f(x) > 0$ för alla x . Området som begränsas av kurvan $y = f(x)$, linjerna $x = a$ och $x = b$ samt x -axeln har arean A areaenheter.
 En annan kurva definieras av $y = k \cdot f(x)$, där k är en konstant och $k \neq 1$
 Ett annat område begränsas av kurvorna $y = k \cdot f(x)$ och $y = f(x)$ samt av linjerna $x = a$ och $x = b$.
 Undersök hur arean av detta område beror av A och k . (0/0/3)
20. Bestäm $\sin 4v$ om $\cos 2v = 0,6$ (0/0/2)
21. Visa att funktionen $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ är avtagande i intervallet $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ (0/0/3)

Delprov D	Uppgift 22–29. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 22 C- och 18 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

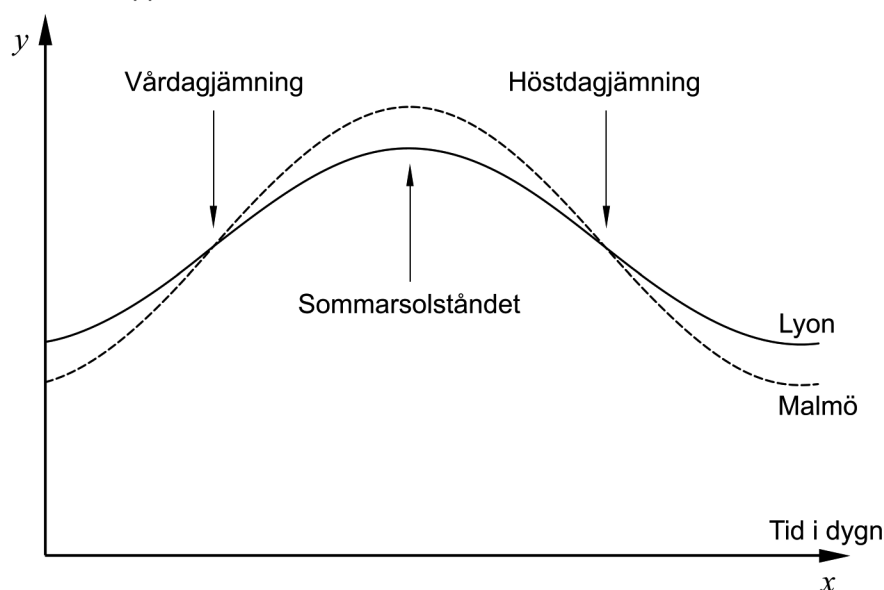
Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

22. Hur många grader är 1,4 radianer? *Endast svar krävs* (1/0/0)
23. Funktionen $f(x) = 5 \cos 5x$ har en primitiv funktion F som uppfyller villkoret $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10$
Bestäm $F(x)$ (2/0/0)
24. Under ett dygn i juli mäts temperaturen i Haparanda. Enligt en förenklad modell kan temperaturen under detta dygn beskrivas med sambandet $y = 15 + 5 \sin(0,26x)$ där y är temperaturen i °C och x är tiden i timmar efter klockan 08.00.
Bestäm förändringshastigheten för temperaturen när klockan är 12.00. (2/0/0)

25. Diagrammet visar antalet timmar per dygn som solen är uppe över horisonten i Malmö och Lyon under ett år, med start vid årsskiftet.

Antal timmar/dygn
som solen är uppe



Enligt en förenklad modell kan kurvorna i diagrammet beskrivas med sambanden

Lyon: $y_1 = 3,8 \sin(0,017x - 1,35) + 12$

Malmö: $y_2 = 5,4 \sin(0,017x - 1,35) + 12$

där y_1 och y_2 är antal timmar/dygn som solen är uppe och x är tiden i dygn räknat från årsskiftet.

- Bestäm hur lång tid solen är uppe under årets längsta dag (sommarsolståndet) i Malmö enligt modellen. (1/0/0)
 - Bestäm hur många fler timmar solen är uppe i Malmö jämfört med Lyon totalt under sommarhalvåret (från vårdagjämning till höstdagjämning) enligt modellen. (0/2/0)
26. Vid odling av en viss bakterie på en odlingsplatta kan tillväxthastigheten av antalet bakterier beskrivas med sambandet $\frac{dN}{dt} = \frac{1000}{1 + 0,3t}$ där N är antalet bakterier och t är tiden i timmar från odlingens början.
- Bestäm ökningen av antalet bakterier under de första 8 timmarna. (0/2/0)

27. En behållare fylls med vatten. Vattnets volym ges av $V = \frac{\pi h^3}{4}$ där V är vattenvolymen i dm^3 och h är vattenytans höjd i dm. Vattnet rinner in i behållaren med hastigheten 36 liter/minut.

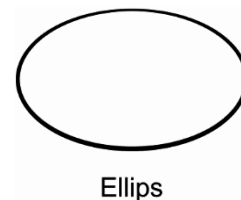
Bestäm med vilken hastighet vattenytans höjd ökar i behållaren då höjden är 2,5 dm.

(0/3/0)

28. Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i origo och med radien 1 är $x^2 + y^2 = 1$

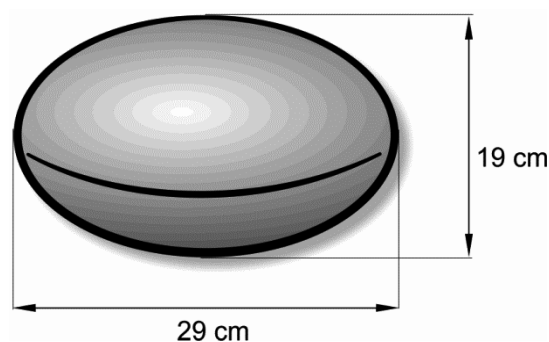
Ekvationen för en ellips med medelpunkt i origo och som skär koordinataxlarna i $(\pm a, 0)$ och $(0, \pm b)$ är på motsvarande sätt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



När en sådan ellips roterar runt x -axeln får man en ellipsoid. I rugby används en boll som har formen av en ellipsoid.

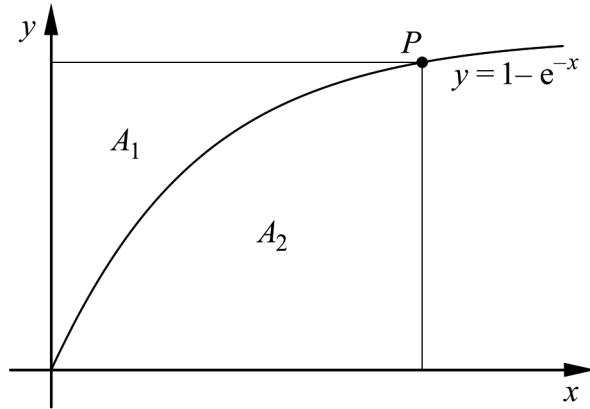
En typ av boll som är godkänd för rugbymatcher har de mått som anges i figuren nedan.



Bestäm volymen av denna boll.

(0/0/3)

29. En punkt P väljs på kurvan $y = 1 - e^{-x}$, där $x > 0$. Genom punkten dras linjer parallella med koordinataxlarna så att en rektangel bildas. Kurvan delar rektangeln i två områden vars areor betecknas A_1 respektive A_2 . Se figur.



Bestäm x -koordinaten för punkten P då det gäller att $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$.

Svara med minst tre värdesiffror.

(0/0/4)

Innehållsförteckning

Inledning.....	3
1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4	4
Allmänna riktlinjer för bedömning.....	4
Bedömningsmodeller.....	4
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga.....	5
2. Bedömningsanvisningar.....	7
Läsanvisning.....	7
Instruktioner för bedömning av delprov B.....	7
Instruktioner för bedömning av delprov C	8
Instruktioner för bedömning av delprov D.....	11
3. Exempel på bedömda elevlösningar	13
Uppgift 7b	13
Uppgift 11	13
Uppgift 13	14
Uppgift 15	16
Uppgift 19	18
Uppgift 21	21
Uppgift 24	24
Uppgift 25a.....	24
Uppgift 25b	25
Uppgift 27	26
Uppgift 29	27
4. Instruktioner för sammanvägning till ett provbetyg.....	29
Sammanvägning till ett provbetyg i samband med provet i matematik 4	29
Resultaten på provet i relation till kursbetyget	29
5. Kopieringsunderlag och webbmateriäl	30
Övrigt webbmateriäl.....	30
Sammanställning av elevresultat	31
Provsammanställning – Centralt innehåll.....	32
Centralt innehåll Matematik 4	33

Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 5).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den huvudsakliga som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en "problemlösningspoäng på E-nivå" respektive en "resonemangspoäng på A-nivå".

För uppgifter av kortsvartstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvartstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknfel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvartsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ... +1 E_p

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...) +1 E_p

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet "med" inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _p
med korrekt bestämning av...	+1 E _p
Godtagbar verifiering av...	+1 E _p

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ... 1 E _R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ... 1 E _R och 1 C _R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ... 1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (), [], \int, dx$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v, \sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differential-ekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1. **Max 2/0/0**
 - a) Korrekt svar (120°) +1 E_B
 - b) Korrekt svar (-3) +1 E_B

2. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($\sqrt{8}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$) +1 E_B

3. **Max 2/1/0**
 - a) Korrekt svar ($f'(x) = -3 \sin 3x$) +1 E_P
 - b) Korrekt svar ($g'(x) = 15(3x + 4)^4$) +1 E_P
 - c) Korrekt svar $\left(h'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \right)$ +1 C_P

4. **Max 2/0/0**

Anger minst en av asymptoternas ekvation korrekt +1 E_B
 med korrekt svar ($x = 0$ och $y = 3$) +1 E_B

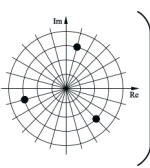
5. **Max 1/1/0**
 - a) Godtagbar markering ($3 + 4i$) +1 E_B
 - b) Godtagbar markering (cirkel med radien 1 och centrum i $2i$) +1 C_B

6. Max 0/2/0
- Anger minst ett värde korrekt +1 C_B
 med korrekt svar (största värde 8 och minsta värde 2) +1 C_B

7. Max 0/1/1
- a) Korrekt svar (t ex $z = i$) +1 C_B
 b) Korrekt svar (t ex $z = bi$, $b > 0$) +1 A_B

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



8. Max 0/0/1
- Godtagbart svar (t ex ) +1 A_B

9. Max 0/0/1
- Korrekt svar ($-2 \tan x$) +1 A_P
- Kommentar:* Korrekt deriverat men ej förenklat svar godtas.

Instruktioner för bedömning av delprov C

10. Max 1/0/0
- Godtagbar lösning med korrekt svar ($11 - 10i$) +1 E_P
11. Max 2/0/0
- Godtagbar ansats, t ex skriver om täljaren med trigonometriska ettan +1 E_R
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E_R

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



- 12.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex beräknar en rot till ekvationen +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 30^\circ + n \cdot 180^\circ$) +1 E_P
- 13.** **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, beräknar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ korrekt *eller*
 bestämmer korrekta integrationsgränser och visar insikt om att arean beräknas som en differens mellan två integraler +1 E_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17 a.e.) +1 E_{PL}
 Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 14.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, skriver om ekvationen och sätter t ex realdelarna lika +1 C_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-2) +1 C_{PL}
- 15.** **Max 0/1/0**
- Godtagbart välgrundat resonemang om varför Gretas resonemang inte stämmer för den givna integralen, t ex
 anger att Greta inte inser att perioden är 4π *eller*
 visar att Gretas resonemang om arean över och under x -axeln inte stämmer +1 C_R
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- 16.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, använder formeln för dubbla vinkeln och kommer fram till en ekvation uttryckt i $\cos x$ +1 C_P
 med godtagbar fortsättning, kommer fram till att lösningarna ges av $\cos x = 0$ och $2\cos x - 1 = 0$ *eller* löser en av dessa ekvationer fullständigt +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
 ($x = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ$ och $x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$) +1 C_P

- 17.** **Max 0/1/0**
- Godtagbart resonemang, t ex anger att icke-reella rötter förekommer parvis +1 C_R
-
- 18.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex skriver $\sqrt{3} + i$ på polär form, $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ +1 C_P
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-64) +1 C_P
- Kommentar:* Även svaret -2^6 godtas.
-
- 19.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, bestämmer minst ett av de möjliga uttrycken för den sökta arean +1 A_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar +1 A_{PL}
- ($A(k-1)$ för $k > 1$ och $A(1-k)$ för $k < 1$)
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
-
- 20.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex inser att $\sin 4v = 2 \sin 2v \cos 2v$ och att $\sin^2 2v + \cos^2 2v = 1$ +1 A_B
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\pm 0,96$) +1 A_P
-
- 21.** **Max 0/0/3**
- Godtagbart påbörjat resonemang, bestämmer $f'(x)$ och förenklar till $-\frac{1}{\sin x + 1}$ eller till $\frac{-1 - \sin x}{(\sin x + 1)^2}$ +1 A_R
- med godtagbart fortsatt resonemang som visar att derivatan är negativ *eller* som visar att derivatan är definierad i hela intervallet +1 A_R
- med i övrigt godtagbart bevis av att funktionen är avtagande +1 A_R
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 

Instruktioner för bedömning av delprov D

- 22.** **Max 1/0/0**
- Godtagbart svar (80°) +1 E_B
-
- 23.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer en korrekt primitiv funktion, $F(x) = \sin 5x$ +1 E_P
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($F(x) = \sin 5x + 10,87$) +1 E_P
-
- 24.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex inser att $y'(4)$ ska bestämmas +1 E_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($0,66^\circ\text{C/h}$) +1 E_M
- Kommentar:* Även svar med enheten grader/h godtas.
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
-
- 25.** **Max 1/2/0**
- a) Godtagbar lösning med godtagbart svar (17,4 h) +1 E_M
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
- b) Godtagbar ansats, t ex inser att funktionerna ska integreras och bestämmer integrationsgränser, 79,4 och 264,2 +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (190 h) +1 C_M
- Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar* 
-
- 26.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, tecknar ett godtagbart uttryck för ökningen av antalet bakterier, t ex $\int_0^8 \frac{1000}{1+0,3t} dt$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4100) +1 C_M

27.

Max 0/3/0

Godtagbar ansats, t ex använder kedjeregeln och sätter in $\frac{dV}{dt} = 36$ eller

$$\frac{dV}{dh} = \frac{3\pi h^2}{4}$$

+1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2,4 dm/min)

+1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5

+1 C_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



28.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t ex ställer upp ellipsens ekvation, $\left(\frac{x}{14,5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9,5}\right)^2 = 1$

+1 A_M

med godtagbar fortsättning, ställer upp en integral för beräkning av voly-

men, t ex $V = \int_{-14,5}^{14,5} \pi \cdot 9,5^2 \left(1 - \left(\frac{x}{14,5}\right)^2\right) dx$

+1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (5,5 dm³)

+1 A_M

29.

Max 0/0/4

Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt integral för A_1 eller A_2

+1 A_{PL}

med godtagbar fortsättning, ställer upp korrekta samband för bestämning av P 's x -koordinat

+1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (2,15)

+1 A_{PL}

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5

+1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar



3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 7b

Elevlösningsexempel 7b.1 (0 poäng)

$$z = r i$$

Bedömningskommentar till exemplet: Eftersom $r > 0$ inte anges, anses svaret ej godtagbart.

Elevlösningsexempel 7b.2 (1 A_B)

$$z = r \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

Bedömningskommentar till exemplet: Även om $r > 0$ inte anges, anses svaret godtagbart eftersom r är standardbeteckning för absolutbelopp när polär form används.

Uppgift 11.

Elevlösningsexempel 11.1 (1 E_R)

$$\frac{1 - \cos^2 23^\circ}{\sin 23^\circ \cos 23^\circ} = \tan 23^\circ$$

$$\frac{1 - \cos^2 23^\circ}{\sin 23^\circ \cos 23^\circ} = \frac{\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ}$$

$$1 - \cos^2 23^\circ = \frac{\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ} \cdot \sin 23^\circ \cos 23^\circ$$

$$1 - \cos^2 23^\circ = \sin^2 23^\circ \quad \text{trig. ettan}$$

$$\sin^2 23^\circ = \sin^2 23^\circ$$

$$VL = HL \quad VS.$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen bygger på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

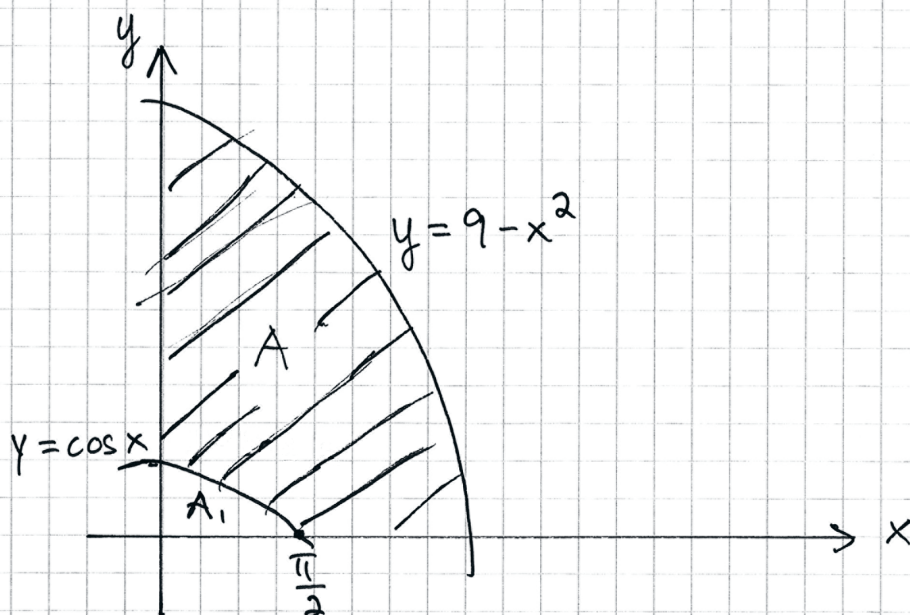
Uppgift 13.

Elevlösningsexempel 13.1 (2 E_{PL})

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^3 (9-x^2) \Delta x - \int_0^{\pi/2} (\cos x) \Delta x = \\
 &= \left[9x - \frac{x^3}{3} + C \right]_0^3 - \left[\sin x + C \right]_0^{\pi/2} = \\
 &= \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - 0 \right) - (1 - 0) = \\
 &= 27 - 9 - 1 = 17 \text{ a.e.}
 \end{aligned}$$

Svar: Den skuggade arean är 17 a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation saknas motivering till den övre integrationsgränsen i den första integralen och dessutom används beteckningen Δx i integralen. Även i övrigt är lösningen knapphändig kommunicerad. Dessa brister tillsammans gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för två problemlösningspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.2 (2 E_{PL} och 1 C_K)

Nollställe för $y = 9 - x^2$

$$0 = 9 - x^2 \Rightarrow x = 3$$

Hela arean:

$$A_{\text{hela}} = \int_0^3 9 - x^2 dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} = 27 - 9 = 18$$

A_1 från 0 till $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A = A_{\text{hela}} - A_1 = 18 - 1 = 17$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Trots att a.e. saknas i svaret anses lösningen uppfylla kraven för den andra problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation så finns en figur med införda beteckningar som gör lösningen enkel att följa och förstå vilket även ger en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15.

Elevlösningsexempel 15.1 (0 poäng)

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[-2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= (-2 \cos \pi) - (-2 \cos 0) =$$

$$= -2(-1) + 2 \cdot 1 = 4$$

Greta har fel, Alicia har rätt

Bedömningskommentar till exemplet: Lösningen innehåller en beräkning av integralen och ett konstaterande att Alicia har räknat rätt. Godtagbar förklaring av vad som är fel i Gretas resonemang saknas dock.

Elevlösningsexempel 15.2 (0 poäng)

Eftersom att man har en inne funktion $\frac{x}{2}$
så får man en annan period än 360° eller 2π .

Bedömningskommentar till exemplet: I lösningen anges att man får en annan period än 2π men det saknas resonemang om att just den här integranden har perioden 4π .

Elevlösningsexempel 15.3 (0 poäng)

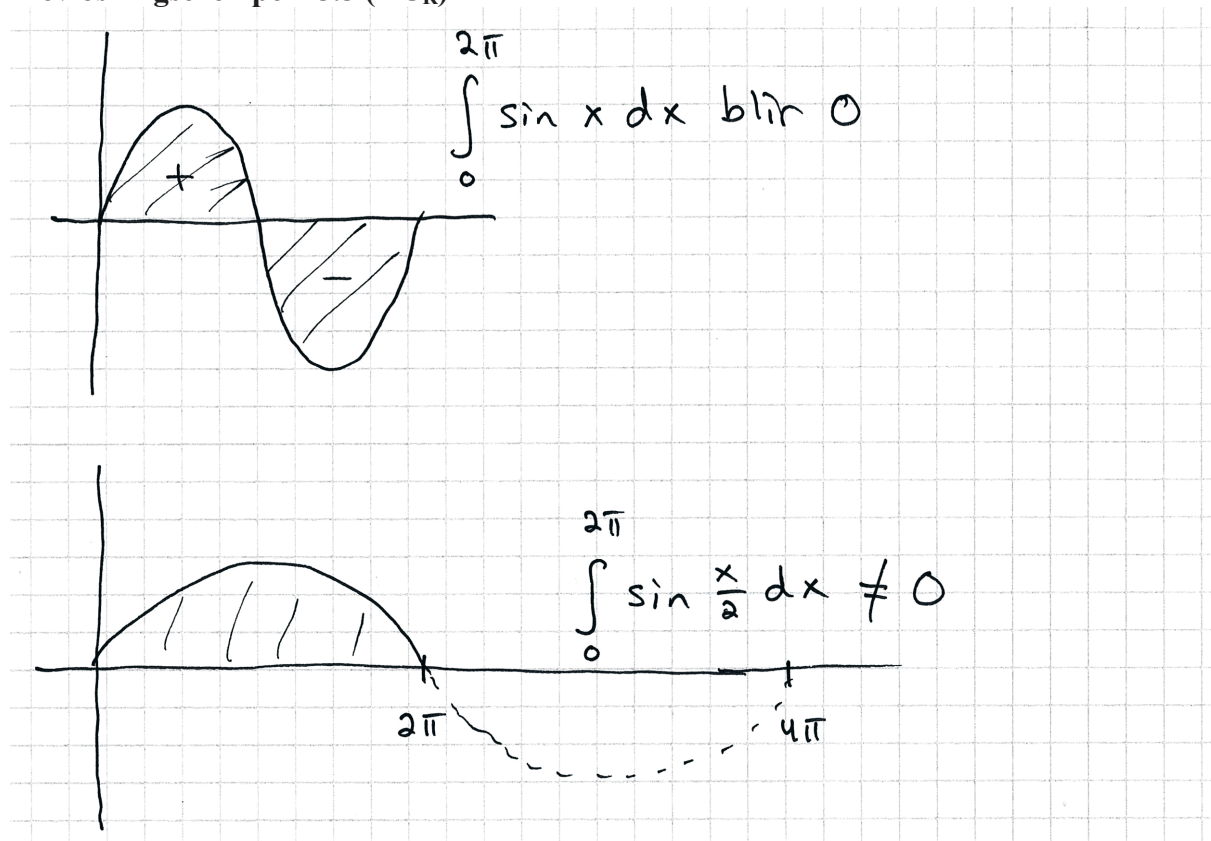
Det som är fel i gretas resonemang är att hon tror att det finns en area både över och under x-axeln. Det kan lika gärna vara en area som endast sträcker sig över x-axeln och inte under.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges att Greta har fel men det saknas koppling till den givna integralen.

Elevlösningsexempel 15.4 (1 C_R)

Eftersom perioden är 4π blir det bara övre arean som man räknar ut med integralen som sträcker sig från $0 \rightarrow 2\pi$.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen konstateras att integranden har perioden 4π och att integrationen bara stäcker sig över en halv period. Beskrivningen "övre arean" är otydlig, men trots detta bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven på resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 15.5 (1 C_R)

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen saknar förklarande text men innehåller en grafisk motivering till varför Gretas resonemang inte stämmer. Lösningen bedöms uppfylla kraven för resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 19.

Elevlösningsexempel 19.1 (2 A_{PL})

Om integralens värde är A så blir arean under $y = k \cdot f(x) = k \cdot A$ och då är arean mellan kurvorna $k \cdot A - A$.
Men om $k < 1$ blir arean $A - k \cdot A$ i stället.

Svar: $k \cdot A - A$ om $k > 1$ och
 $A - k \cdot A$ om $k < 1$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och leder fram till ett godtagbart svar. Därmed anses kraven för de båda problemlösningspoängen vara uppfyllda. Gällande kommunikation är lösningen kortfattad och inte helt lätt att följa och förstå då det bland annat saknas beskrivning av vilken integral som avses. Därmed anses lösningen inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 19.2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$\int_a^b k f(x) dx = \left[k F(x) \right]_a^b = (k F(b) - k F(a)) = k A$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = (F(b) - F(a)) = A$$

$$\left(\int_a^b k f(x) dx \right) - \left(\int_a^b f(x) dx \right) =$$

$$(k F(b) - k F(a)) - (F(b) - F(a)) =$$

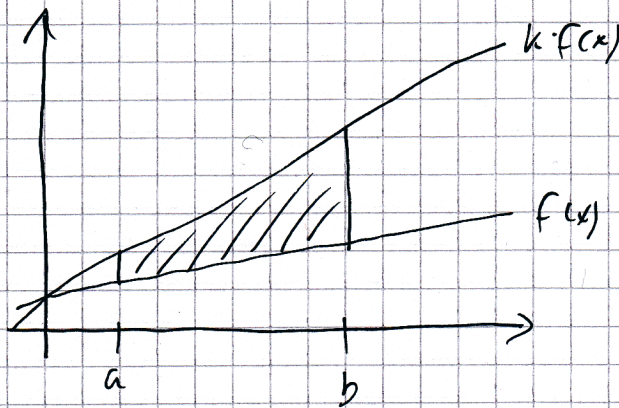
$$\underline{\underline{kA - A}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar hur det ena fallet bestäms korrekt. Därmed anses kraven för den första problemlösningspoängen på A-nivå vara uppfyllda. Gällande kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå även om lösningen hade kunnat vara tydligare med en figur eller förklarande text. Trots att uppgiften inte är löst i sin helhet så anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 19.3 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$\int_a^b f(x) dx = A \Rightarrow \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx = k \cdot A$$

Skiss



Arean som innesluts:

$$\begin{aligned} \int_a^b k \cdot f(x) dx - \int_a^b f(x) dx &= \\ &= k \cdot A - A = A(k-1) \end{aligned}$$

Svar: Arean mellan
kurvorna blir
 $A(k-1)$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar hur det ena fallet bestäms. Trots att uppgiften inte är löst i sin helhet så anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda då lösningen är lätt att följa och förstå. Den ritade skissen tillsammans med beräkningarna gör lösningen tydlig, symboler och representationer är använda på ett korrekt sätt. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för en problemlösningspoäng samt kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 21.

Elevlösningsexempel 21.1 (2 A_R)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x + 1) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x + 1)^2} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \sin x - \cos^2 x}{(\sin x + 1)^2} = \frac{-1 - \sin x}{(\sin x + 1)^2}$$

Nämnaren positiv

$$\sin x: -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1$$

$-\sin x - 1$ negativt

$$f'(x) = \frac{\text{neg.}}{\text{pos.}} = \text{negativt}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att derivatan är negativ i intervallet. Det saknas resonemang om att nämnaren saknar nollställen i intervallet och därmed visas inte att derivatan är definierad i hela intervallet. Sammantaget uppfyller lösningen kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 A_R)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x (\sin x + 1) - \cos x \cos x}{(\sin x + 1)^2} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \sin x - \cos^2 x}{(\sin x + 1)^2} = \frac{-1 - \sin x}{(\sin x + 1)^2} = \\ &= \frac{-1}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{\sin x + 1} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sin x + 1} = 0 \quad \text{saknar lösning!}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{0+1} = -1 < 0 \quad \therefore f \text{ avtagande}$$

Svar: Eftersom $f'(x)$ saknar nollställe och är negativ är f avtagande.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att derivatan saknar nollställen och att derivatan är negativ i en punkt. Denna lösning anses motsvara en lösning som visar att derivatan är negativ i intervallet. Det saknas dock resonemang om att nämnaren saknar nollställen i intervallet och därmed visas inte att derivatan är definierad i hela intervallet. Sammantaget uppfyller lösningen kraven för två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 21.3 (3 A_R)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot (\sin x + 1) - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \sin x - \cos^2 x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \sin x - 1 + \sin^2 x}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(\sin x + 1)}$$

$\sin x$ kan bara anta värden mellan -1 och 1 .

I det här fallet får dock inte $\sin x$ bli -1 vilket innebär att funktionen har asymptoter ($x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$). Det i sin tur innebär att termen $\sin x + 1$ ur derivatan $-\frac{1}{\sin x + 1}$ alltid kommer vara positiv. Derivatans kommer därmed alltid att vara negativ.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att derivatan är negativ i intervallet och nämnarens nollställan bestäms. Kopplingen mellan nollställena och intervallet redovisas inte tydligt. Kopplingen mellan avtagande funktion och negativ derivata saknas. Trots detta anses kraven för de tre resonemangspoängen på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 24.

Elevlösningsexempel 24.1 (2 EM)

Förändringshastigheten kl 12.00 = $y'(4)$

Ritar upp funktionen på räknaren och bestämmer
 $y'(4)$ till $0,66^\circ\text{C/h}$ Svar: $0,66^\circ\text{C/h}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Motivering av hur räknaren använts saknas men trots detta anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra modelleringspoängen.

Uppgift 25a

Elevlösningsexempel 25a.1 (0 poäng)

$$a) \quad 365/2 = 182,5$$

$$y_2 = 5,4 \sin(0,017 \cdot 182,5 - 1,35) + 12 = 17,3 \text{ h}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Tiden för sommarsolståndet har satts till $\frac{1}{2} \cdot 365$ dagar.

Det leder till att maximum inte bestäms korrekt.

Uppgift 25b

Elevlösningsexempel 25b.1 (1 C_M)

$$b) \quad 365/4 = 91,25$$

$$v.d.j. \rightarrow h.d.j.$$

$$dag: 91,25$$

$$dag: 273,75$$

$$273,75$$

$$\int_{91,25}^{273,75} (5,4 \sin(0,017x - 1,35) + 12) - (3,8 \sin(0,017x - 1,35) + 12) dx$$

$$\text{Miniräknarlösning} = 185,1 \approx 185 \text{ h}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Tiden för vår- och höstdagjämning har satts till $\frac{1}{4} \cdot 365$

respektive $\frac{3}{4} \cdot 365$ dagar. Det leder till att integrationsgränserna är felaktiga. I övrigt är integralen godtagbart uppställd och bestämd vilket anses motsvara en godtagbar ansats. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 25b.2 (2 C_M)

$$b) \quad \text{Vårdagjämning} \quad 21/3 : \text{dag } 80$$

$$\text{Höstdagjämning} \quad 21/9 : \text{dag } 264$$

$$\text{Skillnad timmar} =$$

$$264$$

$$264$$

$$\int_{80}^{264} (y_2 - y_1) dx = \int_{80}^{264} (5,4 \sin(0,017x - 1,35) + 12) dx$$

$$- \int_{80}^{264} (3,8 \sin(0,017x - 1,35) + 12) dx =$$

$$= \underline{\underline{188 \text{ h}}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen utgår från att 21 mars (dag 80) och 21 september (dag 264) är vår- och höstdagjämning vilket anses godtagbart. Bestämningen är i övrigt korrekt.

Uppgift 27.

Elevlösningsexempel 27.1 (2 C_{PL})

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} & 36 \text{ l} &= \text{dm}^3 & \frac{dV}{dt} &= 36 \text{ dm}^3/\text{min} \\
 V' &= \frac{3\pi h^2}{4} & \frac{dh}{dt} &= ? & h &= 2,5 \text{ dm} \\
 \downarrow & & & & & \\
 36 &= \frac{3\pi \cdot 2,5^2}{4} \cdot \frac{dh}{dt} & \frac{dh}{dt} &\approx 2,4 \text{ dm}/\text{min} \\
 \text{Svar: } & 2,4 \text{ dm}/\text{min}.
 \end{aligned}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av den efterfrågade förändringshastigheten hos vattennivåns höjd vilket gör att kraven för de två problemlösningspoängen på C-nivå anses vara uppfyllda. När det gäller kommunikation saknas formeln för behållarens volym och derivatan $\frac{dV}{dh}$ betecknas V' vilket är tvetydigt i detta

sammanhang. ”36 l=dm³” och ” $\frac{dh}{dt}=?$ ” drar också ner helhetsintrycket. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på C-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 29.

Elevlösningsexempel 29.1 (3 A_{PL})

P har koordinaterna (a, b)

$$b = 1 - e^{-a}$$

$$A_2 = \int_0^a (1 - e^{-x}) dx =$$

$$A_1 = \frac{A_2}{2}$$

$$A_1 + A_2 = a \cdot b$$

$$\frac{3A_2}{2} = a(1 - e^{-a})$$

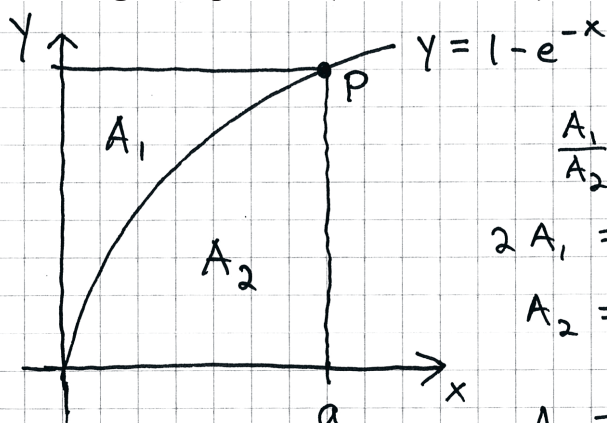
Grafräknaren ger korsning vid $a = 2,15$

Svar: 2,15

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en bestämning av den efter-

frågade x -koordinaten. Sambandet $\frac{3A_2}{2} = a(1 - e^{-a})$ tillsammans med $A_2 = \int_0^a (1 - e^{-x}) dx$

anses uppfylla kraven för andra problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation är lösningen kortfattad och därmed inte helt lätt att följa och förstå. Sammantaget anses lösningen uppfylla kraven för de tre problemlösningspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 29.2 (3 A_{PL} och 1 A_K)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$$

$$2A_1 = A_2$$

$$A_2 = \int_0^a (1 - e^{-x}) dx$$

$$A_1 = \underbrace{a(1 - e^{-a})}_{\text{Rektangel}} - \int_0^a (1 - e^{-x}) dx$$

Graferna $y = \int_0^x (1 - e^{-t}) dt$ och $y = 2(x(1 - e^{-x}) - \int_0^x (1 - e^{-t}) dt)$ ritas upp på grafräknaren. Skärningspunkten avläses till $x = 2,149... \approx 2,15 = a$

$\therefore P$ har x -koordinaten 2,15.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en bestämning av den efterfrågade x -koordinaten. När graferna läggs in i räknaren används x både som variabel och integrationsgräns, därav övergången från a till x nedanför figuren. När det gäller kommunikation är lösningen kortfattad men innehåller alla relevanta delar. Sammantaget anses kraven för samtliga poäng vara uppfyllda.